

Pattern Generation on Two Dimensional Cellular Arrays

Satoru Watanabe, Satoshi Okawa

渡辺 識 大川 知

The University of Aizu

会津大学

1 はじめに

2次元における図形や文字などのパターンを表現する方法としてドットマトリクスやビットマップフォントがありプリンタやディスプレイなどに使用されている。この方法で描かれる図形や文字は、あらかじめ固定された格子上のドットを用いたものであり、画面の大きさの変化に応じて柔軟に対応することが難しい。そこで、本稿では画面の大きさの変化に応じて図形や文字の大きさを変化させて表示する方法について検討する。

まず、2次元のパターンを、2次元平面上の平行移動と拡大縮小によって定義される相似関係から得られる同値類として定義し、パターン生成を、サイズ $m \times n$ の画面が与えられたとき、その画面に適切な（位置と）大きさでパターンに属する図形を描くことと定義し、次に画面を離散化し、離散化された画面上でのパターン生成を定義する。さらに、離散化された画面をセルラーオートマトンと考え、セルラーオートマトン上のパターン生成を考察する。最後にパターン生成の例として、任意の長方形のセルラーオートマトンが与えられたとき、その上に正方形および直角二等辺三角形パターンを生成するセルラーオートマトンを構成することができることを示す。

2 パターンの生成

\mathbb{R} を実数の集合とし、数直線を表すものとし、2次元平面を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で表すものとする。このとき、 $F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を2次元図形といい、すべての

2次元図形の集合を \mathcal{F} とする。すなわち、 $\mathcal{F} = \{F | F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ とする。

F を $d \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ だけ平行移動した図形を $F + d = \{p + d | p \in F\}$ 、また、 F を $a(a > 0)$ 倍拡大した図形を $a \cdot F = \{a \cdot p | p \in F\}$ と表すものとし、写像 S_d および Z_a をそれぞれ以下のように定義する。

$$S_d(F) = F + d, \quad Z_a(F) = a \cdot F.$$

写像 S_d 、 Z_a を用いて \mathcal{F} 上の関係を \sim 以下のように定義する。

$$F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ に対して } F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow F_2 = S_d Z_a(F_1) (= aF_1 + d).$$

関係 \sim は2次元図形の同値関係となる。この同値関係により定まる同値類としてパターンを定義する。

定義1

パターン $[F]$ 、およびパターンの集合 \mathcal{P} を以下のように定義する。

$$[F] = \{F' | F' \sim F\},$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{F} / \sim = \{P | P = [F], F \in \mathcal{F}\}.$$

$[a, b]$ によって閉区間 $\{x | a \leq x \leq b\}$ を表すものとし、任意の $m, n > 0$ に対して $[0, m] \times [0, n] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ をサイズ $m \times n$ の画面といい、 $C_{m \times n}$ と表すものとする。

定義2

パターン $P = [F] \in \mathcal{P}$ を画面 $C_{m \times n}$ 上に生成するとは、以下の条件を満たす集合 $D \subseteq C_{m \times n}$ を求めることである。

1. $\exists a, d \quad D = S_d Z_a(F),$
2. $\forall \epsilon > 0 \quad S_d Z_{a+\epsilon}(F) \not\subseteq C_{m \times n}.$

実際の表示を考えると、画面は離散化されていなければならないから、画面 $C_{m \times n}$ を、横を m 等分、縦を n 等分して離散化する。最左最下部に位置する区分けされた画面を $c_{1,1}$ とし、 $c_{1,1}$ から横に i 番目、縦に j 番目の区分けされた画面を $c_{i,j}$ として $c_{i,j} = C_{[i-1,i] \times [j-1,j]}$ と定め、 $C_{m \times n}$ を離散化した画面を $C_{m,n}$ と定義する。すなわち、任意の i, j にたいして、 $c_{i,j}$ は $C_{[i-1,i] \times [j-1,j]}$ であり、

$$C_{m,n} = \{c_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i, j \in \mathbb{N}\}.$$

である。このように離散化した画面におけるパターン生成を次のように定める。

定義3

パターン $P = [F] \in \mathcal{P}$ を画面 $C_{m,n}$ 上に生成するとは、 D を定義2で得られた集合とするとき、以下の集合 $D' \subseteq C_{m,n}$ を求めることである。

$$D' = \{c_{i,j} \mid c_{i,j} \cap D \neq \phi\}.$$

3 セルラーオートマトンによる実現

2次元セルラーオートマトンとは、有限オートマトン（セル）を横と縦に格子状に配置したものであり、各セルが自分自身の状態と隣接セルの状態から定められる状態に一斉に状態を変化させるシステムである。自分自身と隣接したセルのことを、そのセルの近傍といい、近傍の状態から次の状態を定める関数を局所写像という。各セルは、最左最下のセルを起点として i 行 j 列目のセルのように名付け、 $a_{i,j}$ と表すものとする。状態を更新する時間間隔をステップという。

形式的には、2次元セルラーオートマトン \mathcal{M} は以下のように定義される。

$$\mathcal{M} = (M, Q, \sigma, N).$$

ここに、 $M \subseteq Z \times Z$: セルの存在する座標集合（連結していると仮定する。 Z は整数の集合）、 Q : 状態の集合、 $\sigma : Q \times Q^{|N|-1} \rightarrow Q$: 局所写像、 N : 近傍の集合である。

本稿では、セルを横に m 個、縦に n 個格子状に配置したオートマトンを考え、これを $m \times n$ セルラーオートマトンということにする。また、近傍としてノイマン近傍、すなわち自分自身と上下左右のセルを考える。

2次元上に配置された個々のセル $a_{i,j}$ を、区分けされた個々の画面 $c_{i,j}$ と見なせば、セルの集合 M は、離散化された画面 $C_{m,n}$ と見なすことができ、 $m \times n$ セルラーオートマトン \mathcal{M} は以下のように表すことができる。

$$\mathcal{M} = (C_{m,n}, Q, \sigma, N).$$

したがって、 P に対して $C_{m,n}$ 上で P を生成する問題は、セルラーオートマトン \mathcal{M} 上で P を生成する問題、すなわち \mathcal{M} を構成する問題となる。

そのような M を求めるとは、初期様相から動作を開始して、ある時点で $D' \subseteq C_{m,n}$ を指定するように σ を定めることである。指定するとは、 $a_{1,1}$ だけが特別な状態にある開始様相の M を、 $a_{i,j} \in D'$ ならば $a_{i,j}$ を特別な状態 s にし、 $a_{i,j} \notin D'$ ならば $a_{i,j}$ の状態を s とは異なる状態 d とすることである。

次に、セルの間で送受信される信号について説明する。

セルオートマトンはその状態を変化させることにより、信号を送ることができる。信号の伝送速度は k/l のように分数で表現し、これは l ステップかけて k 個先のセルの状態が特定の状態に変化することを表す。例えば、 $1/1$ は 1 ステップでとなりのセルの状態が特定の状態に変化することを表し、結果としてその状態が表す信号が 1 ステップかけてとなりのセルに送信されたことになる。同様に、 $1/2$ は 2 ステップでとなりのセルの状態が特定の状態に変化することを表し、その状態が表す信号が 2 ステップかけてとなりのセルに送信されたことになる。これらの信号を、 $1/1$ 信号、 $1/2$ 信号などと呼ぶことにする。

状態 q がになう信号を右方向に $1/1$ の速さで伝えるためには、以下のよう σ を定める。ここに、セルの状態を表す変数は、自分自身、左、右、上、および下のセルを表すものとする。また、 0 は初期状態を表す。

$$\sigma(0, q, 0, 0, 0) = q.$$

この例では左のセルの状態が q であり、それ以外のセルが初期状態の場合、次のステップで状態 q になることを表している。

また、状態 q がになう信号を右方向に $1/2$ の速さで伝えるためには、以下のように定めれば良い。

$$\sigma(0, q, 0, 0, 0) = 0,$$

$$\sigma(q, 0, 0, 0, 0) = q',$$

$$\sigma(0, q', 0, 0, 0) = q.$$

この例では、まず左のセルの状態が q でありそれ以外のセルが初期状態の場合、次のステップで初期状態のままである。状態が q のセルは自分の右が初期状態であった場合、次のステップで状態 q' となる。左のセルの状態が q' であり、それ以外のセルが初期状態の場合、次のステップで状態 q になる。結果として、2 ステップかけてとなりのセルが状態 q になる。

4 セルラーオートマトン上でのパターン生成の例

セルラーオートマトンによるパターン生成の例として正方形および直角二等辺三角形のセルラーオートマトン上への描画を以下に述べる。

4.1 パターン正方形の生成

与えられた $m \times n$ の画面に、最大の正方形を画面の中央に生成する方法をいくつかのステップに分けて考える。以下に、ステップごとに方法を説明する。

(1) 画面の縦横の長さの比較判定

図1に示すOに位置するセル $a_{1,1}$ は $a_{2,1}$ と $a_{1,2}$ に同時に1/1信号を送り、 $a_{2,1}$ と $a_{1,2}$ は同時に $a_{2,2}$ に信号を送る。結果として $a_{1,1}$ は $a_{2,2}$ に1/2信号を送ることになる。これを繰り返すことにより図1に示すように、Oから長方形の一辺まで右45度方向に信号を送り、辺上の点Pを得る。この例の場合は、 $m > n$ と判定される。

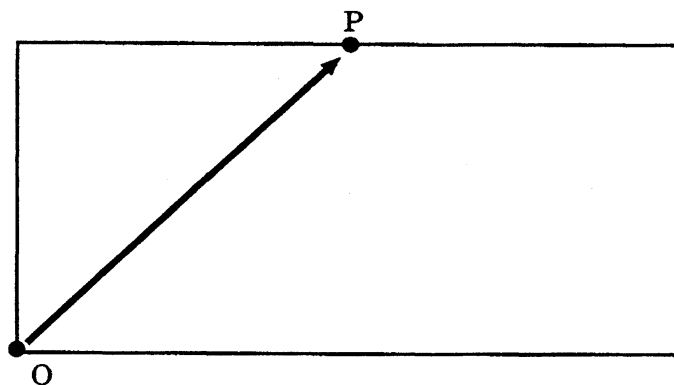


図1: 画面の縦横の長さの比較判定

(2) 正方形の上部右端の決定

図2に示すように、Pから1/1信号(a)と1/3信号(b)を同時に右方向に送る。信号(a)が $a_{m,n}$ (F) に到達したら、同じ速さで反射させると、信号(b)とPとRの中点Cで出会う。この点Cは求める正方形の上部右端の点となる。

(3) 正方形の下部左端および右端の決定

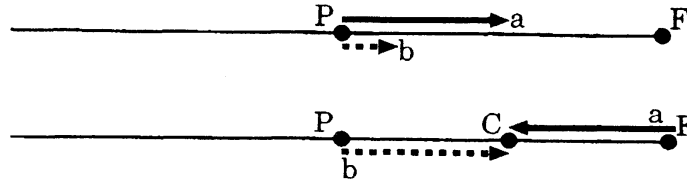


図 2: 正方形の上部右端の決定

C から下方向および左下方向に信号を送り、正方形の下部の 2 頂点 B と A を得る (図 3)。

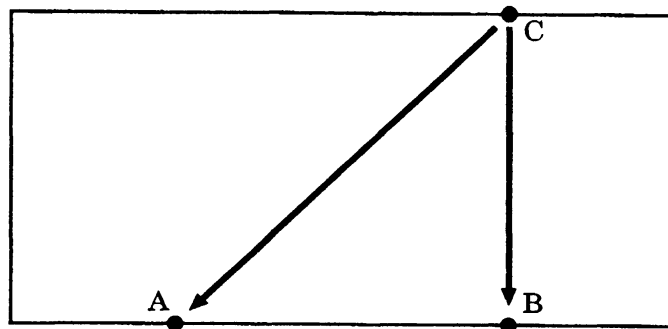


図 3: 正方形の下部左端および右端の決定

(4) 正方形の上部左端の決定

A から上方向に信号を送り、正方形の上部左端の D を得る (図 4)。

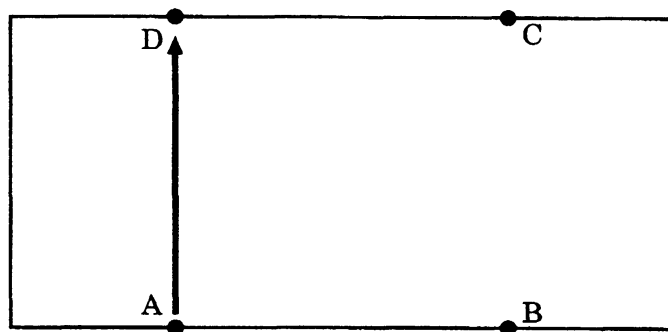


図 4: 正方形の上部左端の決定

(5) 正方形の描画

得られた 4 点 A、B、C、D を正方形の頂点としてこの内部のセルの状態を特別な状態 s に、それ以外のセルの状態を d にすれば、正方形パター

ンが生成される。

この方法は求める図形が徐々に描かれていくもので、パターン生成の条件は満たしているが、パターンの表示システムとしてみたとき効果的な表示ではない。表示の効果を高めるために、ある時点までは何も表示されておらず、ある時点でパッと一瞬で現れるような方法を考える。そのためにセルラーオートマトンの一斉射撃の手法の利用を考える。

(4) まですでに正方形 ABCD が定まった時点から、一斉射撃をその正方形に対して行うというのも一つの方法ではあるが、(3) 以降のステップを次のようにすることによって正方形パターンを一瞬に表示することができる。(このようにすることによって、正方形をもとめてから一斉射撃をするより多少時間が節約できる。)

(3') 正方形の下部左端の決定

C から左下方向に $1/2$ 信号を送り正方形の下部左端の A を得る。同期をとるために、同時に C から下方向に $1/1$ 信号を送り、その信号が下辺に達したならば、同じ速さで上方向に戻す。すると、この信号は、前の信号が A に到達するのと同時刻に C に到達する。

(4') 一斉射撃による正方形の描画

A に将軍をおき A の右側の領域 (AEFD) に対する一斉射撃と、C に将軍をおき C の左側の領域 (CGOB) に対する一斉射撃を行う。一斉射撃で両方ともが射撃状態になったセルだけを特別な状態 s にすることによって正方形が得られる (図 5)。

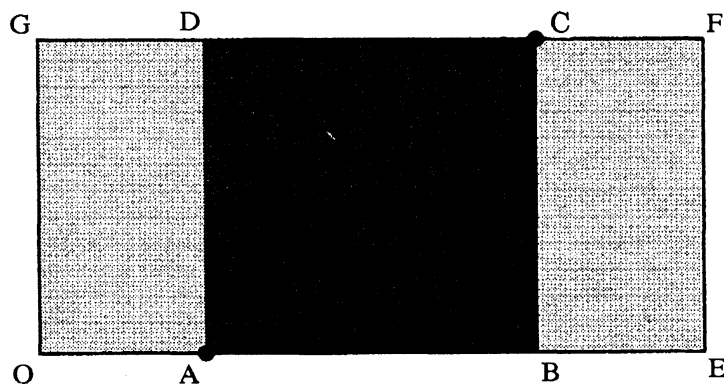


図 5: 一斉射撃による正方形の描画

4.2 パターン直角二等辺三角形の生成

与えられた $m \times n$ の画面に、画面の右側と下側に等辺がある最大の直角二等辺三角形を画面の中央に生成する方法を正方形の場合と同様にいくつかのステップに分けて考える。以下に、ステップごとに方法を説明する。

(1) 直角二等辺三角形の下部右端の決定

正方形の場合の (3) までと同様、直角二等辺三角形の下部の左端 A、下部右端 B、および上部頂点 C が決まる。

(2) 直角二等辺三角形の描画

得られた 3 点 A、B、C を頂点としてこの内部のセルの状態を特別な状態 s に、それ以外のセルの状態を d にしていけば直角二等辺三角形が得られる。

正方形の場合と同様に、ある時点で一瞬に図形が現れるようにするため、セルオートマトンの一斉射撃の手法を用いた直角二等辺三角形の生成を考える。(1) 以降のステップを次のようにすることによって直角二等辺三角形パターンを一瞬に表示することができる。

(1') 射撃する部分の指定

下部左端の位置を決めるため、また、射撃する部分を指定するため、C から同時に左下方向に 1/2 信号 (a) と下方向に 1/1 信号 (b) を送る。信号 (b) が到達した各セルから、左方向に 1/1 信号 (c) を送る。信号 (c) が到達したセルを、射撃するセルであること示す状態 q にしていき、信号 (c) は信号 (a) に出会い止まる (図 6)。

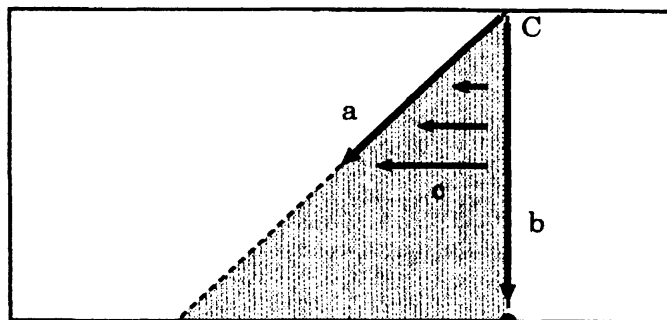


図 6: 射撃する部分の指定

(2') 直角二等辺三角形の下部左端の決定

信号 (a) が最下部に達し、下部左端となる A を得る。信号 (b) が最下部に達した後、同じ速さで上方向に戻し A が得られるのと同時に C に達しそこで止める (図 7)。

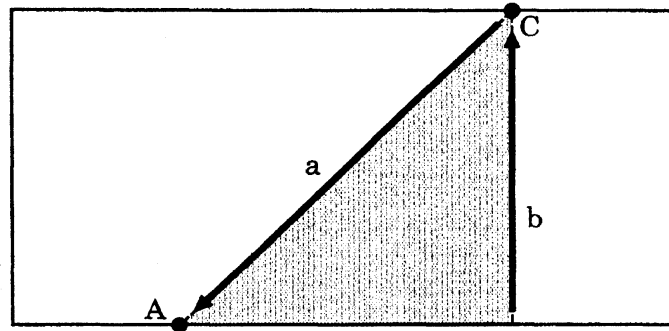


図 7: 直角二等辺三角形の下部左端の決定

(3') 一斉射撃による直角二等辺三角形の描画

A に将軍をおき A の右側の領域 (AEFD) に対する一斉射撃と、C に将軍をおき C の左側の領域 (CJOB) に対する一斉射撃を行う。一斉射撃で両方ともが射撃状態になり、かつ (1') において状態 q にされたセルだけを特別な状態 s にすることによって直角二等辺三角形が得られる (図 8)。

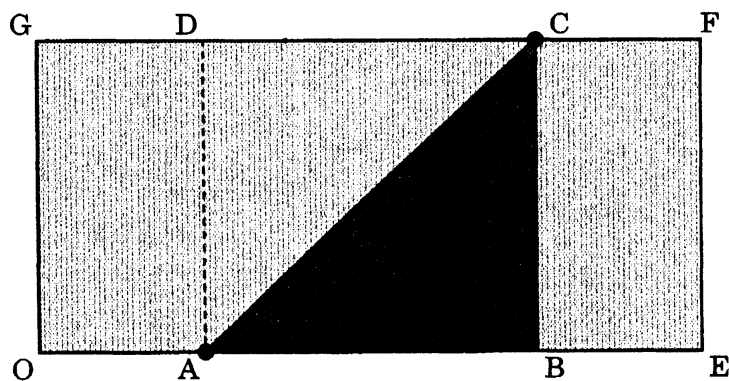


図 8: 一斉射撃による直角二等辺三角形の描画

5 むすび

本稿で我々は、パターンおよびパターン生成を定義した。また、画面を離散化して、離散化された画面でのパターン生成を定義した。さらに離散化された画面とセルラーオートマトンとの対応、およびセルラーオートマトンによるパターン生成を考察した。最後にパターン生成の例として、 $m \times n$ セルラーオートマトンが与えられたとき、その上に正方形および直角二等辺三角形パターンを生成することができることを示した。

我々は、円形などの曲線を含むパターンや、直線や曲線を組み合わせたより複雑なパターンおよび文字の生成方法を検討している。また、現状ではパターンの形状に対して固有の描画方法を考えるしかない。我々は、任意のパターンを統一的な方法で描画する方法ができれば、電光掲示板などのディスプレイでのパターン表示やプリンタでの文字の出力などへの応用が可能であると考えている。

謝辞

京都大学数理解析研究所における研究集会「代数系アルゴリズムと言語および計算理論」に出席した方々に、本研究の方法または応用に関して貴重なご意見をいただいたことに感謝する。

参考文献

- [1] M.Teraoka, et al. A Design of Generalized Optimum-Time Firing Squad Synchronization Algorithm for Two-Dimensional Cellular Arrays, *The 18th Annual Conf.of Japanese Society for Artificial Intelligence*, 3H1- 04,2004.
- [2] T.Komatsu, Pattern Generation in Two Dimension Plane, *University of Aizu, Grad.Thesis.*, March, 2008.