数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 73-87

q パンルヴェ方程式のラックス形式

青山学院大学・理工学部　村田　実貴生 (Mikio Murata)
College of Science and Engineering,
Aoyama Gakuin University

概要

q パンルヴェ(VI) 型方程式から退化の操作により得られるすべての q パンルヴェ方程式をラックス形式により記述した．それらは線形 q 差分方程式の情報で特徴付けられる．また，q パンルヴェ(A_2) 型方程式からのラックス形式の退化図式を示した．

キーワード: パンルヴェ方程式, q 差分方程式, 完全積分可能系.
2000 Mathematics Subject Classification: 33E17, 34M55, 39A12.

1 はじめに

離散パンルヴェ方程式は可積分系の様々な観点から研究されている [6]．それらは適当な極限操作でパンルヴェ方程式に退化し，更に特異点閉じ込めの判定法に通るものである．特異点閉じ込めの判定法はパンルヴェ性の離散類似と考えられる．この判定法は Grammaticos らにより離散力学系の可積分性の判定基準として提案されている [2]．

離散パンルヴェ方程式は拡大アフィンワイル群に関連した有理曲面の型を基準に分類されている [10, 11]．それらには，楕円差分，q 差分，差分の 3 つの種類がある．離散パンルヴェ方程式のうち，この稿で扱う q 差分方程式である q パンルヴェ方程式は表 1 で与えられる．対称性の平行移動部分で種類の異なるものを区別す

略称	q-$P(A_0^*)$	q-$P(A_1)$	q-$P(A_2)$	q-$P(A_3)$	q-$P(A_4)$
曲面	$A_0^{(1)*}$	$A_1^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$A_4^{(1)}$
対称性	$E_8^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_6^{(1)}$	$D_5^{(1)}$	$A_4^{(1)}$

q-$P(A_5)$	q-$P(A_5)^\sharp$	q-$P(A_6)$	q-$P(A_6)^\sharp$	q-$P(A_7)$	q-$P(A_7')$
$A_5^{(1)}$	$A_5^{(1)}$	$A_6^{(1)}$	$A_6^{(1)}$	$A_7^{(1)}$	$A_7^{(1)\prime}$
$(A_2+A_1)^{(1)}$	$(A_2+A_1)^{(1)}$	$(A_1+A_1)^{(1)}$	$(A_1+A_1)^{(1)}$	$A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)}$

表 1: q パンルヴェ方程式

ると，$A_5^{(1)}$ 曲面と $A_6^{(1)}$ 曲面には 2 種類の q パンルヴェ方程式が存在することになる．よく知られていることだが，パンルヴェ(VI) 型方程式からは極限操作により他の 5 種類のパンルヴェ方程式を導出することができる．q パンルヴェ方程式においては，他の q パンルヴェ方程式を極限操作で得ることができることから，q パン

ルヴェ(A_0^*)型方程式 $(q\text{-}P(A_0^*))$ が最も一般的な方程式である．q パンルヴェ方程式はこの退化の関係により退化図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & q\text{-}P(A_0^*) & \to & q\text{-}P(A_1) & \to & q\text{-}P(A_2) & \to & q\text{-}P(A_3) \ \to \\ \to & q\text{-}P(A_4) & \to & q\text{-}P(A_5) & \to & q\text{-}P(A_6) & \to & q\text{-}P(A_7) & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\ & & & q\text{-}P(A_5)^\sharp & \to & q\text{-}P(A_6)^\sharp & \to & q\text{-}P(A_7') & \end{array}$$

を構成する．

パンルヴェ方程式の他の重要な側面は線形微分方程式のモノドロミー保存変形との関連である．一般化リーマン問題は Birkhoff の論文の中で線形微分，差分，q 差分方程式についてすでに研究されている [1]．神保，坂井は線形 q 差分方程式系

$$Y(qx,t) = \left(A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2\right) Y(x,t), \quad A_2 = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2) \tag{1.1}$$

の変形を研究し，q パンルヴェ(VI)型方程式として知られる q パンルヴェ(A_3)型方程式 $(q\text{-}P(A_3))$ を提出した [4]．そのような線形方程式系と変形を表す線形方程式系の組のことを等スペクトル変形理論の用語を流用してラックス形式と呼ぶ．坂井はまた q ガルニエ系の特殊な場合として，q パンルヴェ(A_2)型方程式 $(q\text{-}P(A_2))$ のラックス形式を構成した [8, 9]．Hay らは格子型変形 KdV 方程式のラックス対の簡約により，いくつかの q パンルヴェ方程式のラックス形式を発見した [3]．しかし，多くの q パンルヴェ方程式のラックス形式についてはまだ得られていない．そこで，この稿においては論文 [5] に従い，$q\text{-}P(A_3)$ から退化の操作により得られるすべての q パンルヴェ方程式のラックス形式を提示する．

線形方程式は A_2 行列の固有値，$A_0(t)$ 行列の固有値，$A(x,t) = A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2$ の行列式の零点により特徴づけられる．例えば $q\text{-}P(A_3)$ の場合は，A_2 行列の固有値は κ_1, κ_2，$A_0(t)$ 行列の固有値は $\theta_1 t$, $\theta_2 t$，$\det A(x,t)$ の零点は $a_1 t$, $a_2 t$, a_3, a_4 である．このデータの組を

$$q\text{-}P(A_3)\colon \{\kappa_1, \kappa_2; \theta_1 t, \theta_2 t; a_1 t, a_2 t, a_3, a_4\}$$

と表すことにすると，各 q パンルヴェ方程式を導く線形方程式のデータとその退化は次のようになる．

$$\begin{array}{ccc}
q\text{-}P(A_3)\colon \{\kappa_1, \kappa_2; \theta_1 t, \theta_2 t; a_1 t, a_2 t, a_3, a_4\} & & \\
\downarrow & & \\
q\text{-}P(A_4)\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, \theta_2 t; a_1 t, a_2 t, a_3, \infty\} & & \\
\downarrow & \searrow & \\
q\text{-}P(A_5)\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; a_1 t, a_2 t, 0, \infty\} & & q\text{-}P(A_5)^\sharp\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; a_1 t, 0, a_3, \infty\} \\
\downarrow & \swarrow & \downarrow \\
q\text{-}P(A_6)\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; a_1 t, 0, 0, \infty\} & & q\text{-}P(A_6)^\sharp\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; 0, 0, a_3, \infty\} \\
\downarrow & \swarrow & \downarrow \\
q\text{-}P(A_7)\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; 0, 0, 0, \infty\} & & q\text{-}P(A_7')\colon \{\kappa_1, 0; \theta_1 t, 0; 0, 0, \infty, \infty\}
\end{array}$$

線形方程式のデータの退化に伴って，得られる q パンルヴェ方程式も退化することがわかる．

なお，q-$P(A_2)$ に対しては線形常差分方程式系

$$Y(qx,t) = \big(A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2(t) + x^3A_3\big)\,Y(x,t),\ A_3 = \mathrm{diag}(\kappa_1, q\kappa_1) \quad (1.2)$$

の接続保存変形として与えられている [9]．これから q-$P(A_3)$ を導く線形方程式への退化を構成することができる．

第2節では接続保存変形を説明し，q-$P(A_3)$ を導出する．また，q-$P(A_4)$, q-$P(A_5)$, q-$P(A_5)^\sharp$, q-$P(A_6)$, q-$P(A_6)^\sharp$, q-$P(A_7)$, q-$P(A_7')$ のラックス形式を提出する．第3節では，ラックス形式の退化のためのパラメータの置き換えを与える．第4節では q-$P(A_2)$ のラックス形式を与え，q-$P(A_3)$ のラックス形式への退化のためのパラメータの置き換えを与える．

2 q パンルヴェ方程式のラックス形式

2.1 q-$P(A_3)$ のラックス形式

この節では神保，坂井の論文 [4] に従って接続保存変形を説明し，q パンルヴェ (A_3) 型方程式を導出する．

多項式係数をもつ 2×2 行列系

$$Y(qx,t) = A(x,t)Y(x,t) \quad (2.1)$$

を考える．モノドロミー保存変形の離散対照物である線形 q 差分方程式の接続保存変形の可能性は，係数が x の有理式である線形の変形方程式の存在と等価である．変形方程式を次の形で表わす．

$$Y(x,qt) = B(x,t)Y(x,t). \quad (2.2)$$

系 (2.1) と (2.2) の両立条件から

$$A(x,qt)B(x,t) = B(qx,t)A(x,t) \quad (2.3)$$

が導かれる．q-$P(A_3)$ は条件 (2.3) から得られる．行列 $A(x,t)$ は次の形

$$A(x,t) = A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2, \quad (2.4)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}, \quad A_0(t)\ \text{は固有値}\ \theta_1 t,\ \theta_2 t\ \text{を持つ}, \quad (2.5)$$

$$\det A(x,t) = \kappa_1\kappa_2(x - a_1t)(x - a_2t)(x - a_3)(x - a_4) \quad (2.6)$$

とする．ここでパラメータ κ_j, θ_j, a_j は t と独立である．このとき

$$\kappa_1\kappa_2 a_1 a_2 a_3 a_4 = \theta_1\theta_2$$

である．$y = y(t)$, $z_i = z_i(t)$ $(i = 1, 2)$ を

$$A_{12}(y,t) = 0, \quad A_{11}(y,t) = \kappa_1 z_1, \quad A_{22}(y,t) = \kappa_2 z_2 \tag{2.7}$$

で定義する．つまり

$$z_1 z_2 = (y - a_1 t)(y - a_2 t)(y - a_3)(y - a_4)$$

である．行列 $A(x,t)$ は次のようにパラメータ付けされる．

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \kappa_1\{(x-y)(x-\alpha) + z_1\} & \kappa_2 w(x-y) \\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x + \delta) & \kappa_2\{(x-y)(x-\beta) + z_2\} \end{pmatrix}.$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}[y^{-1}\{(\theta_1 + \theta_2)t - \kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2\} - \kappa_2\{(a_1 + a_2)t + a_3 + a_4 - 2y\}], \\
\beta &= \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}[-y^{-1}\{(\theta_1 + \theta_2)t - \kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2\} + \kappa_1\{(a_1 + a_2)t + a_3 + a_4 - 2y\}], \\
\gamma &= z_1 + z_2 + (y + \alpha)(y + \beta) + (\alpha + \beta)y - a_1 a_2 t^2 - (a_1 + a_2)(a_3 + a_4)t - a_3 a_4, \\
\delta &= y^{-1}\{a_1 a_2 a_3 a_4 t^2 - (\alpha y + z_1)(\beta y + z_2)\}
\end{aligned}$$

である．変数 $w = w(t)$ は「ゲージ」自由度に関係し，q-$P(A_3)$ の最終結果には含まれない．行列 $B(x,t)$ は次の有理関数である．

$$B(x,t) = \frac{x}{(x - a_1 qt)(x - a_2 qt)}\{xI + B_0(t)\}. \tag{2.8}$$

両立条件 (2.3) は

$$A(a_i qt, qt)\{a_i qtI + B_0(t)\} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{2.9}$$

$$\{a_i qtI + B_0(t)\}A(a_i t, t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{2.10}$$

$$A_0(qt)B_0(t) = qB_0(t)A_0(t) \tag{2.11}$$

と等価である．パラメータを上記に代入して，q 差分方程式の組を得る．記法 $\bar{y} = y(qt)$ などを使い，変数 z を

$$z = \frac{(y - a_1 t)(y - a_2 t)}{\kappa_1 q z_1} = \frac{z_2}{\kappa_1 q(y - a_3)(y - a_4)}$$

で定義する．そのとき行列 $B_0(t)=(B_{ij})$ は次のようにパラメータ付けされる．

$$\begin{aligned}
B_{11}&=\frac{-\kappa_2 q\bar{z}}{1-\kappa_2\bar{z}}\left\{-\beta+\frac{t(a_1+a_2)-y}{\kappa_2\bar{z}}\right\},\quad B_{12}=\frac{\kappa_2 qw\bar{z}}{1-\kappa_2\bar{z}},\\
B_{21}&=\frac{\kappa_1 q\bar{z}}{w(1-\kappa_1 q\bar{z})}\left(a_1qt-\bar{\alpha}+\frac{a_2qt-\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right)\left(a_1t-\beta+\frac{a_2t-y}{\kappa_2\bar{z}}\right),\\
B_{22}&=\frac{-\kappa_1 q\bar{z}}{1-\kappa_1 q\bar{z}}\left\{-\bar{\alpha}+\frac{qt(a_1+a_2)-\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right\}.
\end{aligned}$$

更に

$$b_1=\frac{a_1a_2}{\theta_1},\quad b_2=\frac{a_1a_2}{\theta_2},\quad b_3=\frac{1}{\kappa_1 q},\quad b_4=\frac{1}{\kappa_2} \tag{2.12}$$

と置くと，方程式 (2.9)–(2.11) は

$$\frac{y\bar{y}}{a_3a_4}=\frac{(\bar{z}-b_1t)(\bar{z}-b_2t)}{(\bar{z}-b_3)(\bar{z}-b_4)}, \tag{2.13}$$

$$\frac{z\bar{z}}{b_3b_4}=\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{(y-a_3)(y-a_4)}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\bar{w}}{w}=\frac{b_4(\bar{z}-b_3)}{b_3(\bar{z}-b_4)} \tag{2.15}$$

と等価になる．ここで条件

$$q=\frac{a_3a_4b_1b_2}{a_1a_2b_3b_4}$$

を得る．q-$P(A_3)$ は (2.13) と (2.14) である．

2.2 各 q パンルヴェ方程式のラックス形式

以下では，各 q パンルヴェ方程式のラックス形式

$$Y(qx,t)=A(x,t)Y(x,t), \tag{2.16}$$

$$Y(x,qt)=B(x,t)Y(x,t) \tag{2.17}$$

の行列 $A(x,t)$, $B(x,t)$ と得られる q パンルヴェ方程式を与える．

q-$P(A_4)$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}\kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y)\\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x+\delta) & \kappa_2(x-y)+z_2\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{\kappa_1}[y^{-1}\{(\theta_1+\theta_2)t - \kappa_1 z_1 - z_2\} + \kappa_2],$$
$$\gamma = z_2 - \kappa_2\{2y + \alpha - (a_1+a_2)t - a_3\},$$
$$\delta = y^{-1}\{-\kappa_2 a_1 a_2 a_3 t^2 - (\alpha y + z_1)(-\kappa_2 y + z_2)\}.$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t) = \frac{x}{(x-a_1qt)(x-a_2qt)}\{xI + B_0(t)\}.$$

ここで,

$$B_{11} = -q\bar{z}\left\{\kappa_2 + \frac{t(a_1+a_2)-y}{\bar{z}}\right\}, \quad B_{12} = qw\bar{z},$$
$$B_{21} = \frac{\kappa_1 q\bar{z}}{w(1-\kappa_1 q\bar{z})}\left(a_1qt - \bar{\alpha} + \frac{a_2qt - \bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right)\left(\kappa_2 + \frac{a_2t - y}{\bar{z}}\right),$$
$$B_{22} = \frac{-\kappa_1 q\bar{z}}{1-\kappa_1 q\bar{z}}\left\{-\bar{\alpha} + \frac{qt(a_1+a_2)-\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right\}.$$

変数変換

$$z = \frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{\kappa_1 q z_1} = \frac{z_2}{\kappa_1\kappa_2 q(y-a_3)},$$
$$b_1 = \frac{a_1a_2}{\theta_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_2}{\theta_2}, \quad b_3 = \frac{1}{\kappa_1 q}, \quad a_4 = -\kappa_2.$$

q-$P(A_4)$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = -\frac{(\bar{z}-b_1t)(\bar{z}-b_2t)}{\bar{z}-b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{a_4(y-a_3)}, \tag{2.18}$$
$$\frac{\bar{w}}{w} = -\frac{\bar{z}}{b_3} + 1, \quad q = \frac{a_3a_4b_1b_2}{a_1a_2b_3}. \tag{2.19}$$

q-$P(A_5)$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y) \\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x + \delta) & \kappa_2(x-y)+z_2 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{\kappa_1}\{y^{-1}(\theta_1 t - \kappa_1 z_1 - z_2) + \kappa_2\},$$
$$\gamma = z_2 - \kappa_2\{2y + \alpha - (a_1+a_2)t\},$$
$$\delta = -y^{-1}(\alpha y + z_1)(-\kappa_2 y + z_2).$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t)=\frac{x}{(x-a_1qt)(x-a_2qt)}\{xI+B_0(t)\}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
B_{11}&=-q\bar{z}\left\{\kappa_2+\frac{t(a_1+a_2)-y}{\bar{z}}\right\},\quad B_{12}=qw\bar{z},\\
B_{21}&=\frac{\kappa_1q\bar{z}}{w(1-\kappa_1q\bar{z})}\left(a_1qt-\bar{\alpha}+\frac{a_2qt-\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right)\left(\kappa_2+\frac{a_2t-y}{\bar{z}}\right),\\
B_{22}&=\frac{-\kappa_1q\bar{z}}{1-\kappa_1q\bar{z}}\left\{-\bar{\alpha}+\frac{qt(a_1+a_2)-\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right\}.
\end{aligned}$$

変数変換

$$z=\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{\kappa_1qz_1}=\frac{z_2}{\kappa_1\kappa_2qy},$$
$$b_1=\frac{a_1a_2}{\theta_1},\quad b_2=-\frac{\theta_1}{\kappa_1\kappa_2},\quad b_3=\frac{1}{\kappa_1q},\quad a_4=-\kappa_2.$$

q-$P(A_5)$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_4}=\frac{b_2t(\bar{z}-b_1t)}{\bar{z}-b_3},\quad \frac{z\bar{z}}{b_3}=-\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{a_4y},\tag{2.20}$$
$$\frac{\bar{w}}{w}=-\frac{\bar{z}}{b_3}+1,\quad q=\frac{a_4b_1b_2}{a_1a_2b_3}.\tag{2.21}$$

q-$P(A_5)^\sharp$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}\kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y)\\ \kappa_1w^{-1}(\gamma x+\delta) & \kappa_2(x-y)+z_2\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\alpha&=\frac{1}{\kappa_1}\{y^{-1}(\theta_1t-\kappa_1z_1-z_2)+\kappa_2\},\\
\gamma&=z_2-\kappa_2(2y+\alpha-a_1t-a_3),\\
\delta&=-y^{-1}(\alpha y+z_1)(-\kappa_2y+z_2).
\end{aligned}$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t)=\frac{1}{x-a_1qt}\{xI+B_0(t)\}.$$

ここで,

$$B_{11}=-q\bar{z}\left(\kappa_2+\frac{a_1t-y}{\bar{z}}\right),\quad B_{12}=qw\bar{z},$$
$$B_{21}=\frac{\kappa_1q\bar{z}}{w(1-\kappa_1q\bar{z})}\left(a_1qt-\bar{\alpha}-\frac{\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right)\left(\kappa_2-\frac{y}{\bar{z}}\right),$$
$$B_{22}=\frac{-\kappa_1q\bar{z}}{1-\kappa_1q\bar{z}}\left(-\bar{\alpha}+\frac{a_1qt-\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right).$$

変数変換

$$z=\frac{y(y-a_1t)}{\kappa_1qz_1}=\frac{z_2}{\kappa_1\kappa_2q(y-a_3)},$$
$$b_1=\frac{a_1}{\theta_1},\quad b_2=-\frac{\theta_1}{\kappa_1\kappa_2a_3},\quad b_3=\frac{1}{\kappa_1q},\quad a_4=-\kappa_2.$$

q-$P(A_5)^\sharp$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_3a_4}=-\frac{\bar{z}(\bar{z}-b_2t)}{\bar{z}-b_3},\quad \frac{z\bar{z}}{b_3}=-\frac{y(y-a_1t)}{a_4(y-a_3)},\tag{2.22}$$
$$\frac{\bar{w}}{w}=-\frac{\bar{z}}{b_3}+1,\quad q=\frac{a_3a_4b_1b_2}{a_1b_3}.\tag{2.23}$$

q-$P(A_6)$:

行列 $A(x,t)$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}\kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y)\\ \kappa_1w^{-1}(\gamma x+\delta) & \kappa_2(x-y)+z_2\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\alpha=\frac{1}{\kappa_1}\{y^{-1}(\theta_1t-\kappa_1z_1-z_2)+\kappa_2\},$$
$$\gamma=z_2-\kappa_2(2y+\alpha-a_1t),$$
$$\delta=-y^{-1}(\alpha y+z_1)(-\kappa_2y+z_2).$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t)=\frac{1}{x-a_1qt}\{xI+B_0(t)\}.$$

ここで,

$$B_{11}=-q\bar{z}\left(\kappa_2+\frac{a_1t-y}{\bar{z}}\right),\quad B_{12}=qw\bar{z},$$
$$B_{21}=\frac{\kappa_1q\bar{z}}{w(1-\kappa_1q\bar{z})}\left(a_1qt-\bar{\alpha}-\frac{\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right)\left(\kappa_2-\frac{y}{\bar{z}}\right),$$
$$B_{22}=\frac{-\kappa_1q\bar{z}}{1-\kappa_1q\bar{z}}\left(-\bar{\alpha}+\frac{a_1qt-\bar{y}}{\kappa_1q\bar{z}}\right).$$

変数変換

$$z = \frac{y(y - a_1 t)}{\kappa_1 q z_1} = \frac{z_2}{\kappa_1 \kappa_2 q y},$$

$$b_1 = \frac{a_1}{\theta_1}, \quad b_2 = -\frac{\theta_1}{\kappa_1 \kappa_2}, \quad b_3 = \frac{1}{\kappa_1 q}, \quad a_4 = -\kappa_2.$$

q-$P(A_6)$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_4} = \frac{b_2 t \bar{z}}{\bar{z} - b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{y - a_1 t}{a_4}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\bar{w}}{w} = -\frac{\bar{z}}{b_3} + 1, \quad q = \frac{a_4 b_1 b_2}{a_1 b_3}. \tag{2.25}$$

q-$P(A_6)^\sharp$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \kappa_1\{(x-y)(x-\alpha) + z_1\} & w(x-y) \\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x + \delta) & \kappa_2(x-y) + z_2 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{\kappa_1}\{y^{-1}(\theta_1 t - \kappa_1 z_1 - z_2) + \kappa_2\},$$

$$\gamma = z_2 - \kappa_2(2y + \alpha - a_3),$$

$$\delta = -y^{-1}(\alpha y + z_1)(-\kappa_2 y + z_2).$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t) = \frac{1}{x}\{xI + B_0(t)\}.$$

ここで,

$$B_{11} = -q\bar{z}\left(\kappa_2 - \frac{y}{\kappa_2 \bar{z}}\right), \quad B_{12} = qw\bar{z},$$

$$B_{21} = \frac{\kappa_1 q}{w(1 - \kappa_1 q\bar{z})}\left(-\bar{\alpha} - \frac{\bar{y}}{\kappa_1 q \bar{z}}\right)\left(\kappa_2 - \frac{y}{\bar{z}}\right),$$

$$B_{22} = \frac{-\kappa_1 q \bar{z}}{1 - \kappa_1 q \bar{z}}\left(-\bar{\alpha} - \frac{\bar{y}}{\kappa_1 q \bar{z}}\right).$$

変数変換

$$z = \frac{y^2}{\kappa_1 q z_1} = \frac{z_2}{\kappa_1 \kappa_2 q (y - a_3)},$$

$$b_1 = \frac{1}{\theta_1}, \quad b_2 = -\frac{\theta_1}{\kappa_1 \kappa_2 a_3}, \quad b_3 = \frac{1}{\kappa_1 q}, \quad a_4 = -\kappa_2.$$

q-$P(A_6)^\sharp$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = -\frac{\bar{z}(\bar{z}-b_2t)}{\bar{z}-b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{y^2}{a_4(y-a_3)}, \tag{2.26}$$

$$\frac{\bar{w}}{w} = -\frac{\bar{z}}{b_3}+1, \quad q = \frac{a_3a_4b_1b_2}{b_3}. \tag{2.27}$$

q-$P(A_7)$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y) \\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x+\delta) & \kappa_2(x-y)+z_2 \end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\kappa_1}\{y^{-1}(\theta_1 t - \kappa_1 z_1 - z_2) + \kappa_2\}, \\ \gamma &= z_2 - \kappa_2(2y+\alpha), \\ \delta &= -y^{-1}(\alpha y + z_1)(-\kappa_2 y + z_2). \end{aligned}$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t) = \frac{1}{x}\{xI + B_0(t)\}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} B_{11} &= -q\bar{z}\left(\kappa_2 - \frac{y}{\bar{z}}\right), \quad B_{12} = qw\bar{z}, \\ B_{21} &= \frac{\kappa_1 q\bar{z}}{w(1-\kappa_1 q\bar{z})}\left(-\bar{\alpha} - \frac{\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right)\left(\kappa_2 - \frac{y}{\bar{z}}\right), \\ B_{22} &= \frac{-\kappa_1 q\bar{z}}{1-\kappa_1 q\bar{z}}\left(-\bar{\alpha} - \frac{\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right). \end{aligned}$$

変数変換

$$z = \frac{y^2}{\kappa_1 q z_1} = \frac{z_2}{\kappa_1\kappa_2 q y},$$

$$b_1 = \frac{1}{\theta_1}, \quad b_2 = -\frac{\theta_1}{\kappa_1\kappa_2}, \quad b_3 = \frac{1}{\kappa_1 q}, \quad a_4 = -\kappa_2.$$

q-$P(A_7)$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_4} = \frac{b_2 t\bar{z}}{\bar{z}-b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{y}{a_4}, \tag{2.28}$$

$$\frac{\bar{w}}{w} = -\frac{\bar{z}}{b_3}+1, \quad q = \frac{a_4b_1b_2}{b_3}. \tag{2.29}$$

q-$P(A_7')$:
行列 $A(x,t)$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}\kappa_1\{(x-y)(x-\alpha)+z_1\} & w(x-y)\\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x+\delta) & z_2\end{pmatrix}.$$

ここで,

$$\alpha=\frac{1}{\kappa_1}y^{-1}(\theta_1 t-\kappa_1 z_1-z_2),$$
$$\gamma=z_2+\kappa_2,$$
$$\delta=-y^{-1}z_2(\alpha y+z_1).$$

行列 $B(x,t)$

$$B(x,t)=\frac{1}{x}\{xI+B_0(t)\}.$$

ここで,

$$B_{11}=qy,\quad B_{12}=qw\bar{z},$$
$$B_{21}=\frac{-\kappa_1 qy}{w(1-\kappa_1 q\bar{z})}\left(-\bar{\alpha}-\frac{\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right),$$
$$B_{22}=\frac{-\kappa_1 q\bar{z}}{1-\kappa_1 q\bar{z}}\left(-\bar{\alpha}-\frac{\bar{y}}{\kappa_1 q\bar{z}}\right).$$

変数変換

$$z=\frac{y^2}{\kappa_1 q z_1}=\frac{z_2}{\kappa_1\kappa_2 q},$$
$$b_1=\frac{1}{\theta_1},\quad b_2=-\frac{\theta_1}{\kappa_1\kappa_2},\quad b_3=\frac{1}{\kappa_1 q},\quad a_4=-\kappa_2.$$

q-$P(A_7')$ と w の満たす式

$$\frac{y\bar{y}}{a_4}=-\frac{\bar{z}(\bar{z}-b_2 t)}{\bar{z}-b_3},\quad \frac{z\bar{z}}{b_3}=\frac{y^2}{a_4}, \tag{2.30}$$
$$\frac{\bar{w}}{w}=-\frac{\bar{z}}{b_3}+1,\quad q=\frac{a_4 b_1 b_2}{b_3}. \tag{2.31}$$

3 ラックス形式の退化

q パンルヴェ方程式の退化のためのパラメータの置き換えのいくつかは例えば [7] にある．この節ではラックス形式の退化に必要なパラメータの置き換えを提示する．

q-$P(A_3)$ において，t を εt に，y を εy に，z を εz に，a_3 を εa_3 に，a_4 を $\varepsilon^{-1}a_4$ に，b_3 を εb_3 に，b_4 を ε^{-1} に置き換え，そして，ε を 0 に近付ける．その結果として，q-$P(A_4)$ を得る．記法の簡略化のために，置き換えと極限操作の過程を次のように記す．

$$t \to \varepsilon t, \quad y \to \varepsilon y, \quad z \to \varepsilon z,$$
$$a_3 \to \varepsilon a_3, \quad a_4 \to \varepsilon^{-1}a_4, \quad b_3 \to \varepsilon b_3, \quad b_4 \to \varepsilon^{-1}.$$

上記の記法を用いて，q パンルヴェ方程式のラックス形式から別の型のラックス形式への退化は次のように与えられる．

q-$P(A_3)$ から q-$P(A_4)$：

$$t \to \varepsilon t, \quad y \to \varepsilon y, \quad z \to \varepsilon z,$$
$$a_3 \to \varepsilon a_3, \quad a_4 \to \varepsilon^{-1}a_4, \quad b_3 \to \varepsilon b_3, \quad b_4 \to \varepsilon^{-1},$$
$$x \to \varepsilon x, \quad z_1 \to \varepsilon^2 z_1, \quad w \to \varepsilon^{-1}w, \quad \kappa_1 \to \varepsilon^{-1}\kappa_1, \quad \kappa_2 \to \varepsilon,$$
$$\alpha \to \varepsilon\alpha, \quad \beta \to \varepsilon^{-1}\beta, \quad \delta \to \varepsilon\delta,$$
$$Y(x,t) \to x^{\log_q \varepsilon}Y(x,t), \quad A(x,t) \to \varepsilon A(x,t),$$
$$A_0(t) \to \varepsilon A_0(t), \quad A_2 \to \varepsilon^{-1}A_2, \quad B_0(t) \to \varepsilon B_0(t),$$
$$B_{11} \to \varepsilon B_{11}, \quad B_{12} \to \varepsilon B_{12}, \quad B_{21} \to \varepsilon B_{21}, \quad B_{22} \to \varepsilon B_{22}.$$

q-$P(A_4)$ から q-$P(A_5)$：

$$a_3 \to \varepsilon, \quad b_2 \to \varepsilon^{-1}b_2, \quad \theta_2 \to \varepsilon.$$

q-$P(A_4)$ から q-$P(A_5)^\sharp$：

$$t \to \varepsilon t, \quad a_1 \to \varepsilon^{-1}a_1, \quad a_2 \to \varepsilon, \quad b_1 \to \varepsilon b_1, \quad b_2 \to \varepsilon^{-1}b_2,$$
$$\theta_1 \to \varepsilon^{-1}\theta_1, \quad \theta_2 \to \varepsilon.$$

q-$P(A_5)$ から q-$P(A_6)$：

$$t \to \varepsilon t, \quad a_1 \to \varepsilon^{-1}a_1, \quad a_2 \to \varepsilon, \quad b_1 \to \varepsilon b_1, \quad b_2 \to \varepsilon^{-1}b_2, \quad \theta_1 \to \varepsilon^{-1}\theta_1.$$

q-$P(A_5)^\sharp$ から q-$P(A_6)$：

$$a_3 \to \varepsilon, \quad b_2 \to \varepsilon^{-1}b_2.$$

q-$P(A_5)^\sharp$ から q-$P(A_6)^\sharp$：

$$a_1 \to \varepsilon, \quad b_1 \to \varepsilon b_1.$$

q-$P(A_6)$ から q-$P(A_7)$：

$$a_1 \to \varepsilon, \quad b_1 \to \varepsilon b_1.$$

q-$P(A_6)^\sharp$ から q-$P(A_7)$:

$$a_3 \to \varepsilon, \quad b_2 \to \varepsilon^{-1} b_2.$$

q-$P(A_6)^\sharp$ から q-$P(A_7')$:

$$a_3 \to \varepsilon^{-1}, \quad a_4 \to \varepsilon a_4, \quad \kappa_2 \to \varepsilon \kappa_2.$$

4 q-$P(A_2)$ から q-$P(A_3)$ への退化

q-$P(A_2)$ のラックス形式は坂井の論文 [9] で与えられている．このラックス形式から極限操作により q-$P(A_3)$ のラックス形式を導出する．

4.1 q-$P(A_2)$ のラックス形式

この項では論文 [9] における q-$P(A_2)$ のラックス形式の説明をする．その論文で行列 $A(x,t)$ は次のように与えられている．

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \kappa_1 W(x,t) & \kappa_2 w L(x,t) \\ \kappa_1 w^{-1} X(x,t) & \kappa_2 Z(x,t) \end{pmatrix},$$

ただし，

$$\begin{aligned}
L(x,t) &= x - \lambda, \\
Z(x,t) &= (x-\lambda)\left\{x^2 + (\gamma+\lambda)x + \delta\right\} + \mu, \\
W(x,t) &= (x-\lambda)\left\{x^2 + (-\gamma+\lambda-\sigma_1)x + \tilde{\delta}\right\} + \tilde{\mu}, \\
X(x,t) &= \frac{W(x,t)Z(x,t) - \prod_{i=1}^4 (x-a_i) \prod_{i=5}^6 (x - a_i t)}{L(x,t)}
\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}\left[\kappa_1\{2\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \sigma_2 + \gamma(\gamma+\sigma_1)\} - \frac{1}{\lambda}\{\kappa_1\tilde{\mu} + \kappa_2\mu - (\theta_1+\theta_2)t\}\right], \\
\tilde{\delta} &= \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}\left[-\kappa_2\{2\lambda^2 - \sigma_1\lambda + \sigma_2 + \gamma(\gamma+\sigma_1)\} + \frac{1}{\lambda}\{\kappa_1\tilde{\mu} + \kappa_2\mu - (\theta_1+\theta_2)t\}\right], \\
\tilde{\mu} &= \frac{1}{\mu}\prod_{i=1}^4(\lambda - a_i)\prod_{i=5}^6(\lambda - a_i t), \quad \sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + (a_5 + a_6)t, \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \le i < j \le 4} a_i a_j + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_5 + a_6)t + a_5 a_6 t^2
\end{aligned}$$

である．$q\kappa_1 = \kappa_2$ としたときには，次の式が得られる．

$$(\lambda - \underline{\nu})(\lambda - \nu) = \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4)}{(\lambda - a_5 t)(\lambda - a_6 t)}, \tag{4.1}$$

$$\left(1 - \frac{\nu}{\bar{\lambda}}\right)\left(1 - \frac{\underline{\nu}}{\lambda}\right) = \frac{a_5 a_6 (\nu - a_1)(\nu - a_2)(\nu - a_3)(\nu - a_4)}{q(a_5 a_6 t + \theta_1/\kappa_2)(a_5 a_6 t + \theta_2/\kappa_2)}, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} & a_5 a_6 t \lambda \bar{\lambda} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \bar{\gamma} - \nu)\{(a_5 + a_6)t + \gamma + \nu\} \\ & \qquad + q(a_5 a_6 t \nu + \theta_1/\kappa_2)(a_5 a_6 t \nu + \theta_2/\kappa_2) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

q-$P(A_2)$ は (4.1) と (4.2) である．

4.2 q-$P(A_2)$ のラックス形式の退化

第 3 節の記法を用いて，q-$P(A_2)$ のラックス形式から q-$P(A_3)$ のラックス形式への退化は次の図式で与えられる．

$$\begin{gathered} \lambda \to \varepsilon y, \quad \nu \to \varepsilon^{-1} z, \\ a_1 \to \varepsilon a_3, \quad a_2 \to \varepsilon a_4, \quad a_3 \to -\varepsilon^{-1}, \\ a_4 \to -\varepsilon^{-1} q \kappa_2^{-1} \kappa_1, \quad a_5 \to \varepsilon a_1, \quad a_6 \to \varepsilon a_2, \\ x \to \varepsilon x, \quad \mu \to \varepsilon z_2, \quad \tilde{\mu} \to \varepsilon q {\kappa_2}^{-1} \kappa_1 z_1, \quad \kappa_1 \to \varepsilon^{-1} q^{-1} \kappa_2, \quad \kappa_2 \to \varepsilon^{-1} \kappa_2, \\ \gamma \to \varepsilon^{-1} + \varepsilon \gamma_1 + O\left(\varepsilon^2\right), \\ \begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} & [y^{-1}\{(\theta_1 + \theta_2)t - \kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2\} \\ & - \kappa_2\{(a_1 + a_2)t + a_3 + a_4\} + y(\kappa_1 + \kappa_2)]. \end{aligned} \end{gathered}$$

5 まとめ

極限操作により，q-$P(A_3)$ から退化の操作により得られるすべての q パンルヴェ方程式のラックス形式を導出した．また，q-$P(A_2)$ のラックス形式からの退化図式を与えた．しかし，q-$P(A_0^*)$ と q-$P(A_1)$ のラックス形式はまだ提出されていないので，完全な退化図式は与えられない．ただし，最近、楕円パンルヴェ方程式のラックス対が単独 2 階線形方程式とその変形として提出されている [12]．したがって，その結果を用いて連立形のラックス対を構成できれば，その退化により図式が完成すると考えられる．また，興味深い問題としては，Hay らの論文 [3] のラックス対とこの結果の関係を見つけることがある．

参考文献

[1] G. D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* **49** (1913), 521–568.

[2] B. Grammticos, A. Ramani and V. G. Papageorgiou, Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1825–1828.

[3] M. Hay, J. Hietarinta, N. Joshi and F. Nijhoff, A Lax pair for a lattice modified KdV equation, reductions to q-Painlevé equations and associated Lax pairs, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), F61–F73.

[4] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.

[5] M. Murata, Lax forms of the q-Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 115201 (17pp).

[6] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 1829–1832.

[7] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani and K. M. Tamizhmani, Special function solutions of the discrete painlevé equations, *Comput. Math. Appl.* **42** (2001), 603–614.

[8] H. Sakai, A q-analog of the Garnier system, *Funkcial. Ekvac.* **48** (2005), 273–297.

[9] H. Sakai, Lax form of the q-Painlevé equation associated with the $A_2^{(1)}$ surface, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), 12203–12210.

[10] H. Sakai, Problem: discrete Painlevé equations and their Lax forms, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B2** (2007), 195–208.

[11] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.

[12] Y. Yamada, Lax formalism for elliptic Painlevé equation, *Preprint*, arXiv: 0811.1796.