数理解析研究所講究録
第 1655 巻 2009 年 47-55

Concrete construction of Sheffer in trice and some finite algebras [1]

Kiyomitsu Horiuchi
(堀内 清光)

Faculty of Science, Konan University
(甲南大学理学部)
Okamoto, Higashinada, Kobe 658-8501, Japan

概要

形式的に lattice に近い概念である trice を考案したが、本質的に異なった性質を持っている。その一つは、演算の構成（合成）に関することである。ここでは、まず一般的な演算の構成に関することを紹介し、そのあとで lattice と trice の差異を示す。また特に、一つの演算から全ての演算の構成可能な場合について、trice に関連する有限集合上の特殊な代数の話を含めて具体的な Sheffer 演算を報告する。

1 Trice について

集合 A に対して、semilattice $(A,\ *)$ とは、A の上に idempotent, commutative, associative な二項演算 $*$ を持つ代数である。n を正の整数とし n 個の二項演算を持つ代数 $(A,\ *_1,*_2,...,*_n)$ を考えて、各 $(A,\ *_i)$ $(i\in\{1,2,...,n\})$ が semilattice であるとき、**n-semilattice** と呼ぶ。S_n を 集合 $\{1,2,...n\}$ の上の symmetric group とする。全ての $a,b\in A$ 全ての $\sigma\in S_n$ に対して、つぎの形の $n!$ 個の関係式

$$((((a *_{\sigma(1)} b) *_{\sigma(2)} b) *_{\sigma(3)} b)... *_{\sigma(n)} b) = b. \tag{1}$$

を **n-roundabout absorption laws** と呼ぶことにする。

演算を２つ持つ代数 $(A,\ *_1,*_2)$ が 2-roundabout absorption laws を満たすとき、lattice である。このとき演算 $*_1$ と $*_2$ を $\vee$ と $\wedge$ の記号で表わされる。演算を３つ持つ代数 $(A,\ *_1,*_2,*_3)$ が 3-roundabout absorption laws を満たすとき、**trice** と呼ぶことにする。このとき演算 $*_1, *_2, *_3$ を $\nearrow_1$、$\nwarrow_2$, $\downarrow_3$. の記号を使うことにする。さらに演算の数を増やして roundabout absorption laws を満たす代数を考えることもできる。

[1]This is an abstract and the details will be published elsewhere.

2　演算の演算による構成について

有限集合上の演算（二項演算）は、表 (table) を用いて表現できる。集合の要素が多い場合には実際には不可能であるが原理的には可能である。ここでは例を示すために使うので大きな集合を扱うことはない。

例えば、要素が 3 点である集合 $\{0,1.2\}$ の上の演算 δ を $\begin{array}{c|ccc} \delta & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ で示す。

これは $0\ \delta\ 0 = 1,\ 0\ \delta\ 1 = 0, 1\ \delta\ 1 = 2$ など 9 個の式を一度に示している。同じ行と列のところに演算の結果を書くとすると下記のような表現も出来る。

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \quad \delta \quad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

前項 (antecedent) をそのままに返す演算 A $\begin{array}{c|ccc} A & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$

後項 (consequent) をそのままに返す演算 C $\begin{array}{c|ccc} C & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$ とする。演算 δ を

$$\underset{A}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}} \quad \delta \quad \underset{C}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}} = \underset{A\ \delta\ C}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

と考えても良い。

ここで、前項や後項のところに別の数値を入れて演算 δ の計算をすると、例えば

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \delta \quad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

だが、これは前項も後項も $A\ \delta\ C$ だから

$$\underset{A\ \delta\ C}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \quad \delta \quad \underset{A\ \delta\ C}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}} = \underset{(A\ \delta\ C)\ \delta\ (A\ \delta\ C)}{\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}}$$

と書ける。

演算 θ を $\begin{array}{c|ccc} \theta & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$ とすると、 $A\,\theta\,C = (A\,\delta\,C)\,\delta\,(A\,\delta\,C)$ である。

このとき「**演算 θ は、演算 A, C と δ で構成できる**」と言うことにする。以後このような意味で、演算で演算の構成が可能であるかどうかを論議する。(ただし、A, C は、常に使って良い演算とする。)

さて、よく知られたことであるが Boolean algebra では $\vee\ \wedge\ \neg$ の3つの演算から 16 (2^4) 個の演算を構成することができる。その全てを $\neg$ と $\vee$ の2つだけから構成することができる。さらに、Sheffer function 唯一つからも構成することができる。 これに関連して、次の定理が考えられる。

定理1 どんな有限集合 S にたいしても、ある S 上の演算が存在して、S 上の全ての演算をその一つから構成することができる。

この定理は構成的に証明できた。例えば実際に S を n 点集合 $\{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ として、演算 $*$ を $k, h \in S$

$$k * h = \begin{cases} k+1\ (mod\ n) & if\ \ k = h \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

とすれば $*$ で全ての演算を構成できる(8点の場合の $*$ を表の形で示しておく)。

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	0	0	0	0	0	0
2	0	0	3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	4	0	0	0	0
4	0	0	0	0	5	0	0	0
5	0	0	0	0	0	6	0	0
6	0	0	0	0	0	0	7	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$k_0 \in S$ で、$k_m * k_m = k_{m+1}$ とすると、$k_m \neq k_{m+1}$ となる(つまりべき乗すると異なる数値となっている)。また $\{k_m \mid m \in \{0, 1, ..., n-1\}\} = \{0, 1, ..., n-1\}$ である(つまり全ての点を巡回している)。この二つが必要であり本質であるので、このタイプの演算をべき乗巡回演算と名づけておく。なお、$k * h (k \neq h)$ が全て0となる必要はなく他の例もある。

詳細は省略するが、上の $*$ で全ての演算が構成する方法の手順を示しておく。

1. すべてが0となってしまう演算($k * h = 0$ for all $k, h \in S$)を構成する。
2. 任意の行だけが全て1で、その他が0の演算を全て構成できることを示す。

3. 各行が同一で全ての数字が 0 か 1 の演算を全て構成できることを示す。

4. 各行が同一の数字である演算を全て構成できることを示す。

5. 双対に、各列が同一の数字である演算を全て構成できることを示す。

6. 一か所だけが任意の数字で、あとは 0 である演算を構成できることを示す。

7. MAX演算 ($0 < 1 < 2 < \ldots < n-1$ の線形順序の $\vee$) を構成する。

8. 全ての演算が構成できることを示す。　構成完了。

集合 $\{0,1\}$ 上の演算の集合が、 Boolean algebra の演算全ての集合と同じと見れば、集合 $\{0,1\}$ 上の演算として Sheffer function は、$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ と $\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ である。この事実は上の定理の一部である。

この定理が、よく知られた結果なのか、いつ頃からあるのかなど判らなかったので、具体的な構成法の概略と共にここに記した。後で扱う否定的演算を考える中で、Post の多値論理の否定との関連が考えられた。実際、[7] を調べたところ証明は見つからなかったが事実としてそれらしい記載があった[2] 。

3 Trice における演算数の具体例

前節でも述べたように Boolean algebra は、16 個の演算を持っているが、これは如何なる集合上であっても（有限集合でも無限集合でも）変わらない性質である。逆に言うと 16 個しか演算を構成できないのである。また、lattice の演算 $\vee$ と $\wedge$ の二つからでは、新しい演算を本質的に構成しない。つまり、A（前項をそのまま返す演算）と C（後項をそのまま返す演算）を含めて 4 個しかない。これも如何なる集合上であっても変わらない性質である。なお、この 4 つを、その中の一つ（$\vee, \wedge, A, C$ の一つ）で構成することはできない。 演算数の不変性は Boolean algebra や lattice の注目すべき性質である。形式的には似た概念の trice では全く状況が異なる。基本の演算 $\nearrow_1$ $\nwarrow_2$ $\downarrow_3$ から構成できる演算の数が一定でない。元になる集合の要素の数によって演算数は異なるし、集合の要素の数が同じでも演算数が異なる trice が存在する。具体例を示す。

例 1　2 点集合 $\{0,1\}$ の上に次の 3 演算を入れる。

---

[2] [7] を調べたのは 千葉大学 古森雄一教授 の指摘による.

$\nearrow_1$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\nwarrow_2$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\downarrow_3$	0	1
0	0	0
1	0	1

これは trice である。また $\nearrow_1 = \nwarrow_2 = \vee$, $\downarrow_3 = \wedge$ と考えれば、lattice とも考えられる。よって、これらの演算からは、A と C を含めて 4 個の演算しか構成できない。

例 2　3 点集合 $\{0,1,2\}$ の上に次の 3 演算を入れる。

$\nearrow_1$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\nwarrow_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\downarrow_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

これも、$\nearrow_1 = \nwarrow_2 = \vee$, $\downarrow_3 = \wedge$ と見れば、例 1 と同様に lattice であり trice でもある。そして、4 個の演算しか構成できない。

例 3　3 点集合 $\{0,1,2\}$ の上に次の 3 演算を入れる。これを 3 値論理型と呼ぶことにする。

$\nearrow_1$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

$\nwarrow_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\downarrow_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\nearrow_1$ は、$0 < 1$, $2 < 1$ の順序を入れた集合の $\vee(\max)$ である。1 を頂点とする演算とも言うことにする。$\nwarrow_2$ と $\downarrow_3$ は例 2 と同じであるが、$\nwarrow_2$ は、$0 < 1 < 2$ の順序を入れた集合の $\vee$ である。$\downarrow_3$ は、$2 < 1 < 0$ の順序を入れた集合の $\vee$ である。これは trice である。9 個の演算を構成する。

例 4　3 点集合 $\{0,1,2\}$ の上に次の 3 演算を入れる。これを三つ巴型と呼ぶことにする。

$\nearrow_1$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\nwarrow_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\downarrow_3$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

$\nearrow_1$ は $2 < 1 < 0$ の順序を入れた集合の $\vee$ である。$\nwarrow_2$ は $0 < 2 < 1$ の順序を入れた集合の $\vee$ である。$\downarrow_3$ は $1 < 0 < 2$ の順序を入れた集合の $\vee$ である。これは trice である。１８個の演算を構成する。

例 5　3 点集合 $\{0,1,2\}$ の上に次の 3 演算を入れる。これを三角型（三頂点型）と呼ぶことにする。

$\nearrow_1$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

$\nwarrow_2$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

$\downarrow_3$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	1	2
2	2	2	2

これは trice である。そして、3^6 個の演算を構成する。べき等律 $(k * k = k)$ の成り立つ演算全てを構成している。この 3^6 個を唯一つから構成できる演算が存在する。下は その例である。

	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	1
2	0	0	2

	0	1	2
0	0	2	1
1	0	1	0
2	1	2	2

ここでは、ある代数系で構成される演算に限って、その全てを（その中の）唯一つで構成できる場合を示している。このような演算をその代数系の **Sheffer** と呼ばれることがある。また、複数の演算でその代数系の演算を全て構成できた場合に、その演算の集まりは **complete** と呼ばれることがある。例 1 から例 4 では、Sheffer は存在しない。勿論、$\{ \nearrow_1, \nwarrow_2, \downarrow_3 \}$ の演算の集まりは、それらから構成できるものを論じているのだから、明らかに complete である。
定理 1 は、「有限集合上の全ての演算を構成することができる演算の存在」を示している。このように全ての演算を構成できるような演算を **universal** と呼ぶことにする[3]。この用語に従えば、例 5 の上記の演算は 3 点集合 $\{0, 1, 2\}$ の全ての演算を構成するわけでないので Sheffer であって universal でない。また 一般に Boolean algebra の Sheffer function は Sheffer であるが universal でない。

4 Trice への否定的演算の付加の試み

Boolean algebra は lattice に何かを付加することによってできていると考えると trice に何かを付け加えて良い性質の代数系を作ることを考えるのは自然である。実際 trice に Boolean algebra の否定に相当するものとして rotation 演算を導入を試みた。

3 点集合 $\{0, 1, 2\}$ の上では、

r	0	1	2
0	1	1	1
1	2	2	2
2	0	0	0

を導入する。単項演算で考えるのが普通であるが、ここでは後項を無視した形の二項演算の形で表現した。3 点集合上の rotation は r と逆回りしかない。
この演算を 例 2 から 例 5 の trice に加えると、4 つの演算で、3 点集合 $\{0, 1, 2\}$ の全ての演算 3^9 個を構成する。これは定理 1 の形の universal 演算を一つ構成することで示すことができる。実際

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

と

r	0	1	2
0	1	1	1
1	2	2	2
2	0	0	0

から

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	2	0
2	0	0	0

を構成できる。他の 3 点集合上の trice も検証して

定理 2 3 点集合上の trice は rotation 演算 r を付加すると全ての演算を構成する。

[3]universal の用語は 元京都大学 西尾英之助 教授 の助言により 計算機関連の用語を借用した.

しかし、n 点集合上の trice では話は簡単ではない。線形順序の $\vee$ や $\wedge$ を持っているとは限らない。すべてを巡回する rotation 演算も $(n-1)!$ 個考えられる。如何なる trice に 如何なる rotation 演算 r を付加すると全ての演算を構成できるかが問題となる。意味的に rotation 演算を否定のように扱ってよいのかも問題である。ここで、Post の多値論理の否定は、線形順序の $\vee$ をもつ代数系に一つずらせる演算（rotation 演算の一つである）を入れているので関連が深いと思われる。

5 Top 演算による代数系の Sheffer の具体的構成

例 5 の演算 $\nearrow_1, \nwarrow_2, \downarrow_3$ は、演算から導かれる順序を Haase 図に書くと、一つの点を頂点とした山の形になる。$\nearrow_1$ は 0 を頂点、$\nwarrow_2$ は 1 を頂点、$\downarrow_3$ は 2 を頂点とする演算である。ある点 a があって、$x * y = a (x \neq y)$, $x * x = x$ となるとき、$*$ を **top 演算**と呼ぶことにする。このような top 演算を基本とする演算数の多い代数系を考える。例 5 のように点の数が 3 で 3 個の top 演算から作られる代数系を $\mathcal{T}_3$ と書こう。$\mathcal{T}_n$ は、n 点集合 $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ の上に n 個の top 演算を入れたものとする。$\mathcal{T}_n$ は、n-roundabout absorption laws を満たす代数系である。

定理 3 $\mathcal{T}_n$ は、$n^{n(n-1)}$ 個の演算を持ち、その中に Sheffer 演算が存在する。

$n^{n(n-1)}$ 個の演算を持つことは、べき等である演算を全て持つことである。これは n に関する帰納法で構成的に証明できる（詳略）。そして実際に下の演算 $*$ が $\mathcal{T}_n$ で Sheffer 演算である。

$$k * h = \begin{cases} k & if & k = h \\ h-1 & if & k = 0 \text{ or } 1 \text{ and } h \geq 2 \\ n-1 & if & k = 0 \text{ and } h = 1 \\ n-1 & if & k = 1 \text{ and } h = 0 \\ 0 & if & k \neq 1 \text{ and } k > h \\ 1 & otherwise & \end{cases}$$

例として、$\mathcal{T}_8$ の場合の $*$ を表の形で示しておこう。

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	7	1	2	3	4	5	6
1	7	1	1	2	3	4	5	6
2	0	0	2	1	1	1	1	1
3	0	0	0	3	1	1	1	1
4	0	0	0	0	4	1	1	1
5	0	0	0	0	0	5	1	1
6	0	0	0	0	0	0	6	1
7	0	0	0	0	0	0	0	7

6 Triceの演算数制限の試み

$(T, \nearrow_1, \nwarrow_2, \downarrow_3)$ を trice とする。
T の 有限個の直積の T^n は、演算数が T と同じである。よって 3 を 3 点 trice として、3^n に同型な trice のみを考えると、その演算数は、3 の演算数に等しい。3 が、どの 3 点 trice であるかによって演算数が異なるが（例 2 から例 5 参照）演算数が制限されることは明らかである。3^n に同型な trice はある意味で良い trice である。3 点集合上の rotation から否定的な演算を考えることもできる。このときは、全てを巡回しなくて 3 回で元に戻る演算が否定的演算と考える。trice の場合は、全てを巡回しなくて 3 回で元に戻る演算の導入の方が否定演算として良いのかもしれない。
3^n に同型な trice は Boolean algebra に似ている。「有限 Boolean algebra B は、その原子全体の集合 A としたとき、集合束 2^A に同型である」という表現定理があるので、それを逆から真似てみたことになっている。
上の方法によっても演算数の制限を考えたということができるが、対称性を重んじた関係式を付加した条件の良い trice で、演算数が制限されるかを考えてみた。

すべての $d, e \in T$ に対して、次の 3 式を満たすとき、**triangle constructive law** を満たすということにする。

$$(d \nearrow_1 e) \downarrow_3 (d \nwarrow_2 e) = d \downarrow_3 e \tag{2}$$
$$(d \nearrow_1 e) \nwarrow_2 (d \downarrow_3 e) = d \nwarrow_2 e \tag{3}$$
$$(d \downarrow_3 e) \nearrow_1 (d \nwarrow_2 e) = d \nearrow_1 e \tag{4}$$

また、すべての $x, y, z \in T$ に対して、次の 3 式を満たすとき、**triangle natural law** を満たすということにする。

$$\text{If } x \nearrow_1 y = z \text{ and } x \nwarrow_2 z = y, \text{ then } y \downarrow_3 z = x \tag{5}$$
$$\text{If } x \downarrow_3 y = z \text{ and } x \nwarrow_2 z = y, \text{ then } y \nearrow_1 z = x \tag{6}$$
$$\text{If } x \nearrow_1 y = z \text{ and } x \downarrow_3 z = y, \text{ then } y \nwarrow_2 z = x \tag{7}$$

この二つの法則を満たした trice は対称的で三角形を基本とするものとなり、3 点 trice では例 5 である。そこで、この条件で構成する演算は 3^6 個に既定されるのではないかと予想した。

例 6 6 点集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ の上に次の 3 演算を入れる。

$\nearrow_1$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
2	0	1	2	1	0	0
3	0	1	1	3	5	5
4	0	0	0	5	4	5
5	0	0	0	5	5	5

$\nwarrow_2$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	2	2	1
1	1	1	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	3	3	3
4	2	2	2	3	4	3
5	1	1	2	3	3	5

$\downarrow_3$	0	1	2	3	4	5
0	0	5	4	4	4	5
1	5	1	3	3	4	5
2	4	3	2	3	4	4
3	4	3	3	3	4	4
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	4	4	4	5

これは triangle constructive law も triangle natural law も満たす trice となる。典型的な 6 点 trice として何度も例に使われている。この trice の 3 演算からは $3^6 \times 6^6$ 個の演算を構成することができる。3^6 個ではない。また、べき等律 $(k * k = k)$ の成り立つ演算全てを構成しているわけでもない。

この例により、上記の予想は正しくないことがわかる。
この 6 点 trice にも Sheffer 演算（$3^6 \times 6^6$ 個を唯一つから構成できる演算）が存在する。下は その例である。

	0	1	2	3	4	5
0	0	5	4	2	2	1
1	0	1	3	2	0	0
2	0	1	2	1	0	4
3	4	2	3	3	5	5
4	2	2	4	4	4	3
5	1	5	0	4	3	5

References

[1] S. Burris, H.P.Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra* GTM 78 Springer-Verlag, 1981.

[2] G. Birkhoff. *Lattice Theory (third ed.)* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1967.

[3] G. Grätzer. *General Lattice Theory (Second ed.)* Birkhäuser, 1998.

[4] K. Horiuchi. Trice and Two delegates operation. Scientiae Mathematicae, 2-3 (1999)373–384.

[5] K. Horiuchi, A. Tepavčević. On distributive trices. Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, 21(2001)21–29.

[6] K. Horiuchi. Some weak laws on bisemilattice and triple-semilattice. Scientiae Mathematicae, 59, No.1 (2004): 41–61.

[7] E. L. Post. Introduction to General Theory of Elementary Propositions. American Journal of Mathematics, Vol.43 No.3 (Jul.1921).163–185.

[8] G. Rouseau. Completeness in finite algebras with a single operation. Proc. Amer. Math. Soc, 18(1967) 1009–1013.