数理解析研究所講究録
第1655巻 2009年 101-105

セルラーオートマトンからみた複素ローレンツ変換

東洋大学　工学部　佐藤忠一（Tadakazu Sato）

Faculty of engineering　Toyo University

1．まえがき

文献[1]でローレンツ変換$L(\beta)$をセルラーオートマトンの視点から$L_X(\beta,\gamma)$に拡張した。これをさらに複素数体上に拡張した$L_X(\beta,\gamma,\theta)$について考える。

2．本論

ローレンツ変換$L(\beta)$は以下の行列で表される。

$$L(\beta)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1, & -\beta \\ -\beta, & 1 \end{pmatrix},\quad \beta=\frac{v}{c}.$$

$L(\beta)$は $ds^2=c^2dt^2-dx^2$ を保存する線形変換である。これを複素数体上までひろげても、物理的に意味がある結果は得られない。

一方、セルラーオートマトンは局所的に相互作用を有する並列変換であるが、この立場からすると行列は相互作用の無いスコープ１の線形セルラーオートマトンとみなすことができる。線形セルラーオートマトンの立場から$L(\beta)$ を複素ローレンツ変換$L_X(\beta,\gamma,\theta)$に拡張する。即ちV_2を２次元ミンコフスキー空間とするとV_2上の線形変換を$V_2{}^Z = \cdots V_2 \times V_2 \times V_2 \times \cdots$ 上の線形変換に拡張する。

線形セルラーオートマトンとは$\langle Z, V_2, f, N \rangle$ で与えられる。ここでZは整数の集合で１次元セル空間と呼ばれる。V_2は２次元ミンコフスキー空間で状態の集合を表す。fは$V_2{}^5$ から V_2へのスコープ幅５の局所関数で、Nは近傍の集合で $N = \{-2,-1,0,1,2\} \subset Z.$

局所関数fから、並列写像 $f_\infty : V_2{}^Z \to V_2{}^Z$ を次のように定義する。

$$f_\infty(u_\infty) = v_\infty \Leftrightarrow \ v_\infty(i) = f(u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}), \quad i \in Z$$

線形セルラーオートマトンの理論から、並列写像は多項式によって表すことができる。すなわち

$F(X)$をf_∞の多項式表現とし, u_∞, v_∞のベキ級数表示をそれぞれ

$$U(X) = \sum_{i \in Z} u_i X^{-i}, \qquad V(X) = \sum_{j \in Z} v_j X^{-j}$$

とすると$V(X)=F(X)U(X)$ が成立する。

$F(X)$ として以下で述べる $L(\beta)$ を複素数体上にまで拡張した $L_X(\beta,\gamma,\theta)$をとる。

ベクトルの２スコープへの拡張を以下のように定義する。

定義　$v\in V_2$に対して，vの拡張されたベクトル $v_X=v_1+v_2X$ は次の条件を満たす。

(1)$\langle v,v\rangle=\langle v_X,v_X\rangle$　（ノルム保存）

(2)　$v=v_1+v_2$　　　(線形性)

このとき　$v\rightarrow v_X$　と書く。

実際に基本ベクトル$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$の拡張されたベクトルは以下のように与えられる。

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}1\\ \gamma e^{i\theta}\end{pmatrix}+\frac{-\gamma}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}\gamma\\ e^{i\theta}\end{pmatrix}X,$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{-\gamma}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}e^{-i\theta}\\ \gamma\end{pmatrix}X^{-1}+\frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}\gamma e^{-i\theta}\\ 1\end{pmatrix}.$$

この対応は以下で与えられる線形変換$U_X(\gamma,\theta)$ 誘導する。

$$U_X(\gamma,\theta)=\frac{-\gamma}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}0,e^{-i\theta}\\0,\gamma\end{pmatrix}X^{-1}+\frac{1}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}1,\gamma e^{-i\theta}\\\gamma e^{i\theta},1\end{pmatrix}+\frac{-\gamma}{1-\gamma^2}\begin{pmatrix}\gamma,0\\e^{i\theta},0\end{pmatrix}X$$

補題　$U_X(\gamma,\theta)$ は以下の性質をもつ。

(1) ${}^t\overline{U}_X(\gamma,\theta)\Lambda U_X(\gamma,\theta)=\Lambda$,

(2) $U_X(\gamma,\theta)$ は γ,θ に関して連続

(3) $U_X(0,0)=I \quad (Identity \quad matrix)$

この線形変換 $U_X(\gamma,\theta)$ は $L(\beta)$ から以下で与えられる複素ローレンツ変換 $L_X(\beta,\gamma,\theta)$ を誘導する。ここで、

$$L_X(\beta,\gamma,\theta)=U_X(\gamma,\theta)L(\beta)U_X(\gamma,\theta)^{-1}$$

定理　$L_X(\beta,\gamma,\theta)$ は以下の性質を持つ。

(1) $ds^2=\sum_{i\in Z} c^2 d\bar{t}_i dt_i - d\bar{x}_i dx_i$ を保存,即ち ${}^t\overline{L}_X(\beta,\gamma)\Lambda L_X(\beta,\gamma)=\Lambda$

(2) $L_X(\beta,\gamma,\theta)$ は γ,θ に関して連続

(3) $L_X(\beta,0,0)=L(\beta)$

３．物理的考察

γ および θ は無次元なので、ある物理量の比を表わす。文献[1]では

γ は長さの比と仮定し、ℓ_0 をその慣性系の最小（minimal）な長さとし、ℓ を対象物の長さとし、$\gamma = \ell_0 / \ell$ とする。

(1) $L_X(\beta,\gamma,\theta) \to L(\beta)$ if $\ell_0 \ll \ell$.即ち, $\gamma \to 0$ のとき位相は消える。

(2) $L_X(\beta,\gamma,\theta)$ は ℓ が ℓ_0 に近づくにつれ，即ち $\gamma \to 0$ のとき $L(\beta)$ から次第にずれて位相が現れる。

ミクロの世界では素粒子は位相を持つことが知られている。はたして時空もミクロの世界では位相を持つのだろうか？

4．文献

[1] T. Sato, Cellular Automata, ACRI2006, p402－p406, Springer