数理解析研究所講究録
第 1660 巻 2009 年 43-50

白頭絡的超幾何又黒写像

9州大学6本松　吉田正章 (Masaaki YOSHIDA) *

平成19年12月17日

小学校か中学校で習う反比例のグラフは双曲線ではありません。負の数を習って、グラフを第3象限にも描いて初めて双曲線になるのです。双曲の双とは2つという意味です。ですから反比例のグラフのように一方しか考えないときには「又曲線」が正しい。用語の趣味の問題でなく「双曲空間、双曲幾何」は間違いなのです、「又曲空間、又曲幾何」でなくてはいけない。このことはこの会の世話役の藤井氏には何度も言っているのですが、この度も集会の名前は改められなかった。hyperbolic は、わあっと大きくなると言う位の意味だろうから、このことからも、股をおっぴろげたという感じのする又が相応しい様な気がする。

私は30年以上超幾何微分方程式に関わっています。具体形を今日今から使うわけではありませんが、ご存じない方の為に、書いておきましょう：

$$E(a,b,c): \quad x(1-x)u'' + \{c-(a+b+1)x\}u' - abu = 0,$$

ここで (a,b,c) は複素径数。この方程式は、これ以上一寸でも簡単にすれば、高校で習う関数で解けてしまうという意味で、大学で習う一番易しい微分方程式です。見たら分かるように、線形、2階で特異点は $\{0,1,\infty\}$ です。

この方程式及びその解（超幾何関数）について、Euler, Gauss, Riemann, Klein 等により色々のことが研究されましたが、幾何をしたのは Schwarz（以下黒と呼ぶ）です（前々世紀の末頃）：　彼は黒写像

$$Sch: X := \mathbf{C} - \{0,1\} \ni x \longmapsto u(x):v(x) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \cong \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

(u,v は線形独立解) が面白いと提唱し、径数が実数のときに像を調べました；x-平面の上半分の像は円弧三角形（黒三角形）になり、全像は「黒鏡像

*SYY4/kyoto.tex

原理」で分かるというものです；三角形は１つおきに黒、白と塗り分けると見やすく、多くの本でもそうしてあります（白い方を白三角形と呼ぶ)。

黒写像は一価ではありません；多価の具合を測る群を測多価群といいます。以前は希臘語を使って monodromy 群等と言っていたが、今度の数学辞典で改まりました。

特に $(a,b,c)=(1/2,1/2,1)$ の時は有名で、黒三角形の三頂角は全て零となり、鏡像原理でどんどん写していったものは世界数学者連合の紋章にも使われています。式で書きますと

$$\lambda:\ \mathbf{H}/\Gamma(2) \xrightarrow{\cong} X=\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}-\{0,1,\infty\},$$

となりましょうか；$\mathbf{H}$ は上半平面 $\{\tau\in\mathbf{C}\mid\Im\tau>0\}$, $\Gamma(2)$ は楕円芋蔓群の階数２の主合同部分群。ここで大切なのは λ（乱舞だ、黒写像の逆）が手多 (theta) 関数で書けることです。これが単なる位相同型なら、「黒三角形と白三角形を境界で引っ付けると、穴が３つ開いた毬になる」という、幼児にでも分かることで、数学になりません。

この同型は色々の数学の原点であります。前世紀はこれの複素高次元化が盛んでした；嚆矢は光°(Picard) と寺田俊明（滋賀医大２００７年３月退職）です。上の同型の左辺の $\mathbf{H}$ を複素１次元又曲空間と思って、その高次元化である複素 n 次元又曲空間にし、右辺の複素射影１次元空間を複素射影 n 次元空間にし、３点を塩山 (Selberg) 配置と呼ばれる超平面配置にするというものです。その他にも上の黒写像を楕円曲線の周期と思い、楕円曲線を、Abel 曲面にして見るとか、計算 (何でも計算できてしまう意、K3 と略記することもある) 曲面にして見るとか様々な高次元化が考えられています。

しかし、昔から私はこの黒写像は、間違いではないが、どうもおかしいと思ってました。超幾何方程式の測多価群は $GL_2(\mathbf{C})$ の部分群です。そういう群が自然に働くのは黒写像の的空間の $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ でなく、実又曲 3-空間 $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$ です。黒写像の的を $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$ に出来ないかと長年考えておりましたが、実は簡単なことでした。写像

$$X\ni x\longmapsto H(x)=U(x)\,{}^t\overline{U}(x)\in \mathrm{Her}^+(2),\quad U=\begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}$$

と自然な射影 $\mathrm{Her}^+(2) \to \mathbf{H}^3_{\mathbf{R}} := \mathrm{Her}^+(2)/\mathbf{R}^+$ との合成を又曲黒写像（略して又黒写像、英訳：hyperbolic Schwarz map、書いて $hSch$）と言います、$\mathrm{Her}^+(2)$ は正値 Hermite 2-行列全体、$\mathbf{R}^+$ は正の実数全体のなす乗法群。

ここで u, v は超幾何方程式そのものの解でなく、その SL 化 (未知関数に x と $1-x$ の適当な冪を掛けて、u' の係数を 0 にし、

$$u'' - q(x)u = 0, \quad q = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1-\mu_0^2}{x^2} + \frac{1-\mu_1^2}{(1-x)^2} + \frac{1+\mu_\infty^2-\mu_0^2-\mu_1^2}{x(1-x)}\right\},$$

$(\mu_0 = 1-c, \mu_1 = c-a-b, \mu_\infty = a-b)$ としたものの解とすると色々いいことがあります。細かいことのようだけど、こうしておくと、又黒の像に特異点はあっても、そこで法線が定義される。又黒の像の一点 $hSch(x)$ から、一方の法線方向に、測地線を延ばせば理想境界 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ にぶつかり、その点は黒の像 $Sch(x)$ を回復し、他方の法線方向に、測地線を延ばせば理想境界 $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ にぶつかり、その点は裏黒（英訳：derived Schwarz）写像

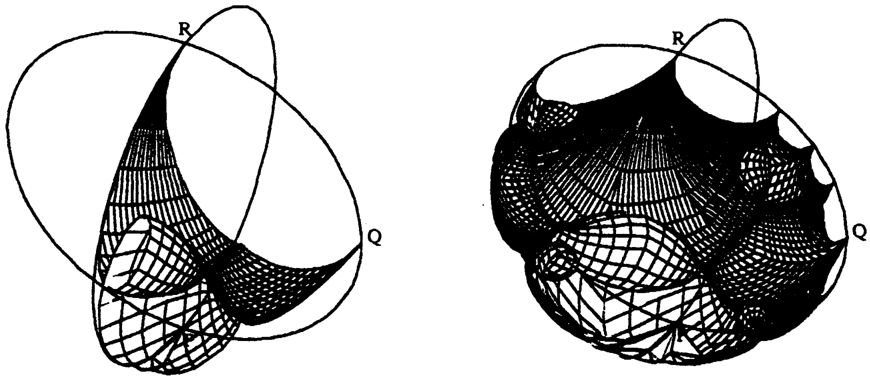
$$dSch : X \ni x \longmapsto u'(x) : v'(x) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$$

の像 $dSch(x)$ となる（[SYY1], [SYY2]）。

又黒写像は、方程式の特異点以外ににも、曲線 $|q(x)| = 1$ の像に沿って特異となる。その曲線上殆どの点で尖端（(2,3)-形尖点と区間の直積）となるので、これを尖端曲線という。所々でより悪い特異点となる。例えば $(a, b, c) = (1/2, 1/2, 1)$ の時は X の上半分と下半分に一点づつ燕尾点がある（図 1 参照, [SYY1]）。

そうそう、もう 1 つおかしいと昔から思っていたことがあります。上半平面 $\mathbf{H}$ に不連続群が働いているとき、群不変な $\mathbf{H}$ 上の関数や形式（保型関数・形式）に関する研究は古来山ほどあります。上半平面は実 2 次元又曲空間ですから、その実高次元化の第一歩として、実 3 次元又曲空間 $\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}$ に働く不連続群不変な関数や形式に関する研究がある筈と思って訊いて回ったのですが、全く無いと言われ本当に驚きました。2 次元の時でも、保型関数・形式が具体的に書き下せてよく分かる不連続群は限られていますので、3 次元の場合も、非自明な中で一番簡単なものの 1 つで実験して見ました。

L を 3 次元球面 S^3 内の白頭絡 (Whitehead link, 図 2) とすると、その補集



X の上半分の像　　上下合わせて１０半平面の像

図 1: $(a, b, c) = (1/2, 1/2, 1/2)$ のときの又黒写像の像

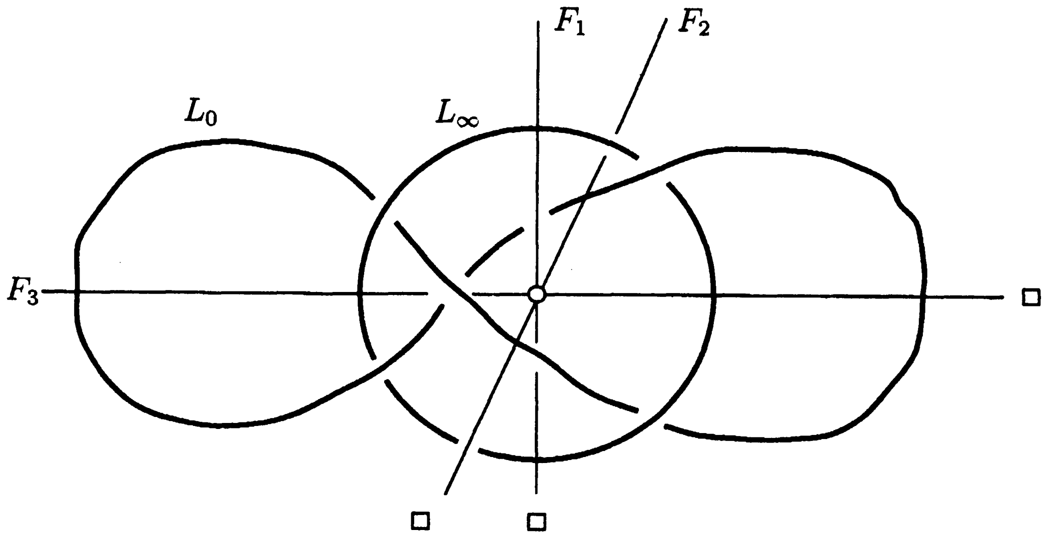


図 2: 白頭絡と３本の対称軸

合には又曲構造が入ることはよく知られている。より詳しく、白頭絡群 W を

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \quad と \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成される群とすると、位相同型

$$\Lambda : \mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}/W \xrightarrow{\cong} S^3 - L$$

が存在するということまで分かっています。２次元より３次元は難しいとは言っても、位相同型だけでは悲しい。松本圭司氏がこの写像を保形 (手多) 関数を使って書いてしまうことに成功した。([MY], [MNY])

さて、2行2列の複素行列で生成される群は、可約な極詰まらない物を除いて、ある超幾何方程式の測多価群として実現できることはよく知られている。そこで、私は遊び心を起こしまして

白頭絡群を測多価群に持つ超幾何微分方程式の叉黒写像を手多関数で3次元球面に落とし、白頭絡にどう纏わりつくか見たい

と思いました。趣味の数学ですね、私の酔狂な暇つぶしに付き合ってくれ、計算を実行（機械に対する命令書作成の意）したのは佐々木武さんです。今のところ、尖端曲線の像（とその極近く）しか見えてませんが、それだけでも十分面白いと思っています。

先ず径数を

$$a = \frac{\arccos(\frac{1+i}{2})}{2\pi}, \quad b = 1 - a, \quad c = 1$$

としますと、超幾何方程式 $E(a,b,c)$ の2独立解

$$u = iF(a,b,1;x), \quad v = (e^{\pi ia} - e^{-\pi ia})F(a,b,1;1-x)$$

を $x = 1/2$ を基点として、0 と 1 を正の向きに一周して戻ってくると、丁度先に挙げた白頭絡群の生成元 g_0 と g_1 の変化を受けます。ここで $F(a,b,c;x)$ は超幾何級数

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)(1,n)} x^n, \quad (a,n) = a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

以後この径数を使います。$|q| = 1$ で定義される x-平面内の曲線は 0 と 1 を囲む瓢箪のような滑らかな単純閉曲線になり、その上の上下の2点で燕尾となります。X から実半直線 $(-\infty, 0]$ と $[1, +\infty)$ の 1/10-近傍を取り除いた X° を三つに分けて

$$\begin{aligned} X_+^\circ &= \{x \in X^\circ \mid \Im x \geq 1/10\}, \\ X_0^\circ &= \{x \in X^\circ \mid 1/10 \leq \Im x \leq 1/10\}, \\ X_-^\circ &= \{x \in X^\circ \mid \Im x \leq 1/10\} \end{aligned}$$

の叉黒による像は図3, 4のようになります。２つの燕尾と尖端曲線が見えますか。黒鏡像原理を無限に繰り返すと、こういう図形が叉曲空間に満ちる訳ですが、白頭絡群が不連続に働いているので、内点に集積したりしない。

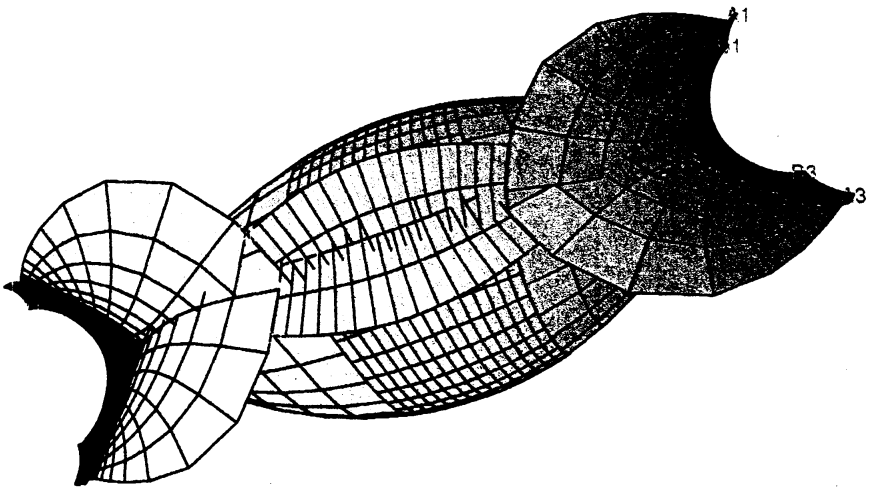


図 3: 又黒による X° の像

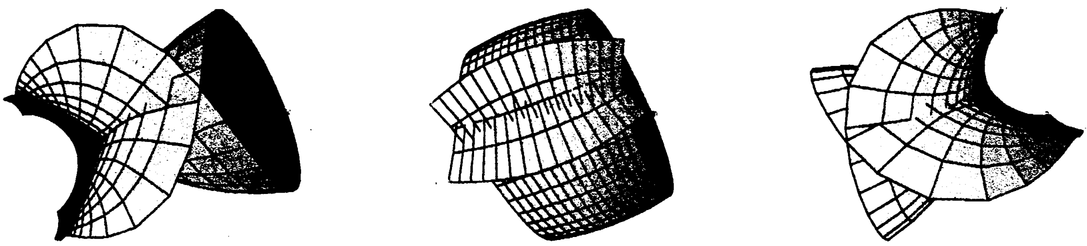


図 4: 又黒による $X^\circ_+, X^\circ_0, X^\circ_-$ の像

一方、手多関数を使ったΛの実現（$\mathbf{H}^3_{\mathbf{R}}/W$ の埋め込み）は余次元が高いので、白頭絡を対称性(図2 に於いて軸 F_1, F_2, F_3 の周りのπ回転からなる$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ に同型な群K）で割った帯折[1]S^3/K を使う（位相的には３次元球面)。図５に於いて丸印と矩形印（無限遠点）を結ぶ３つの線は２位の帯折としての特異点集合。S^3/K 内に図６ののような球面$S := a \cup b \cup c \cup d$を考える。この球面上には紐$L_0, L_1$が乗っている、特異曲線$F_1$は全て乗っているが、$F_2$ と F_3 は無限遠点と L_0 を結ぶ部分は乗っていない。

さて、我々のS^3/K 内の尖端曲線をこの球面Sの近くまで滑らかに変形すると、図７のようになる。実線から点線になるところで、球面Sを貫いている。尖点が二つ見えるがそれが燕尾点である。

[1]orbifold の訳、余次元 1 で特異の場合は帯を折ったように見える

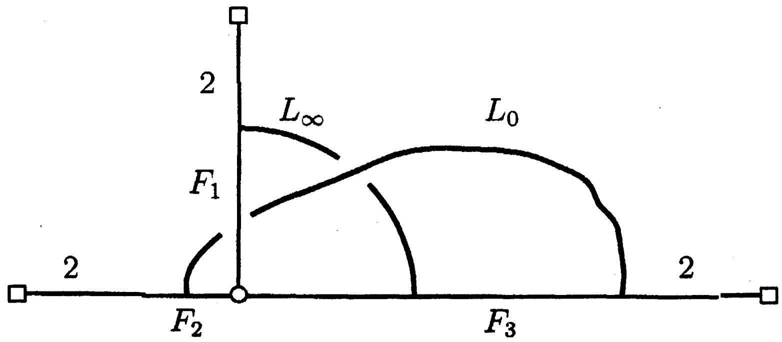


図 5: 帯折 K

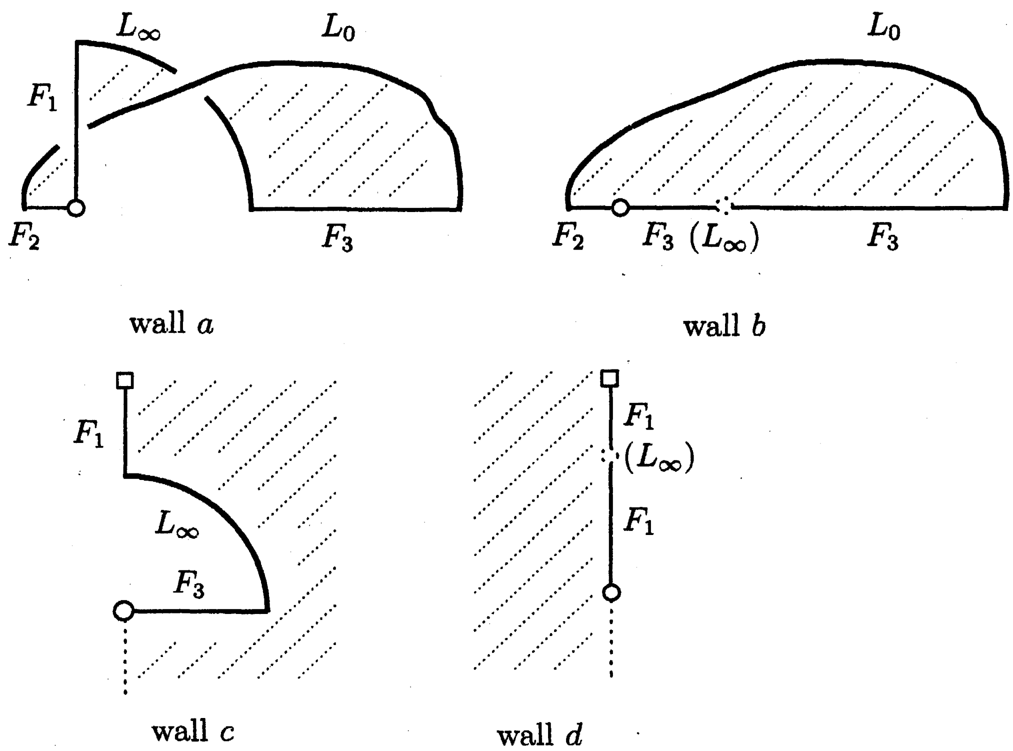


図 6: S^3/K 内の 2 次元球面 $S := a \cup b \cup c \cup d$

参考文献

[MNY] K. Matsumoto, H. Nishi and M. Yoshida, *Automorphic functions for the Whiteheade-link-complement group*, Osaka J Math. 43(2006), 839–876.

[MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, *Invariants for some real hyperbolic groups*, *Internat. J. of Math.*, **13** (2002), 415–443.

[SYY1] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric equation*, preprint, math.CA/0609196.

[SYY2] T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *Derived Schwarz map of the hypergeometric equation and a parallel family of flat fronts*, to appear in Internat. *J. of Math.*

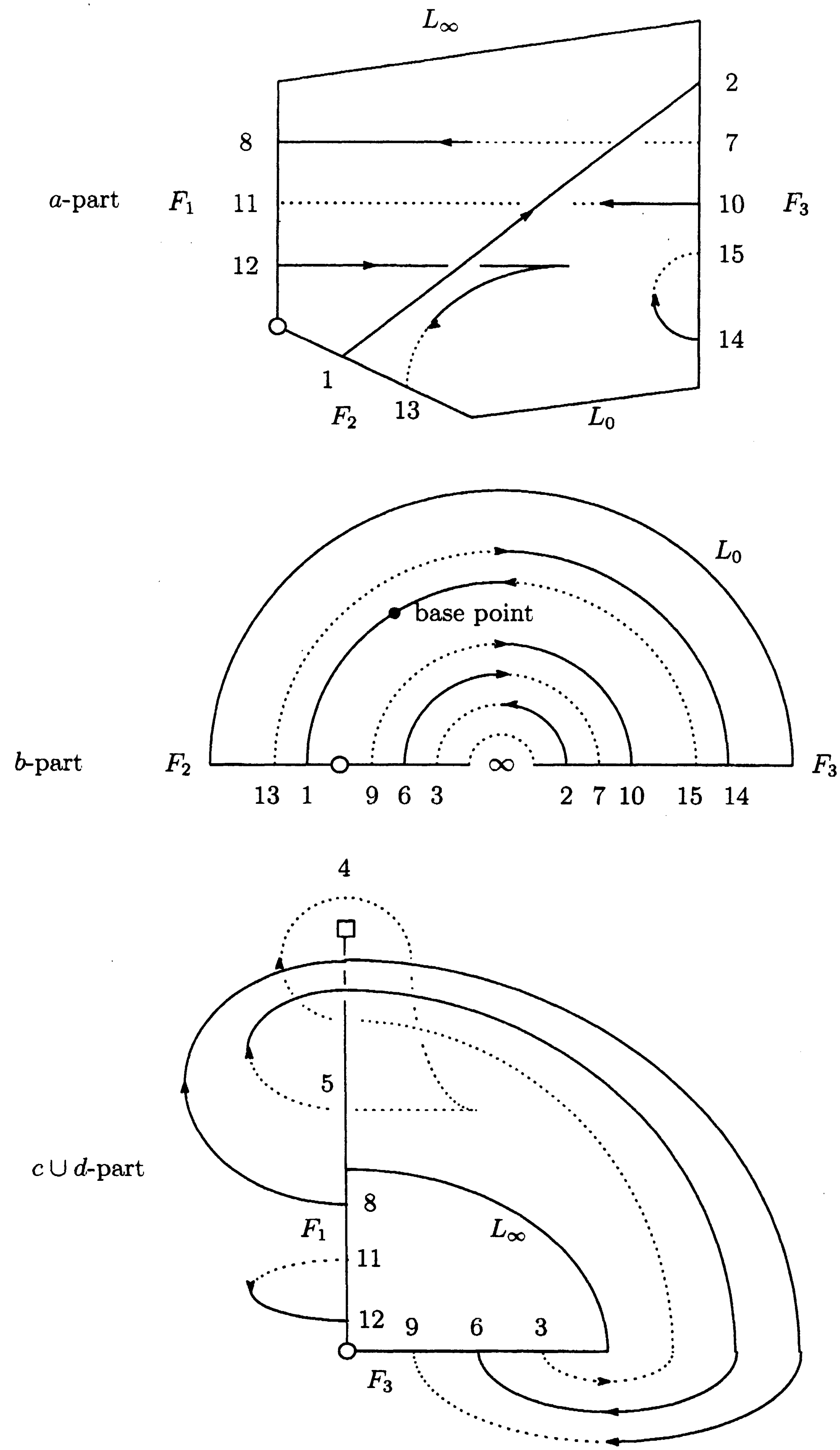


図 7: S^3/K 内の尖端曲線を球面 $S = a \cup b \cup c \cup d$ の近くまで変形して持ってきた