数理解析研究所講究録
第1655巻2009年32-36

Remarks on n-cubic graphs

中部大学現代教育学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education, Chubu University

$n-$ 立方体グラフ Q_n の2-マッチングの個数と異なる4-サイクル(四辺形)の個数を n が10以下の場合に計算する．頂点の個数が n の完全グラフを K_n と記す．グラフ G の頂点集合を $V(G)$ で，辺集合を $E(G)$ で表わす．また位数 n のグラフ G の固有多項式を

$$f(\lambda, G) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + C_3\lambda^{n-3} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

で表わし，また $n(G)_M, n(G)_C$ (または n_M, n_C) でグラフ G の2-マッチングの個数と異なる4-サイクル(四辺形)の個数を表わすことにする．またグラフ G の彩色数を $\chi(G)$ で表わし，辺彩色数を $\chi'(G)$ で表わす．

グラフ G_1 とグラフ G_2 の**デカルト積** $G = G_1 \times G_2$ とは，点集合 $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ をもち，かつ G の2つの頂点 $(a, b), (x, y)$ が $a = x$ かつ $[b,\ y] \in E(G_2)$ または $b = y$ かつ $[a, x] \in E(G_1)$ のときに限り隣接するように定められたグラフのことをいう．

まず $n-$ 立方体グラフの定義からはじめよう．

定義 1 ([N]) グラフ Q_n が $n-$ **立方体グラフ**とは，$n = 1$ のとき K_2, $n \geq 2$ のときは，$Q_n = Q_{n-1} \times K_2$(デカルト積)によって帰納的に定義されるグラフである．

定義 2 ([Y], p.145) d, q を自然数とし，$d \geq 2$ とする．このとき，X を q 個の元からなる集合として，
$V = \{(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_i \in X\}$,
$E = \{u{-}v \mid u = (a_1, a_2, \cdots, a_d),\ v = (b_1, b_2, \cdots, b_d) \in V, a_i \neq b_i$ となる i は1つだけ$\}$
によって定められるグラフ $H(d, q) = (V, E)$ を**ハミンググラフ**という．

この $n-$ 立方体グラフ Q_n は 2^n の頂点を2進 n 組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(a_n = 0$ または $1, n \geq i \geq 1)$ でラベル付け，それらの2点は対応する2つの2進 n 組が丁度1箇所だけ異なるとき，かつそのときに限り隣接させてできるグラフと同型である．これはハミンググラフの特別なもの $H(d, 2)$ である．並列処理をするときCPU間でのデータ交換に効率がよいので，並列計算機のCPUの結線構造として利用されている．

補題 1 (握手補題). G は頂点数(位数)p で辺の個数(サイズ)が q で，$V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{degree}(v_i) = 2q.$$

$n-$ 立方体グラフ Q_n の各頂点の次数は n であり, 頂点数 (位数ともいう) は 2^n, 辺数 (サイズ) は $n2^{n-1}$ である. これは握手補題より出てくる. 2つの $n-1$ 立方体グラフ Q_{n-1} を左右に並べて, 同一頂点どうしをすべて辺で結べば Q_n を書くことができる.

定義 3 ([N]) 連結グラフ G が**距離推移グラフ**であるとは, 距離 $d(a,b) = d(x,y)$ を満たす G の任意の頂点 a,b,x,y に対して $x = \alpha(a), y = \alpha(b)$ を満足するグラフ G の自己同型写像 α が存在するときとをいう.

Q_n は次数 n, 直径 n である位数 2^n の距離推移グラフである. 連結グラフ $G, v \in V(G)$ に対して, $\Gamma_i(v) = \{u \in V(G) \mid d(u,v) = i\}$ $(i = 0, 1, \cdots, d)$, ここで d はグラフ G の直径とする.

定義 4 ([N, p. 194]) 直径が d で次数が k である連結な正則グラフ G が, 次の条件を満たすとき**距離正則グラフ**という.
(条件) 距離 $d(u,v) = j$ を満たすグラフの任意の頂点 u, v に対して
(1) u に隣接する $\Gamma_{j-1}(v)$ における頂点の個数は c_j $(j = 1, 2, \cdots, d)$
(2) u に隣接する $\Gamma_{j+1}(v)$ における頂点の個数は bc_j $(j = 0, 1, 2, \cdots, d-1)$
となるような整数 $b_0 = k, b_1, \cdots, b_{d-1}, c_1 = 1, c_2, \cdots, c_d$ が存在するときをいう.

距離推移グラフは距離正則グラフであるから, Q_n は距離正則グラフである. 従って $n-$ 正則グラフでもある.

さて [N] によれば, $n-$ 立方体グラフ Q_n のスペクトル $\mathrm{Spec}(Q_n)$ は,

$$\mathrm{Spec}(Q_n) = \begin{pmatrix} n & n-2 & n-4 & \cdots & -(n-2) & -n \\ {}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 & \cdots & {}_nC_{n-1} & {}_nC_n \end{pmatrix}$$

補題 2 ([T, 定理 2.2.11]). 連結グラフ G が二部グラフであるための必要十分条件は, G の最大固有値を λ とするとき G が $-\lambda$ を固有値として持つことである.

補題 2 より, $n-$ 立方体グラフ Q_n は正則二部グラフであることがわかる.

定義 5 ([N]) グラフ G の全域部分グラフで木になるものを G の**全域木**という. グラフ G の全域木の個数をグラフ G の**複雑度**という.

補題 3 ([T, 定理 2.3.3]) グラフ G が連結で位数 p の $r-$ 正則グラフとする. G のスペクトル $\mathrm{Spec}(G)$ が

$$\mathrm{Spec}(G) = \begin{pmatrix} r & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

とする．このとき G の複雑度 $K(G)$ は

$$K(G) = p^{-1}\prod_{i=1}^{s-1}(r-\lambda_i)^{m_i} = p^{-1}f'(r,G)$$

で与えられる．ここに，p はグラフ G の位数，$f'(\lambda, G)$ は G の固有多項式 $f(\lambda, G)$ の導関数で $f'(r, G)$ はその r における値とする ([T, 定理 2.3.3])．

定義 6. 2つの辺の対 $\{e, f\}$ が 2－マッチングであるとは，e と f が共通の頂点を両端に持たないときをいう．

補題 4 ([Y. Jin and M. Kanemitsu, 定理 2.3]) G を位数 n の単純グラフとし，$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ を次数列とする．このとき，2-マッチングの個数 n_M は次式で与えられる．

$$n_M = \frac{1}{8}(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i.$$

定理 5. $n-$ 立方体グラフ Q_n の 2-マッチングの個数 $n(Q_n)_M$ は次式で与えられる．

$$n(Q_n)_M = 2^{n-2}n\{(2^{n-1}-2)n+1\}.$$

定理 5 より，$n(Q_n)_C = \frac{1}{2}(n(Q_n)_M - C_4)$ で求めることができる．

以下 $10 \geq n$ に対して $n-$ 立方体グラフ Q_n の具体例を考察しよう．

(1) $n = 1$ の場合.

$Q_1 = K_2$ である．従って位数 2，サイズ 1 である．彩色数は $\chi(Q_1) = 2, \chi'(Q_1) = 1$. また，この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_1)$ は

$$f(\lambda, Q_1) = (\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^2 - 1.$$

従って，$n(Q_1)_M = 0, n(Q_1)_C = 0$.
複雑度 $K(Q_1) = [\frac{1}{2} \times 2\lambda]_{\lambda=1} = [\lambda]_{\lambda=1} = 1$.

(2) $n = 2$ の場合.

$Q_2 = Q_1 \times K_2 = K_2 \times K_2$ である．従って位数 4，サイズ 4 である．彩色数は $\chi(Q_2) = 2, \chi'(Q_2) = 2$. また，この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_2)$ は

$$f(\lambda, Q_2) = (\lambda-2)(\lambda+2)\lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^2.$$

従って, $n(Q_2)_M = 2, n(Q_2)_C = 1$. $K(Q_2) = [\lambda^4 - 2\lambda]_{\lambda=2} = 6$.

(3) $n = 3$ の場合.

$Q_3 = Q_2 \times K_2 = K_2 \times K_2 \times K_2$ である. 従って位数 8, サイズ 12 である. 彩色数は $\chi(Q_3) = 2, \chi'(Q_3) = 3$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_3)$ は

$$f(\lambda, Q_3) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^{{}_3C_1}(\lambda + 1)^{{}_3C_2}(\lambda + 3) = \lambda^8 - 12\lambda^6 + 30\lambda^4 - 28\lambda^2 + 9.$$

従って, $n(Q_3)_M = 12, n(Q_2)_C = 6$. また $K(Q_3) = [\lambda^7 - 9\lambda^5 + 15\lambda^2 - 7\lambda]_{\lambda=3} = 114$.

(4) $n = 4$ の場合.

$Q_4 = Q_3 \times K_2$ である. 従って位数 2^4, サイズ $4 \cdot 2^3$ である. 彩色数は $\chi(Q_4) = 2, \chi'(Q_4) = 4$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_4)$ は

$$f(\lambda, Q_4) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^{{}_4C_1}\lambda^{{}_4C_2}(\lambda + 2)^{{}_4C_3}(\lambda + 4) =$$
$$\lambda^{16} - 32\lambda^{14} + 352\lambda^{12} - 1792\lambda^{10} + 4352\lambda^8 - 4096\lambda^6 + \ldots.$$

従って, $n(Q_4)_M = 400, n(Q_4)_C = 24$.
また $K(Q_4) = [\lambda^{15} - 28\lambda^{13} + 264\lambda^{11} - 1120\lambda^9 + 2176\lambda^7 - 1536\lambda^5 + \cdots]_{\lambda=4}$.

(5) $n = 5$ の場合.

$Q_5 = Q_4 \times K_2$ である. 従って位数 2^5, サイズ $5 \cdot 2^4$ である. 彩色数は $\chi(Q_5) = 2, \chi'(Q_5) = 5$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_5)$ は

$$f(\lambda, Q_5) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)^{{}_5C_1}(\lambda - 1)^{{}_5C_2}(\lambda + 1)^{{}_5C_3}(\lambda + 3)^{{}_5C_4}(\lambda + 5) =$$
$$\lambda^{32} - 80\lambda^{30} + 2680\lambda^{28} - 50160\lambda^{26} + 586140\lambda^{24} - 4516176\lambda^{22} + \cdots.$$

従って, $n(Q_5)_M = 2840, n(Q_5)_C = 80$.

(6) $n = 6$ の場合.

$Q_6 = Q_5 \times K_2$ である. 従って位数 2^6, サイズ $6 \cdot 2^5$ である. 彩色数は $\chi(Q_6) = 2, \chi'(Q_6) = 6$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_6)$ は

$$f(\lambda, Q_6) = (\lambda - 6)(\lambda - 4)^{{}_6C_1}(\lambda - 2)^{{}_6C_2}\lambda^{{}_6C_3}(\lambda + 2)^{{}_6C_4}(\lambda + 2)^{{}_6C_4}(\lambda + 4)^{{}_6C_5}(\lambda + 6) =$$
$$\lambda^{64} - 192\lambda^{62} + 16896\lambda^{60} - 908800\lambda^{58} + 33592320\lambda^{56} - 909139968\lambda^{54} + \cdots.$$

従って, $n(Q_6)_M = 17376, n(Q_6)_C = 6000$.

以上をまとめると次のようになる.

定理 6. $n-$ 次立方体グラフ Q_n について次のことが成立する.

(1) Q_n の位数は 2^n で，サイズは $2^{n-1}n$ で直径が n の距離推移グラフであり，従って距離 $(n-)$ 正則グラフであるような2部グラフである．

(2) 彩色数 $\chi(Q_n) = 2$，辺彩色数 $\chi'(Q_n) = n$ である．

(3) Q_n の固有多項式 $f(\lambda, Q_n)$ は，固有値に $n, -n$ を持ち，$f(\lambda, Q_n) = \lambda^n - 2^{n-1}n\lambda^{n-2} + [\{2^{n-2}n(2^{n-1}-2)n+1\} - n(Q_n)_C]\lambda^{n-4} + \cdots$ の形である．

(4) $10 \geq n \geq 7$ に対して，$C_n, n(Q_n)_M$ と $n(Q_n)_C$ を列挙すると次のようになる．

$C_7 = 96096, n(Q_7)_M = 97440, n(Q_7)_C = 672.$

$C_8 = 513024, n(Q_8)_M = 516608, n(Q_8)_C = 1792.$

$C_9 = 2625408, n(Q_9)_M = 2634624, n(Q_9)_C = 4608.$

$C_{10} = 13035520, n(Q_{10})_M = 13058560, n(Q_{10})_C = 11520.$

(5) Q_n の複雑度 $K(Q_n) = \frac{1}{2^n}f'(n, Q_n)$.

参考文献

[JK] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with Z_n and their characteristic polynomials, *International J. of Applied Math. and Statistics*, vol. **11** No. VO7 (2007), 81-93.

[N] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, 2005 プレアデス出版.

[T] 竹中淑子, 線形代数的グラフ理論, 1989 培風館

[Y] 芳沢光雄, 置換群から学ぶ組合わせ構造, 2004 日本評論社.