

# 多重ゼータ値と超幾何関数

近畿大・理工 青木貴史 (AOKI Takashi)

多重ゼータ値と線型常微分方程式の繋がり最近十数年ほどの間に、さまざまな角度から研究され数論と微分方程式論の双方に刺激を与えている。本稿では [1], [2], [11] の要約を中心に手短な入門的解説を試みる。

## 1 多重ゼータ値

多重ゼータ値は Riemann ゼータ値 (ゼータ関数の整数  $m = 2, 3, \dots$  での値)

$$\zeta(m) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^m}$$

の一般化であり、起源は Euler や Goldbach に遡る。Euler [5] の冒頭には Goldbach の名と共に級数

$$1 + \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{4^m} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) + \text{etc.}$$

が記載されている。これは級数  $\sum_{p \geq q \geq 1} \frac{1}{p^m q^n}$  に他ならず、この値を  $\zeta^*(m, n)$  で表すと

$$\begin{aligned} \zeta(m)\zeta(n) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^m} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} \\ &= \sum_{p \geq q \geq 1} \frac{1}{p^m q^n} + \sum_{q \geq p \geq 1} \frac{1}{p^m q^n} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n+m}} \\ &= \zeta^*(m, n) + \zeta^*(n, m) - \zeta(m+n) \end{aligned}$$

という関係式が成り立つことから、 $\zeta^*(m, n)$  が自然な量であると納得できる。これが多重ゼータ値の一つの例である。一方、類似の変形

$$\zeta(m)\zeta(n) = \sum_{p > q > 0} \frac{1}{p^m q^n} + \sum_{q > p > 0} \frac{1}{p^m q^n} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n+m}}$$

から、 $\sum_{p > q > 0} \frac{1}{p^m q^n} = \zeta(m, n)$  とおくことにより、これは

$$\zeta(m)\zeta(n) = \zeta(m, n) + \zeta(n, m) + \zeta(m+n)$$

と書くことができる。従って、 $\zeta(m, n)$  も同程度に自然なものと考えられ、両者は関係式

$$(1) \quad \zeta^*(m, n) = \zeta(m, n) + \zeta(m + n)$$

を満たす。ここ十数年の間に盛んになった多重ゼータ値の研究においては $\zeta(m, n)$ 、あるいはその一般化である

$$(2) \quad \zeta(\mathbf{k}) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

をもって多重ゼータ値と呼ぶ場合がほとんどであるが、Euler の取り扱った $\zeta^*(m, n)$  の一般化である

$$(3) \quad \zeta^*(\mathbf{k}) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

を扱うことにも意味があるというのが [1], [2] の立場である。ただし、多重指数を $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  とおいた。ここで $k_i \in \mathbb{N}$ であるが、上の和が収束するために $k_1 > 1$ を仮定する。多重指数 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  に対し

$$\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad \text{dep}(\mathbf{k}) = n, \quad \text{ht}(\mathbf{k}) = \#\{i \mid k_i > 1\}$$

とおき、それぞれ $\mathbf{k}$ の(あるいは $\zeta(\mathbf{k})$ ,  $\zeta^*(\mathbf{k})$ の)重さ (weight), 深さ (depth), 高さ (height) という [1], [2], [11]。本稿では $\zeta(\mathbf{k})$ ,  $\zeta^*(\mathbf{k})$ ともに多重ゼータ値と呼ぶが、区別する場合は前者を「等号無し多重ゼータ値」、後者を「等号付き多重ゼータ値」という。数論的な興味の一つは重さを固定した多重ゼータ値全体の張る $\mathbb{Q}$ 上の線型空間あるいは $\mathbb{Q}$ 代数の次元や生成元の個数がどうなるかであり、それらを調べるために多重ゼータ値間に成り立つ $\mathbb{Q}$ 係数の関係式が研究されている。重さを固定した $\zeta(\mathbf{k})$ と $\zeta^*(\mathbf{k})$ それぞれが張る $\mathbb{Q}$ 線型空間は同じであることは(1)からも想像が付くように容易に証明できる。にも拘わらず $\zeta(\mathbf{k})$ だけでなく $\zeta^*(\mathbf{k})$ を考える理由は[2]で与えられたように $\zeta^*$ を用いることにより初めて簡潔に書ける関係式族の存在にある。多重ゼータ値全般に関しては優れた解説が[3]で与えられているので参照されたい。

## 2 超幾何関数との関係

等号無し多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ の重さ, 深さ, 高さを固定した和の母関数がRiemannゼータ値の有理係数多項式で表されることが[11]で示されている。その証明において超幾何関数とその特殊値が巧妙に活用された。ここではその要点を紹介する。

次の微分方程式を考える。

$$(4) \quad t(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + \{(1-x) - (1-x+y)t\} \frac{dw}{dt} + (xy - z^2)w = 1.$$

ただし,  $x, y, z$  はパラメータである ([11] では  $z^2$  を  $z$  と書いている). 齊次方程式は超幾何微分方程式であり, 齊次方程式の正則解として超幾何関数  $F(\alpha - x, \beta - x, 1 - x; t)$  が取れることは明らかである. ここで,  $\alpha, \beta$  は  $\alpha + \beta = x + y, \alpha\beta = z^2$  により定める. 非齊次項が定数であり 0 階項の係数が変数  $t$  に依存しないので (4) の特殊解として  $\frac{1}{xy - z^2}$  が取れる. 従って,  $t = 0$  で消える (4) の正則解は

$$(5) \quad w = \frac{1}{xy - z^2} (1 - F(\alpha - x, \beta - x, 1 - x; t))$$

となる. この関数の  $t \rightarrow 1 - 0$  での極限值は (パラメータに対する適当な仮定の下に), いわゆる Gauss の公式により

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} w(t) = \frac{1}{xy - z^2} \left( 1 - \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \right)$$

であることがわかる. ここまでは微分方程式論の簡単な演習問題であるが, この値と多重ゼータ値との結びつきは母関数を通じて与えられる. 重さ  $k$ , 深さ  $n$ , 高さ  $s$  を持つ多重指数  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) (k_1 > 1)$  全体の集合を  $I_0(k, n, s)$  で表し

$$(7) \quad G_0(k, n, s) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n, s)} \zeta(\mathbf{k})$$

とおく. 併せて多重ポリログ関数

$$(8) \quad L_{\mathbf{k}}(t) = L_{k_1, \dots, k_n}(t) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

を用いて関数  $G_0(k, n, s; t)$  を

$$(9) \quad G_0(k, n, s; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n, s)} L_{\mathbf{k}}(t)$$

により定める.  $|t| < 1$  ならば多重ポリログ関数を与える無限級数は広義一様に絶対収束し,  $t = 1$  でも収束する. 明らかに  $G_0(k, n, s; 1) = G_0(k, n, s)$  である. 不定元  $x, y, z$  を用いて  $G_0(k, n, s; t)$  の母関数  $\Phi_0(t)$  を

$$(10) \quad \Phi_0(t) = \Phi_0(x, y, z; t) = \sum_{k, n, s} G_0(k, n, s; t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

により定義する. 多重ポリログ関数の間に成り立つ微分関係式を用いると  $w = \Phi_0$  が (4) の正則解であることが判る. 明らかに  $\Phi_0(0) = 0$  であり, このような正則解は一意的ゆえ

$$(11) \quad \Phi_0(x, y, z; t) = \frac{1}{xy - z^2} (1 - F(\alpha - x, \beta - x, 1 - x; t))$$

となることが示される。ここで  $t \rightarrow 1 - 0$  とすると (6) より

$$(12) \quad \sum_{k,n,s} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k}) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2} = \frac{1}{xy - z^2} \left( 1 - \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \right)$$

を得る。ここで関係式  $\Gamma(1-u) = \exp\left(\gamma u + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} u^n\right)$  を用いると

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{k,n,s} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k}) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2} \\ = \frac{1}{xy - z^2} \left( 1 - \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (x^n + y^n - \alpha^n - \beta^n)\right) \right) \end{aligned}$$

という表示が得られた。 $\alpha^n + \beta^n$  は定義から  $x, y, z$  の整数係数  $n$  次斉次多項式となるので、右辺を展開して  $x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$  の係数を比較すれば、重さ、深さ、高さを固定した多重ゼータ値の和

$$(14) \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k})$$

が Riemann ゼータ値の有理係数多項式で書けることがわかる。これが [11] の主定理である。

### 3 等号付き多重ゼータ値の場合

第1節で述べたように多重ゼータ値には2通りの定義があり、第2節の議論は等号無し多重ゼータ値に関するものであった。同様の議論が等号付き多重ゼータ値についても考えられる。今のところ完全な対応物は得られていないが、部分的には類似の結果が得られる。類似とはいっても、等号付きと等号無しとでは表出する関係式の様相が異なる点が興味深い。

多重指数の集合  $I_0(k, n, s)$  は前節と同じ意味で使う。(7), (8), (9) にそれぞれ対応するものとして和

$$(15) \quad X_0(k, n, s) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta^*(\mathbf{k})$$

および等号付き多重ポリログ関数

$$(16) \quad L_{\mathbf{k}}^*(t) = L_{k_1, \dots, k_n}^*(t) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}},$$

さらに和

$$(17) \quad X_0(k, n, s; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n, s)} L_{\mathbf{k}}^*(t)$$

を考える. (10) と同様に  $X_0(k, n, s; t)$  の母関数

$$(18) \quad \Phi_0^*(t) = \Phi_0^*(x, y, z; t) = \sum_{k, n, s} X_0(k, n, s; t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

を考える.  $L_{\mathbf{k}}^*(t)$  に対する微分関係式は  $L_{\mathbf{k}}(t)$  のものとは若干異なるので,  $\Phi_0^*(t)$  が満たす微分方程式も (4) とは違うものが現れる.

**命題 1.** ([1], Theorem 2.1)  $w = \Phi_0^*(t)$  は次の微分方程式の原点における唯一の解析的な解である:

$$(19) \quad t^2(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + t\{(1-t)(1-x) - y\} \frac{dw}{dt} + (xy - z^2)w = t.$$

従って, この方程式を解いて, その解の  $t=1$  における特殊値が計算できれば [11] と類似の結果が  $X_0(k, n, s)$  についても得られるのではないかと考えるのは自然なことである. しかし, 現在の所,  $\Phi_0^*(1)$  を既知の量で表示可能なのはパラメータが特別な関係を満たす場合のみである.

### I. $xy = z^2$ のとき

この場合, (19) は

$$(20) \quad t^2(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + t\{(1-t)(1-x) - y\} \frac{dw}{dt} = t$$

となり簡単に求積可能である.  $t=1$  における値も計算できる:

$$(21) \quad \Phi_0^*|_{z^2=xy}(1) = \frac{1}{x} \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l-x-y} - \frac{1}{l-y} \right).$$

右辺を  $x, y$  の冪級数に展開して係数比較をすると

$$(22) \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n, *)} \zeta^*(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{n-1} \zeta(k)$$

が得られる. ただし,  $I_0(k, n, *) = \bigcup I_0(k, n, s)$  とおいた. これは等号付き多重ゼータ値の「和公式」と呼ばれるものである.

## II. $x = y$ のとき

このとき, (19) は

$$(23) \quad t^2(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + t \{(1-t)(1-x) - x\} \frac{dw}{dt} + (x^2 - z^2)w = t$$

の形となる. 冪級数解  $w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$  を直接求めて  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が計算できる:

$$(24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left( \frac{1}{x+z-l} - \frac{1}{x-z-l} \right).$$

右辺を展開して係数比較すれば

$$(25) \quad \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, *, s)} \zeta^*(\mathbf{k}) = 2 \binom{k-1}{2s-1} (1-2^{1-k}) \zeta(k)$$

という関係式が得られる ([2]). ただし,  $I_0(k, *, s) = \bigcup_n I_0(k, n, s)$  とおいた.

## III. $y = 0$ のとき

(19) において  $y = 0$  とすると微分方程式

$$(26) \quad t^2(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + t \{(1-t)(1-x)\} \frac{dw}{dt} - z^2 w = t$$

が得られる. 斉次方程式の解の基本系は超幾何関数を用いて書くことができ, いわゆる定数変化法により (26) の  $t = 0$  における正則解の積分表示を求められる. その積分表示から  $t = 1$  における  $\Phi_0^*|_{y=0}$  の値が次の形に計算できる:

**定理 2.** ([1], Theorem 4.2)

$$(27) \quad \sum_{k,n} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,n)} \zeta^*(\mathbf{k}) x^{k-2n} z^{2n-2} = -\frac{1}{z^2} \left( 1 - \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} (\alpha^n + \beta^n - x^n) \right) \right).$$

ただし,  $\alpha, \beta$  は

$$(28) \quad \alpha, \beta = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4z^2}}{2}$$

により定める.

(13) の場合と同様に  $\alpha^n + \beta^n - x^n$  は  $x, z$  の整数係数  $n$  次斉次多項式であり, (27) の右辺を展開して係数比較すれば高さ $\times$ 深さが一致する等号付き多重ゼータ値の和が Riemann ゼータ値の有理係数多項式で書けることがわかる.

一般の場合に  $\Phi_0^*(1)$  を計算するのが困難である理由は、それが一般化超幾何関数  ${}_3F_2$  の特殊値に関係するからである。(19)の両辺に左から  $t \frac{d}{dt} - 1$  を作用させれば  $\Phi_0^*(t)$  が一般化超幾何関数で書けることが判り、

$$(29) \quad \Phi_0^*(1) = \frac{t}{(1-x)(1-y) - z^2} {}_3F_2(1, 1, 1-x; 2-\alpha, 2-\beta; 1)$$

であることは容易に確かめられる。ただし、 $\alpha, \beta$  は

$$\alpha, \beta = \frac{x+y \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4z^2}}{2}.$$

により定めた。一方、IIIにおける議論と同様に定数変化法で(19)を解き、多少の計算をすると

$$(30) \quad \Phi_0^*(1) = \frac{1}{(1-y)(1-\beta)} {}_3F_2(1-\beta, 1-\beta+x, 1; 2-y, 2-\beta; 1)$$

という表示も得られる。従って

**定理 3.**  ${}_3F_2$  の特殊値に関して次の関係式を得る:

$$(31) \quad \frac{1}{(1-x)(1-y) - z^2} {}_3F_2(1, 1, 1-x; 2-\alpha, 2-\beta; 1) \\ = \frac{1}{(1-y)(1-\beta)} {}_3F_2(1-\beta, 1-\beta+x, 1; 2-y, 2-\beta; 1).$$

## 参考文献

- [1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, Proceedings of the American Mathematical Society, **136** (2008), 387–395.
- [2] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric function, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **41** (2005), 329–337.
- [3] T. Arakawa and M. Kaneko (荒川恒男, 金子昌信), 多重ゼータ値および多重L値ノート, [www.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/mzv-lecture.pdf](http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/mzv-lecture.pdf)
- [4] A. Erdélyi et al. (eds.), Higher Transcendental Functions, vol. 1, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, 1985.

- [5] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol* **20** (1775), 140–186, reprinted in *Opera Omnia ser. I*, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.
- [6] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332–347.
- [7] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich’s integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193–206.
- [8] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. *J. Number Theory*, **74** (1999), 39–43.
- [9] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values. In *Zeta Functions, Topology and Quantum Physics* (T. Aoki, S. Kanemitsu, M. Nakahara and Y. Ohno eds.), *Developments in Mathematics* **14**, Springer, 2005, pp. 131–144.
- [10] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, *Acta Arithmetica* **123** (2006), 289–295.
- [11] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483–487.