数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 65-72



# モノドロミー保存変形と4次元パンルヴェ型方程式

坂井秀隆
東京大学大学院数理科学研究科

## 1 動機

高階のパンルヴェ型方程式の研究をよく見るようになって，その正体がよくわからず得心がいかない状態だったが，小池さんの結果 ([5]) で，$P_{\mathrm{II}}$ 階層，$P_{\mathrm{IV}}$ 階層と呼ばれているものが退化ガルニエ系の独立変数の制限になっていることが分かった．これらの常微分方程式系を，ガルニエ系のような多変数系としてみるべきだというのは，相空間が既に対称性の情報を持っていて，本来持っているべき変形のすべてを見ているのが多独立変数系となっていて，常微分のほうはその特別な方向への制限となっているからで，逆に言うとそのような特別な方向を特徴づける必要も感じる．

そのように考えると，野海・山田系や笹野系などよく調べられている高階パンルヴェ型方程式系が気になってくる．わたしは，これらも（退化）ガルニエ系の制限としてみることができるのではないかと思っていたが（この可能性が否定されたわけではない），むしろより一般のシュレージンガー系の枠組みを整理して，そこにいろいろな可積分系を位置づけるのがよいと考えはじめた．これらのパンルヴェ型方程式は，そのほとんどがラックス表示を持っているので，何らかの意味で神保・三輪・上野の一般化シュレージンガー系に含まれていることはあらかじめ保証されているからである．

シュレージンガー系は

$$\frac{d}{dx}Y = \left(\sum_{1=1}^{n} \frac{A_i}{x-u_i}\right) Y$$

の形のフックス型方程式（シュレージンガー正規型と呼ぶ）の変形理論から導かれ，具体的には，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_j} A_i &= \frac{[A_j, A_i]}{u_j - u_i}, \qquad (j \neq i), \\ \frac{\partial}{\partial u_i} A_i &= -\sum_{j\neq i} \frac{[A_j, A_i]}{u_j - u_i} \end{aligned}$$

の形にかける．これは，従属変数 $(A_1, \ldots, A_n) \in M_m(\mathbb{C})$ に関する方程式で，一斉相似変換に関して不変で，さらに，各 $A_i$ の固有値は保存量となっている．ガルニエ系は，この方程式系の行列サイズ $m$ が 2 の場合に対応している．

本来はやはり，非線形の微分方程式の分類は，代数多様体のそれに帰着されるべきであると思うのだが，高次元の場合は難しいように思われる．代数多様体そのものだけではなく，その径数づけ（モ

ジュライ）の詳細まで必要なのでなおさらである．笹野さんが具体例をいろいろ計算しているので頑張ってほしい ([8])．それでも線型方程式の変形理論よりも代数幾何のほうがいいと言ってきた理由の一つに，非線形方程式とラックス形式の間の対応が一対一でないことがある．つまり，パンルヴェ方程式のような非線形方程式が一つあったときに，それに対応する線型方程式はサイズ $m$ を大きく取ってよければいくらでも構成できるし，もちろんラックス表示を持たないような方程式もあっていい．与えられた方程式に対してラックス表示を与える標準的方法はないので，非線形方程式を適当に持ってきたとき，それが何者かをそれで判断するのは難しい．

この問題点のうち，対応する線型方程式がいくらでも作れるというほうが，線型方程式の分類理論の進展のおかげで何とかなりそうになってきた．つまり，与えられた方程式に対しラックス形式に書くこと（あるいは書けないことを判定すること）は簡単ではないが，一つそのようなものが与えられていれば，それらがどの方程式か特定することができるというような理論が作れるということである．

ここで言っているのは，カッツの理論のことで，ミドルコンヴォリューションとアディションというふたつの操作による線型方程式の変換で，(変形のほうの）相空間の次元を固定すると，有限個の方程式に帰着されてしまうからである．次の節で，この理論を，変形理論の立場から簡単に紹介する．そのあとで，この論考の目的である，4次元のパンルヴェ型方程式の分類の試みについて，述べていきたい．

## 2 フックス型方程式の分類理論

シュレージンガー系の幾何学的描像をもっと詳しく見てみよう．

独立変数 $u=(u_1,\dots,u_n)$ は，$\mathbb{P}^1$ の $n$ 点の配置を表わしていて，$PGL$ の作用で正規化できるので，3点を零一無限大に持ってきて，$n-3$ 次元の空間をなしていると思える．これは，変形の次元がどれだけあるかを表している．

さて，従属変数の空間だが，方程式は一斉相似変換の対称性があるので，それで割ったものを考える．各行列の固有値へのマップがあって，その値を固定すると，それに対応したファイバーが力学系の相空間となる．ファイバーの部分は，固有値，つまり特性指数では決まらないところで，その座標をアクセサリーパラメーターと呼んでいる．つまりファイバー（相空間）の次元は，アクセサリーパラメーターの数に等しい．

固有値の縮退があるところでは，$G^{-1}A_iG=A_i$ となるような対称性 $G$ の空間の次元が大きくなるため，ファイバーの次元は小さくなっている．相空間を分類するためには，特異点の数 $n+1$ ($u=u_0=\infty$ も特異点）と行列のサイズ $m$ だけでなく，より詳しい固有値の縮退に関する情報が必要である．

スペクトルタイプと呼ばれる $m$ の分割の $n+1$ 個の組で，必要な情報を表そう．スペクトルタイ

ブが

$$m_1^1 m_2^1 \dots m_{l_1}^1, m_1^2 \dots m_{l_2}^2, \dots, m_1^n \dots m_{l_n}^n, m_1^0 \dots m_{l_0}^0 \qquad (\sum_{j=1}^{l_i} m_j^i = m \ \text{ for } \ 0 \le \forall i \le n)$$

のように与えられていたとき，$u = u_i$ における行列 $A_i$ の固有値の情報は $i$ 番目の分割で与えられていて，$m_j^i$ 個（$1 \le j \le l_i$）の同じ固有値があることを表していると思うわけだ．ただし，ジョルダン標準形で対角化されないような場合を考えるときは，対角化されていて固有値が同じときよりも対称性は小さくなってしまうので，これは別に考えなくてはいけない．この場合を含めて理論は作られているが，ここでは簡単のため，以後，行列 $A_i$ は対角化可能と仮定しておこう．

さて，カッツの理論の説明に入る．カッツの操作と呼ばれる線型方程式の間のふたつの変換を考える．カッツは幾何学的に述べているのだが，ここでは，デットワイラーとライターによる行列の計算のほうを与えておこう ([1])．まず，アディションのほうだが，これは $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ にたいし，

$$A = (A_1, \dots, A_n) \mapsto (A_1 + \alpha_1, \dots, A_n + \alpha_n)$$

という変換である．さらに，ミドルコンヴォリューションについては，$\lambda \in \mathbb{C}$ にたいし，まず，$A \mapsto (G_1, \dots, G_n)$ という変換を

$$G_i = \begin{pmatrix} & & & O & & & \\ A_1 & A_2 & \cdots & \cdots & A_i + \lambda 1_m & \cdots & A_n \\ & & & O & & & \end{pmatrix} < i \quad \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$$

で定義し，これをコンヴォリューションと呼ぶ．さらに，$G = (G_1, \dots, G_n)$ の不変部分空間

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ker} A_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Ker} A_n \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^{n \times m}, \quad \mathcal{L}_\lambda = \mathrm{Ker}(G_1 + \cdots + G_n)$$

を考え，$G = (G_1, \dots, G_n)$ の商空間 $\mathbb{C}^{n \times m} / \mathcal{K} + \mathcal{L}_\lambda$ への作用を $\overline{G} = (\overline{G_1}, \dots \overline{G_n})$ で表したとき，変換

$$A = (A_1, \dots, A_n) \mapsto \overline{G} = (\overline{G_1}, \dots \overline{G_n})$$

をミドルコンヴォリューションと呼ぶ．

このとき，ミドルコンヴォリューションは，一般には，行列のサイズを変えてしまうことに注意しよう．解のほうでみると，これはオイラー変換と呼んでいるような積分変換で与えられることが知られている．

さて，このような道具立てをもとに，カッツが示した重要な定理は以下のようなものである．

**定理 2.1 (N. Katz[4]).** 任意のリジッド，既約なフックス型方程式はカッツのふたつの操作を有限回繰り返して，単独1階のフックス型方程式に帰着できる．

ここでリジッドといっているのは，アクセサリーパラメーターがないということである．一階の線型方程式は求積可能であるから，既約，リジッドな方程式の解の積分表示の存在を示したことにもなっている．

われわれの興味は，アクセサリーパラメーターのある方程式のほうだ．とくに2次元の相空間を持つパンルヴェ方程式のグループに対して，その拡張として，4次元の力学系を分類する地図を描きたい．

しかしこれに対しても，重要な定理が示されている．

**定理 2.2 (大島 [7]).** アクセサリーパラメーターが4つある既約フックス型方程式は，アディションとミドルコンヴォリューションを有限回繰り返して，次の13種類のスペクトルタイプの方程式のいずれかに帰着できる；

11,11,11,11,11

21,21,111,111　31,22,22,1111　22,22,22,211

211,1111,1111　221,221,11111　32,11111,11111　222,222,2211　33,2211,111111

44,2222,22211　44,332,11111111　55,3331,22222　66,444,2222211.

いちばん最初のが，2独立変数のガルニエ系に対応していて，特異点の数が5なので，変形の次元は2で，これが独立変数の数に対応している．さらに，変形の次元が1の方程式が3つある．この合わせて4つ以外の9つの方程式には変形がない．よってガルニエ系以外に3つの方程式を見てやれば，すべての場合が尽きている．

述べていなかったが，もちろん，このような議論ができるのは次のような定理があるからだ．

**定理 2.3 (原岡-Filipuk[2]).** 変形方程式は，カッツの操作で不変である．

ちなみに，アクセサリーパラメーターが2つの場合も，同様の結果が得られていて（Kostov[6]），次の4つに帰着される；

11,11,11,11

111,111,111　22,1111,1111　33,222,111111.

変形の次元があるのは最初ののみで，これは第6パンルヴェ方程式に対応している．第6方程式の退化のみで尽きていることと矛盾しない．

## 3　アクセサリーパラメーターの空間

これでわれわれの目的は，

21,21,111,111　31,22,22,1111　22,22,22,211

という３つのスペクトルタイプにたいして，その変形方程式（シュレージンガー系）を調べることに絞られたわけだ．それで，方程式系の相空間，つまりアクセサリーパラメーターの空間について，一般論として知られていることをまとめてみよう．

## 3.1 次元

まずアクセサリーパラメーターの数だが，次の公式で与えられる：

$$(n-1)m^2 - \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{l_i}(m_j^i)^2\right) + 2.$$

だが，もう少し行列をいじって具体的にこれを確認してみよう．

まず各特異点（無限遠点以外）での行列を考えるのだが，スペクトルタイプが $m_1^i \ldots m_{l_i}^i$ となるような行列は，各固有値を固定すると，$m^2 - \sum_{j=1}^{l_i}(m_j^i)^2$ 次元だけ存在する．各 $m_j^i$ がすべて１のときは，固有値の情報の分だけ，行列の次元から引いているにすぎない．

実際に座標を与えることを，簡単な例で見てみよう．われわれの目的のためには,（ア）$m-1\cdot 1$ という場合,（イ）$m-2\cdot 2$,（ウ）$m-2\cdot 1\cdot 1$ という場合を見ておけば十分だろう．

（ア）の場合，固有値を $\theta_1, \theta_2$ とおくと，行列は

$$A_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}(c_1, \ldots, c_m) + \theta_1 \cdot 1_m, \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j c_j = \theta_2 - \theta_1$$

と書ける．ここで，$c \in \mathbb{C}^\times (= GL_1(\mathbb{C}))$ にたいして，$b_j, c_j$ を $cb_j, c^{-1}c_j$ に取り換えてもよい．ジェネリックな場合（$b_1 \neq 0$ のとき）には，たとえば，$b_1 = 1$ とおける．導入した変数が $2m$ で，関係式が１つ対称性が１次元あって，次元は $2m-2$ である．あとで変形方程式を考えるときには，アディションで $\theta_1 = 0$ としておく．

あとのふたつの場合，行列は

$$A_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & \cdots & c_{2m} \end{pmatrix} + \theta_1 \cdot 1_m = BC + \theta_1 \cdot 1_m$$

と書け，$GL_2(\mathbb{C})$ の対称性を持ち，関係式はそれぞれ,（イ）$C \cdot B = (\theta_2 - \theta_1)1_2$,（ウ）固有値 $\theta_2, \theta_3$ を決めるためのふたつの関係式となる．次元は,（イ）$4m-4-4 = 4m-8$,（ウ）$4m-4-2 = 4m-6$ となる．

次に一斉相似変換を考えてやらなければならない．普通，シュレージンガー系を考えるときは無限遠点での係数

$$A_\infty = A_0 = -\sum_{i=0}^{n} A_i$$

を対角化して考える．無限遠でのスペクトルタイプに合わせて $A_0 = \mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_{l_0})$ とできるので，$A_i$ の和と比べて，$m^2$ 個の関係式が出る．ただし，この関係式のうちトレースの部分は固有値のみの関係式で，アクセサリーパラメーターの制限にはならない．フックスの関係式と呼ばれる．

さらに，$A_0$ と可換な行列の対称性が残っているので（よくこの分をゲージと言ったりしている），結局合わせて，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(m^2 - \sum_{j=1}^{l_i}(m_j^i)^2\right) - (m^2-1) - (\sum_{j=1}^{l_0}(m_j^0)^2 - 1) = (n-1)m^2 - \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{l_i}(m_j^i)^2\right) + 2$$

がアクセサリーパラメーターの数となる．

### 3.2 ポアソン構造

行列の組の空間 $M_m(\mathbb{C})^{\oplus n}$ の上には，コスタン・キリロフ構造と呼ばれるポアソン構造が入ることが知られている．これは，$M_m(\mathbb{C})^{\oplus n}$ の上の関数の組にたいして，次のようにポアソン括弧を定めることで導入される：

$$\{(A_p)_{i,j}, (A_q)_{k,l}\} = \delta_{p,q}(\delta_{i,l}(A_p)_{k,j} - \delta_{k,j}(A_p)_{i,l}).$$

このようにポアソン括弧を定義すると，シュレージンガー系はハミルトニアン

$$H_k = \sum_{l\neq k}\frac{\mathrm{Tr}(A_k A_l)}{u_k - u_l} \tag{3.1}$$

を使って，

$$\frac{\partial}{\partial u_k}A_l = \{A_l, H_k\}$$

のように書き換えることができる．これは，計算してみればすぐに確認できるだろう．

### 3.3 正準座標

上で与えたハミルトニアンにたいして，次元に対応した数だけの正準座標がとれれば，それで方程式が与えられるのだが，これが難しい．そこで，変数を増やしてやって，より次元の高い空間での力学系と考えれば，実は，うまく正準座標をとれることが知られている．(神保・三輪・毛利・佐藤 [3])

これはアクセサリーパラメーターの数を見たときに構成した座標で，

$$A_i = B^i \cdot C^i, \qquad B^i = (b_{kl}^i)_{k,l} \in M_{m,\mathrm{rank}A_i}(\mathbb{C}), \quad C^i = (c_{kl}^i)_{k,l} \in M_{\mathrm{rank}A_i,m}(\mathbb{C})$$

とおく．組 $(B^1, C^1, B^2, C^2, \ldots, B^n, C^n)$ の空間で，ハミルトニアンをとしたとき，$b_{kl}^i, c_{kl}^i$ を正準座標とした正準方程式の解を考えると，それから構成した $A = (A_1, \ldots, A_n)$ はシュレージンガー系の解になっている．このときのシンプレクティック形式は

$$\omega = \mathrm{Tr}(dB \wedge dC)$$

と書ける.

## 4　22,22,22,211 の変形方程式

一般論で，前節の内容まではわかるのだが，そこからの計算が難しい．対称性を考慮して，次元を本来の部分まで小さくするために，リダクションを考えなくてはならない．もともと方程式を特定することができなくてはしょうがないのだから，少なくとも次元が同じだけの変数で閉じた形で書いておきたい．

ここで紹介できるのは，3つのうちのひとつだけなのだが，これはうまく座標がとれて，多項式ハミルトニアンの正準方程式で表すことができた．まず，特異点の位置を $u = (0, 1, t, \infty)$ と正規化し，$t$ を独立変数と思う．スペクトルタイプ 22, 22, 22, 211 に対応する固有値を，

$$0, \theta_0; 0, \theta_1; 0, \theta_t; \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \qquad 2\theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_t + 2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0 \text{ (フックスの関係式)}$$

とする．これが方程式のパラメーターとなる．ハミルトニアンは次のように書ける：

$$\begin{aligned} t(t-1)H &= \frac{t(t-1)}{2} H_{\mathrm{VI}}\begin{pmatrix} -2\theta_0, -2\theta_1, -2\theta_t \\ -2\kappa_1, 2(\theta+\kappa_1) \end{pmatrix}; q_1, p_1\Big) - (1-2q_1)(q_2^2p_2^2 + (q_2p_2 - \theta - \kappa_1 - \kappa_2)^2) \\ &\quad -2(q_1(q_1-1) - q_2)(q_1 - t)p_2(q_2p_2 - \theta - \kappa_2 - \kappa_2) - \frac{1}{2}(\theta + (3q_1 - t - 1)p_1)p_1q_2 \\ &\quad -(2q_2p_2 - \theta - \kappa_1 - \kappa_2)\{(t+1)\theta_0 + t\theta_1 + \theta_t + 2\kappa_1 q_1 + ((1+t)q_1 - t)p_1 - p_1q_2\}. \end{aligned}$$

ここで，$\theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_t$ で，$H_{\mathrm{VI}}$ は第6パンルヴェ方程式のハミルトニアン：

$$\begin{aligned} t(t-1)H_{\mathrm{VI}}\left(\begin{matrix} \theta_0, \theta_1, \theta_t \\ \kappa_1, \kappa_2 \end{matrix}; q, p\right) &= q(q-1)(q-t)p^2 - \{\theta_0(q-1)(q-t) + \theta_1 q(q-t) + \theta_t q(q-1)\}p \\ &\quad -\kappa_1(\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \kappa_1)(q-t) + (t-1)\theta_0\theta_t + t\theta_1\theta_t, \\ &\quad (\theta_0 + \theta_1 + \theta_t + \kappa_1 + \kappa_2 = 0). \end{aligned}$$

ついでに，得られた方程式の特殊解について述べておこう．このハミルトン系は $\theta + \kappa_1 + \kappa_2 = 0$ のとき（$\kappa_2 = \kappa_3$ のとき），特殊解をもつことがすぐ分かる．このパラメーターの条件のもとで，$q_2 = 0$ を考えてみると，$\frac{d}{dt}q_2 = 0$ となるので，$q_2 = 0$ は解になる．代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}q_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial H_{\mathrm{VI}}}{\partial p_1}, \qquad \frac{d}{dt}p_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial H_{\mathrm{VI}}}{\partial q_1}, \qquad \frac{d}{dt}q_2 = 0, \\ &t(t-1)\frac{d}{dt}p_2 = 2q_1(q_1-1)(q_1-t)p_2^2 + 2\{(t+1)\theta_0 + t\theta_1 + \theta_t + 2\kappa_1 q_1 + ((1+t)q_1 - t)p_1\}p_2 \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}(\theta + (3q_1 - t - 1)p_1)p_1 \end{aligned}$$

となり，結局，$q_1, p_1$ はパンルヴェ方程式（の尺度変換）の解，$q_2 = 0, p_2$ はパンルヴェ方程式の解を係数としたリッカチ方程式の解とおくと，特殊解が得られる．

## 参考文献


[1] M. Dettweiler and S. Reiter, Middle convolution of Fuchsiansystems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.

[2] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, *J. Lond. Math. Soc.* **76** (2007), 438–450.

[3] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato, Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painleve transcendent, *Physica* **1D** (1980), no.1, 80–158.

[4] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Annals of Mathematics Studies **139** *Princeton University Press* (1995).

[5] T. Koike, On the Hamiltonian structures of the second and the fourth Painleve hierarchies, and the degenerate Garnier systems, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B2** (2007), 99–127.

[6] V. P. Kostov, The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity, Perspective in Comples Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, *World Scientific* (2001), 1–35.

[7] T. Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, *preprint, University of Tokyo, Mathematical Sciences* (2008).

[8] Y. Sasano, Coupled Painleve VI systems in dimension four with affine Weyl group symmetry of type $D_6^{(1)}$. II, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B5** (2008), 137–152.