数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 102-135

Saito Free Divisors and Integrable Connections

東京農工大学工学部　関口次郎 (Jiro Sekiguchi)
Faculty of Engineering
Tokyo University of Agriculture and Technology

§1. 序文

このノートでは対数的ベクトル場，斎藤自由因子，一意化微分方程式系などに関する話題を中心に最近の進展中の研究の概要を説明する．

よく知られていることだが，4 次式 $P(t)=t^4+xt^2+yt+z$ の判別式は

$$F_{A,1}=16x^4z-4x^3y^2-128x^2z^2+144xy^2z-27y^4+256z^3$$

である．

$$\begin{array}{rcl} V^0 &=& 2x\partial_x+3y\partial_y+4z\partial_z \\ V^1 &=& 3y\partial_x+(4z-x^2)\partial_y-\frac{1}{2}xy\partial_z \\ V^2 &=& 4z\partial_x-\frac{1}{2}xy\partial_y+\frac{1}{4}(8xz-3y^2)\partial_z \end{array}$$

とおくと，$V^jF_{A,1}/F_{A,1}$ は x,y,z の多項式になる $(j=0,1,2)$．$V^0F_{A,1}=12F_{A,1}$ となることは，x,y,z に重み $2,3,4$ をつけたとき，$F_{A,1}$ は 12 次の重みつき斉次多項式であることを意味する．残りのものについては一言では説明できない．これらのベクトル場の係数を成分にもつ行列

$$M=\begin{pmatrix} 2x & 3y & 4z \\ 3y & 4z-x^2 & -\frac{1}{2}xy \\ 4z & -\frac{1}{2}xy & \frac{1}{4}(8xz-3y^2) \end{pmatrix}$$

を定めると，その行列式 $\det(M)$ は $F_{A,1}$ の定数倍である．また，$R=\mathbf{C}[x,y,z]$ とおくと $L=RV^0+RV^1+RV^2$ は R 上のリー環になる．

4 次式 $P(t)$ から出発して $F_{A,1}$ を導いたが，行列 M から始めても $F_{A,1}$ とベクトル場 V^0,V^1,V^2 は求まる．そこで，未知数 $a_k\ (k=1,2,\ldots,7)$ を係数にする x,y,z の重みつき多項式を成分にもつ

$$M=\begin{pmatrix} 2x & 3y & 4z \\ 3y & a_1z+a_2x^2 & a_3xy \\ 4z & a_4xy & a_5xz+a_6y^2+a_7x^3 \end{pmatrix}$$

の形の行列から出発して 4 次式の判別式と同じような性質を持つ多項式が存在するか，という問題を考える．つまり，「M からベクトル場 V^0,V^1,V^2 を構成し，一方では $F=\det(M)$ とおいたとき，$V^jF/F\,(j=0,1,2)$ が多項式になるような定数 $a_k\ (k=1,2,\ldots,7)$ を求めよ」という問題である．諸々の事情から，F は z の 3 次式であると仮定する．つまり，$a_1\neq 0$ を仮定する．ところで，$a_k=0\ (k\geq 2)$ とすれば，$F=-16a_1z^3$ となり，あまり面白くない．そこで，F は $a_1(z+bx^2)^3$ ではない，という仮定もつける．この問題に対する答えだが，$F_{A,1}$ 以外にもう一つの多項式が存在する．その多項式は

$$F_{A,2}=2x^6-3x^4z+18x^3y^2-18xy^2z+27y^4+z^3$$

である．少し正確にいえば，上の問題の答えになる行列からその行列式として得られる多項式は適当な（重みつき）座標変換によって，$F_{A,1},F_{A,2}$ のいずれかになる，ということである．

$F_{A,2}$ は 30 年以上前に佐藤幹夫先生が概均質ベクトル空間の研究の過程で発見したものである．残念ながら筆者は当時この多項式の意義等に関して佐藤先生の見解をあまり伺うことはできなかったし，また現在でもはっきりした意味を見出しているとはいえない．一方では，斎藤恭司先生はその頃から孤立特異点の半普遍変形族のパラメータ空間の判別式の研究から対数的ベクトル場，斎藤自由因子（ここではこう呼ぶ）などの概念を定式化してその理論を展開していた (cf. [20])．さらに斎藤自由因子に沿った対数的ベクトル場から超幾何微分方程式に関するシュワルツの理論の多変数版といえる対数的積分可能接続の概念を提出して，その一意化微分方程式を導びいた (cf. [19])．$\mathbf{C}^3$ の超曲面 $F_{A,j}=0\ (j=1,2)$ は斎藤自由因子の典型的な例である．斎藤理論では，その背景に孤立特異点の半普遍変形族があり，その性質を取り出して理論を構成しているように見える．筆者はこの幾何学的な背景を忘れて，純粋に斎藤自由因子の定義から出発して斎藤理論を展開することに関心をもった．斎藤自由因子の構成とその性質，一意化微分方程式の構成などに

関して3変数というかなり限定した場合だけを扱っているが，[19] の内容を豊富にする結果が得られた．かなりコンピュータに依存しているため，式が長くなり見通しの悪い形の結果になるのが欠点だが，具体的な式であるから，整理することでその意味をより深めることができるものと期待している．たとえば，求められた一意化微分方程式はアッペルの超幾何微分方程式系とは異なる自明でない解空間が3次元である2変数の微分方程式系になっている．ユニタリ鏡映群と関係した斎藤自由因子の場合は Dubrovin-Mazzocco[9], Boalch [6] などが求めたパンルヴェVI の代数関数解と関係しているようである．このような微分方程式を具体的に求めたことになる．

§2. 17種類の多項式

この節は [25] の概説である．

序文にあるように，発端はある種の性質をもつ多項式を分類することであった．それを定式化する．x,y,z を変数，p,q,r を $p<q<r$ が成り立つ自然数とする．p,q,r は共約数を持たないと仮定する．(x,y,z) 空間上の次のような3個のベクトル場 V^0,V^1,V^2 を定義する：

$$(1)\quad \begin{cases} V^0 &= px\dfrac{\partial}{\partial x}+qy\dfrac{\partial}{\partial y}+rz\dfrac{\partial}{\partial z}, \\ V^1 &= qy\dfrac{\partial}{\partial x}+h_{22}(x,y,z)\dfrac{\partial}{\partial y}+h_{23}(x,y,z)\dfrac{\partial}{\partial z}, \\ V^2 &= rz\dfrac{\partial}{\partial x}+h_{32}(x,y,z)\dfrac{\partial}{\partial y}+h_{33}(x,y,z)\dfrac{\partial}{\partial z}, \end{cases}$$

ここで，$h_{ij}(x,y,z)$ は x,y,z の多項式である．また V^0,V^1,V^2 から 3×3 行列 M を以下のようにして定義する：

$$(2)\quad M=\begin{pmatrix} px & qy & rz \\ qy & h_{22}(x,y,z) & h_{23}(x,y,z) \\ rz & h_{32}(x,y,z) & h_{33}(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

まず「重みつき斉次性」について復習する．x,y,z の関数 $f(x,y,z)$ が (p,q,r) 型重みつき斉次多項式であるとは，適当な自然数 d に対して $V_0f=df$ が成り立つことである．このとき，d は f の次数という．明らかに x,y,z の次数はそれぞれ p,q,r である．V_0,V_1,V_2 に対する条件を考える：

条件 2.1

(i) $[V_0,V_1]=(q-p)V_1,\ [V_0,V_2]=(r-p)V_2$.

(ii) 次を満たす多項式 $f_j(x,y,z)\ (j=0,1,2)$ が存在する：
$[V_1,V_2]=f_0(x,y,z)V_0+f_1(x,y,z)V_1+f_2(x,y,z)V_2$.

(iii) $\dfrac{\partial h_{22}}{\partial z}$ は零でない定数

(iv) 多項式 $\det(M)$ は z^3 の定数倍でない．

問題 2.2 上の条件 2.1 を満たすベクトル場の三つ組 $\{V_0,V_1,V_2\}$ を，重みつき座標変換を除いて分類せよ．

V_0,V_1,V_2 が条件 2.1 を満たし，$\det(M)$ が重複因子をもたない多項式のとき，$\det(M)=0$ で定まる超曲面は斎藤自由因子になる．(斎藤自由因子については次節においてより一般的な形で説明する．)

問題 2.2 に対する解答は次の定理であたえられる．

定理 2.3 x,y,z を変数，p,q,r を $p<q<r$ であるような自然数とする．p,q,r は共約数をもたないとする．このとき，次が成り立つ．

(i) もし $(p,q,r)\neq(2,3,4),\ (1,2,3),\ (1,3,5)$ であれば，条件を満たすベクトル場の三つ組 $\{V_0,V_1,V_2\}$ は存在しない．

(ii) もし (p,q,r) が $(2,3,4),\ (1,2,3),\ (1,3,5)$ のいずれかであれば，$F=\det(M)$ の形の多項式 $F(x,y,z)$ は重みつき座標変換によって次のいずれかと一致するようにできる：

(ii.1) $(p,q,r)=(2,3,4)$ の場合 (この場合は A_3 型鏡映群に対応する)
$F_{A,1}=16x^4z-4x^3y^2-128x^2z^2+144xy^2z-27y^4+256z^3$.

$F_{A,2} = 2x^6 - 3x^4z + 18x^3y^2 - 18xy^2z + 27y^4 + z^3.$
(ii.2) $(p,q,r) = (1,2,3)$ の場合 (この場合は B_3 型鏡映群に対応する)
$F_{B,1} = z(x^2y^2 - 4y^3 - 4x^3z + 18xyz - 27z^2).$
$F_{B,2} = z(-2y^3 + 4x^3z + 18xyz + 27z^2).$
$F_{B,3} = z(-2y^3 + 9xyz + 45z^2).$
$F_{B,4} = z(9x^2y^2 - 4y^3 + 18xyz + 9z^2).$
$F_{B,5} = xy^4 + y^3z + z^3.$
$F_{B,6} = 9xy^4 + 6x^2y^2z - 4y^3z + x^3z^2 - 12xyz^2 + 4z^3.$
$F_{B,7} = \frac{1}{2}xy^4 - 2x^2y^2z - y^3z + 2x^3z^2 + 2xyz^2 + z^3.$
(ii.3) $(p,q,r) = (1,3,5)$ の場合 (この場合は H_3 型鏡映群に対応する)
$F_{H,1} = -50z^3 + (4x^5 - 50x^2y)z^2 + (4x^7y + 60x^4y^2 + 225xy^3)z - \frac{135}{2}y^5 - 115x^3y^4 - 10x^6y^3 - 4x^9y^2.$
$F_{H,2} = 100x^3y^4 + y^5 + 40x^4y^2z - 10xy^3z + 4x^5z^2 - 15x^2yz^2 + z^3.$
$F_{H,3} = 8x^3y^4 + 108y^5 - 36xy^3z - x^2yz^2 + 4z^3.$
$F_{H,4} = y^5 - 2xy^3z + x^2yz^2 + z^3.$
$F_{H,5} = x^3y^4 - y^5 + 3xy^3z + z^3.$
$F_{H,6} = x^3y^4 + y^5 - 2x^4y^2z - 4xy^3z + x^5z^2 + 3x^2yz^2 + z^3.$
$F_{H,7} = xy^3z + y^5 + z^3.$
$F_{H,8} = x^3y^4 + y^5 - 8x^4y^2z - 7xy^3z + 16x^5z^2 + 12x^2yz^2 + z^3.$

1990年前後には，現在ほどコンピュータも性能がよくなかったが，同僚だった大久保謙二郎先生から数式処理システムを数学研究に応用することを勧められた．推奨された REDUCE という数式処理システムを使って上の結果を導いた．[24] に発表したが，それにある多項式はもう少し複雑な表示をしている．それを整理すると上のようになった．

$F(x,y,z)$ をこれらの多項式のひとつとすれば，F の複素ベキ F^s のみたす微分方程式系はいわゆる単純ホロノミック系になる．このような性質を満たすようにするためにベクトル場 V^0, V^1, V^2 の ∂_x の係数を線形項だけになるようにした．不思議なことに，分類された多項式は階数 3 の既約な実鏡映群の判別式とさらにそれらと重みが同じものしか得られなかった．階数 3 の既約な実鏡映群は A_3, B_3, H_3 の 3 種類である．このことが $F_{A,j}$, $F_{B,j}$, $F_{H,j}$ と書いている理由である．$F_{A,1}$, $F_{B,1}$, $F_{H,1}$ はそれぞれ A_3, B_3, H_3 型実鏡映群の判別式であり，$F_{A,2}$ は佐藤先生の発見したものである．

[24] を講究録に発表したときには気づかなかったが，最近これらの式と例外型単純特異点との間に関係があることがわかった．それを説明する．4 次方程式の判別式から定まる $\mathbf{C}^3$ の超曲面 $F_{A,1} = 0$ は「ツバメの尾」といわれており，その形状はよく知られている．$x \neq 0$ である x を固定して，この超曲面を yz 平面の曲線とみると，特異点が 3 点あり，そのうち 2 つは A_2 特異点であり，もう 1 つは A_1 特異点である．そして，$x = 0$ のときは，$F_{A,1}(0,y,z) = 0$ は原点のみに E_6 型特異点をもつ．視点を変えて x をパラメータとみる．yz 平面の曲線族 C_x : $F_{A,1}(x,y,z) = 0$ は，$x = 0$ のときには E_6 型特異点であり，$x \neq 0$ のときには $A_2 + A_2 + A_1$ 型の特異点になるような変形族であることを意味する．ここでディンキン図形を思い起こす．E_6 型ルート系のディンキン図形からひとつの単純ルートに対応する丸をとれば $A_2 + A_2 + A_1$ 型のディンキン図形が得られる．曲線族 $F_{A,1} = 0$ は E_6 型ルート系と階数が 1 つ下がった $A_2 + A_2 + A_1$ 型ルート系の組 $(E_6, 2A_2 + A_1)$ とみることができる．曲線族 $F_{A,2} = 0$ について同じことを考えると，(E_6, A_5) が対応することがわかる．

実は A_3 型の場合には条件を一言では説明できなかったが，B_3, H_3 型の場合は説明は単純である．容易に類推できるが，B_3 型の多項式は $F_{B,j}$ $(j = 1,2,\ldots,7)$ があるが，それらは E_7 型ルート系の階数が 1 だけ下がった部分ルート系と対応している．E_8 型の場合も同様である．特に，$F_{B_3,1}$ は E_7 型ルート系の部分ルート系 $A_2 + A_3 + A_1$ と対応しており，$F_{H_3,1}$ は E_8 型ルート系の部分ルート系 $A_2 + A_4 + A_1$ と対応している．

関連する話題について言及しておく．この節で定めた 17 種類の多項式から定義される $\mathbf{C}^3$ の因子の補空間の基本群の構造については斎藤-石部 [23] で研究されている (石部 [16] も参照)．またこれらの多項式の b 関数は中山-関口 ([18]) で決定されている．

単純ホロノミック系を見つけるという立場を離れて，斎藤自由因子を定める多項式を見つけるという立場にたてば，(1) で定めたベクトル場の形を少し修正してもよい．このようにすると，孤立特異点の変形との関係で数多くの斎藤自由因子を構成することが可能である．実際，アーノルドの例外的孤立特異点の 14 族と呼ばれる孤立特異点があるが，それらの中で 8 種類のものについては，1 パラメータの変形族に注目することで斎藤自由因子を数多く構成することができた．[26] にアイデアを説明しているので，関心のある読者はそれを参照してほしい．

注意 2.4 ここに，多項式 $F_{A,1},\ldots,F_{H,8}$ それぞれの場合に対応する行列 M を与えておく．(x1,x2,x3 は x,y,z のことである．)

```
MF_{A,1} = {{2*x1,3*x2, 4*x3}, {3*x2, -x1^2 + 4*x3, -1/2*x1*x2},
           {4*x3, -1/2*x1*x2, 1/4*(8*x1*x3 - 3*x2^2)}}
MF_{A,2} = {{2*x1,3*x2, 4*x3}, {3*x2, 1/2*(x3 - x1^2),6*x1*x2},
           {4*x3, -2*x1*x2, 16*x1^3 + 24*x2^2 - 8*x1*x3}}

MF_{B,1} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, x1*x2 + 3*x3, 2*x1*x3}, {3*x3, 2*x1*x3, x2*x3}}
MF_{B,2} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, -2/3*(2*x1*x2 - 9*x3), -4*x1*x3},
           {3*x3, -2/3*(x2^2 + 3*x1*x3), -2*x2*x3}}
MF_{B,3} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, -3/5*(x1*x2 - 5*x3), -6/5*x1*x3},
           {3*x3, -3/5*x2^2, -6/5*x2*x3}}
MF_{B,4} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, 3(3*x1*x2 + x3), 6*x1*x3}, {3*x3, 0, -3*x2*x3}}
MF_{B,5} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, -24*x1*x2 + 2*x3, -2*x2^2 - 32*x1*x3},
           {3*x3, -9*x2^2, -12*x2*x3}}
MF_{B,6} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, 3*x1*x2 + 5/2*x3, 9/2*x2^2 + 15/2*x1*x3},
           {3*x3,3/4*(15*x2^2 + x1*x3), 18*x2*x3}}
MF_{B,7} = {{x1, 2*x2, 3*x3}, {2*x2, 1/3*(-4*x1*x2 + 7*x3), x2^2 - 14/3*x1*x3},
           {3*x3, 3/2*(7*x2^2 - 6*x1*x3), 12*x2*x3}}

MF_{H,1} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, 2*x3 + 2*x1^2*x2, 7*x1*x2^2 + 2*x1^4*x2},
           {5*x3, 7*x1*x2^2 + 2*x1^4*x2, 1/2*(15*x2^3 + 4*x1^4*x3 + 18*x1^3*x2^2)}}
MF_{H,2} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, 36*x1^2*x2 + 6*x3, 90*x1*x2^2 + 90*x1^2*x3},
           {5*x3, -10/3*(12*x1^3 - 55*x2)*x1*x2,
            -50/3*(6*x1^3*x2^2 - x2^3 + 6*x1^4*x3 - 18*x1*x2*x3)}}
MF_{H,3} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, 1/10*(x1^2*x2 + 2*x3), 23/10*x1*x2^2 + 3/20*x1^2*x3},
           {5*x3, 5*x1*x2^2, 15/2*x2(2*x2^2 + x1*x3)}}
MF_{H,4} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, 1/5*(-4*x1^2*x2 + 6*x3), 2/5*x1*x2^2 - 2*x1^2*x3},
           {5*x3, -20/3*x1*x2^2,10/3*x2*(x2^2 - 5*x1*x3)}}
MF_{H,5} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, -9/5*(4*x1^2*x2 - x3), -3/5*x1(9*x2^2 + 16*x1*x3)},
           {5*x3, -15*x1*x2^2, -5*x2(x2^2 + 4*x1*x3)}}
MF_{H,6} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, -3/5*(3*x1^2*x2 - 4*x3), -18/5*x1*(-x2^2 + 2*x1*x3)},
           {5*x3, -5/3*x1*(-8*x2^2 + 5*x1*x3), 10/3*x2*(2*x2^2 + x1*x3)}}
MF_{H,7} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, -3/5*(2*x1^2*x2 + x3), -3/5*x1(-x2^2 + 3*x1*x3)},
           {5*x3, 10/3*x1*x2^2, -5/3*x2*(x2^2 - 3*x1*x3)}}
MF_{H,8} = {{x1, 3*x2, 5*x3}, {3*x2, -3/5*(24*x1^2*x2 - 7*x3), -9/5*x1(-3*x2^2 + 28*x1*x3)},
           {5*x3, -5/3*x1*(7*x2^2 + 20*x1*x3), 5/3*x2*(7*x2^2 - 52*x1*x3)}}
```

§3. 捩れのない積分可能接続

斎藤自由因子に付随する積分可能接続について調べることがこのノートの目的である．そのために積分可能接続について斎藤 [19] の内容を紹介する．より広い視点からの理論展開は斎藤 [22] にある．Aleksandrov[3] にも関連する話題が書かれている．

このノートでは 3 変数の場合に重点をおいているが，少し一般的に定式化する．$X = \mathbf{C}^n$ として，普通の座標を $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする．$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を次の条件を満たし重複因数をもたない多項式とする．

(C1) あるベクトル場 $E = \sum_{i=1}^n m_i x_i \partial_{x_i}$ に対して $EF = dF$ を満たす．ここで，$m_1, m_2, \ldots, m_n, d$ は $0 < m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n$ を満たす正整数である．

(C2) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の多項式 $a_{ij}(x)$ を成分とする n 次正方行列 $M = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ で $\det M$ は F の零でない定数倍になるものが存在する．

(C3) (C2) の行列 M の成分から構成された n 個のベクトル場 $V^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して次が成り立つ：

(C3.a) $V^1 = E$
(C3.b) $V^i F(x) = c_i(x) F(x)$ が成り立つような多項式 $c_i(x)$ が存在する．
(C3.c) $[E, V^i] = k_i V^i$ となる定数 k_i が存在する．
(C4.d) 任意の i, j に対して $[V^i, V^j]$ は $\sum_{k=1}^n RV^k$ に含まれている．ここで $R = \mathbf{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ とする．

$F(x)$ が上の条件を満たすとき，X の超曲面 $D = \{x \in X;\ F(x) = 0\}$ を 斎藤自由因子 という．斎藤自由因子についての基本文献は [20] である．

$L(D) = \{V = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_{x_j};\ a_j(x) \in R,\ VF/F \in R\}$ とおくと，$L(D)$ はリー環になるが，斎藤自由因子の基本的な性質のひとつは

$$L(D) = \sum_{j=1}^{n} RV^j$$

が成り立つことである．

行列 M から 1 次外微分形式 ω_j を

$$(\omega_1\,\omega_2\,\cdots\,\omega_n) = (dx_1\,dx_2\cdots dx_n)M^{-1}$$

で定義する．さらに $\vec{\omega} = (\omega_1\,\omega_2\,\cdots\,\omega_n)$ とおく．定義より，V^i, ω_i は斉次であり，その次数は $\deg V^i = -\deg\omega_i = d_i$ である．以下では簡単のため $0 = d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ を仮定する．

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ から生成される R 加群 $(R = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n])$ を $\Omega_X^1(\log D)$ と書く．正確には，$\Omega_X^1(\log D)$ は次のように定義される．Ω_X^p を X 上の多項式を係数にもつ p 次微分形式全体からなる R-加群とする．このとき，

$$\Omega_X^1(\log D) = \{\omega;\ F\omega \in \Omega_X^1, Fd\omega \in \Omega_X^2\}$$

超曲面 D : $F(x) = 0$ が斎藤自由因子のときは，$\Omega_X^1(\log D)$ の R-加群としての生成系として $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ をとることができる．

定義 3.1. $\Omega_X^1(\log D)$ から $\Omega_X^1(\log D) \otimes \Omega_X^1(\log D)$ への写 ∇ が D に沿って対数的極をもつ接続 であるとは，次の条件が成り立つときにいう．

(1) $\nabla(\omega + \omega') = \nabla\omega + \nabla\omega' \quad (\forall\omega, \omega' \in \Omega_X^1(\log D))$

(2) $\nabla(f\omega) = df \otimes \omega + f\nabla\omega \quad (\forall f \in R,\ \forall\omega \in \Omega_X^1(\log D))$

接続 ∇ はそれぞれの整数 $p > 0$ に対して，上の条件 (1), (2) が成り立つように $\Omega_X^p(\log D) \otimes \Omega_X^1(\log D)$ から $\Omega_X^{p+1}(\log D) \otimes \Omega_X^1(\log D)$ への接続へと拡張される．特に次のライプニッツの法則が成り立つ：

(3) $\nabla(\eta \otimes \omega) = d\eta \otimes \omega + (-1)^p\eta \wedge \nabla\omega$ for any $\eta \in \Omega_X^p(\log D)$ and $\omega \in \Omega_X^1(\log D)$.

[19] にしたがって，次の ∇ に対する概念を導入する．

定義 3.2.

(1) ∇ は積分可能である．$\Leftrightarrow \nabla \circ \nabla = 0$.

(2) $\nabla : \Omega_X^1(\log D) \to \Omega_X^1(\log D) \otimes \Omega_X^1(\log D)$ と $\wedge : \Omega_X^1(\log D) \otimes \Omega_X^1(\log D) \to \Omega_X^2(\log D)$ の合成が外微分と一致するとき，∇ は捩れがないという．

接続 ∇ に対して，

$$\nabla\omega_i = \sum_{j=1}^{n} {\omega_i}^j \otimes \omega_j$$

となるような 1 次微分形式 ${\omega_i}^j \in \Omega_X^1(\log D)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ が存在する．

定義より，

$$\omega_i{}^j = \sum_{k=1}^{n} {\Gamma_i}^{jk}\omega_k$$

が成り立つような ${\Gamma_i}^{jk} \in R$ が存在する．

Γ^k を (i, j) 成分が ${\Gamma_i}^{jk}$ である $n \times n$ 行列として，$\Omega = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k\omega_k$ とおく．すると，${\omega_i}^j$ は Ω の (i, j) 成分である．行列 Ω を ∇ の 接続行列 という．

補題 3.3.

(1) Ω が積分可能であることと $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ は同値である．

(2) Ω が捩れのないことと $d\,{}^t\vec{\omega} = \Omega \wedge {}^t\vec{\omega}$ は同値である．

補題 3.3 は次のように述べることができる：

(a.1) Ω が積分可能であることと $d\omega_i{}^j = \sum_{k=1}^n \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j$ は同値である.
(a.2) Ω が捩れのないことと $d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_i{}^j \wedge \omega_j$ は同値である.

定義より Ω は $(d_j - d_i)$ 次斉次である.
$\vec{\Gamma} = (\Gamma^1\,\Gamma^2\,\cdots\,\Gamma^n)$ とおいて, $\vec{\Gamma'} = \vec{\Gamma}\cdot {}^tM^{-1}$ によって $\vec{\Gamma'} = (\Gamma'^1\,\Gamma'^2\,\cdots\,\Gamma'^n)$ を定める. Γ'^i は $n\times n$ 行列である. すると

$$\Omega = \vec{\omega}\cdot{}^t\vec{\Gamma}(=\omega_1\Gamma^1+\cdots+\omega_n\Gamma^n) = (dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n)\cdot{}^t\vec{\Gamma'} = \Gamma'^1dx_1+\Gamma'^2dx_2+\cdots+\Gamma'^ndx_n$$

が成り立つ. 次の補題は定義から直ちにしたがう.

補題 3.4. Ω が積分可能であることと $[\Gamma'^i, \Gamma'^j] = \dfrac{\partial\Gamma'^j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial\Gamma'^i}{\partial x_j}$ $(\forall i,j)$ が成り立つことは同値である.

X 上の関数 $f(x)$ に対して, $\mathbf{\vec{V}}(f) = (V^1f,\,V^2f,\,\cdots,\,V^nf)$ とおく. すると

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i = \vec{\omega}\cdot{}^t\mathbf{\vec{V}}(f)$$

が成り立つ.

定義 3.5. 1次微分形式 $\eta\in\Omega_X^1(\log D)$ は, $\nabla\eta = 0$ が成り立つとき, 水平であるという.

$\eta = \sum_{j=1}^n h_j\omega_j$ for $h_j\in R$ を $\Omega_X^1(\log D)$ に含まれている1次微分形式とする. このとき $\vec{h} = (h_1h_2\cdots h_n)$ とおく. $\nabla{}^t\vec{\omega} = \Omega\otimes{}^t\vec{\omega}$ だから,

$$\nabla\eta = d\vec{h}\otimes{}^t\vec{\omega} + \vec{h}\nabla{}^t\vec{\omega} = (d\vec{h}+\vec{h}\Omega)\otimes{}^t\vec{\omega}$$

がわかる. したがって, $\nabla\eta = 0$ より $d\vec{h}+\vec{h}\Omega = 0$ が導かれる. この議論より次の補題が得られる.

補題 3.6. もし $\eta = \vec{h}\cdot{}^t\vec{\omega}$ が水平であれば, $d\vec{h}+\vec{h}\Omega = 0$ が成り立つ.

当面, 水平条件を忘れて

(A) $\qquad d\vec{h}+\vec{h}\Omega = 0$

を $\vec{h} = (h_1\,h_2\,\cdots\,h_n)$ に対する微分方程式とみる. Ω 対する積分可能条件は

$$d(\vec{h}\Omega) = d\vec{h}\wedge\Omega + \vec{h}d\Omega = \vec{h}(-\Omega\wedge\Omega + d\Omega) = 0$$

を導くので, (A) もまた積分可能である. 他方,

$$d\vec{h}+\vec{h}\Omega = \sum_{k=1}^n V^k\vec{h}\cdot\omega_k + \sum_{k=1}^n \vec{h}\Gamma^k\omega_k = \sum_{k=1}^n (V^k\vec{h}+\vec{h}\Gamma^k)\omega_k,$$

が成り立つから,

$$V^k\vec{h}+\vec{h}\Gamma^k = \vec{0} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

がわかる. その結果, 系 (A) は次と同値であることがわかる.

(A') $V^kh_j + \sum_{i=1}^n h_i\Gamma_i{}^{jk} = 0 \quad (\forall k,j)$

命題 3.7. Ω は捩れがないと仮定する. このとき, 1次外微分形式 $\eta\in\Omega_X^1(\log D)$ が水平であることと次の条件を満たす関数 $f(x)$ が存在することは同値である:

(a) $\eta = df$
(b) $V^kV^jf + \sum_{i=1}^n \Gamma_i{}^{jk}V^if = 0 \quad (\forall j,k)$.

証明は省略する.
$f(x)$ を X 上の関数として方程式系

(B) $V^kV^jf + \sum_{i=1}^n \Gamma_i{}^{jk}V^if = 0 \quad (\forall j,k)$.

を定義する．方程式系 (B) は ∇ に関する一意化方程式系 と呼ばれる．

命題 3.8. Ω を D に沿って対数的極をもつ接続の接続行列とする．このとき次が成り立つ．
(i) Ω が捩れのない接続行列のとき，

$$[V^i,V^j] = \sum_{k=1}^n (\Gamma_k{}^{ij} - \Gamma_k{}^{ji})V^k \quad (\forall\, i,j)$$

(ii) Ω が積分可能のとき，

$$(V^i\Gamma^j - V^j\Gamma^i) + \sum_{k=1}^n \Gamma^k(\Gamma_k{}^{ji} - \Gamma_k{}^{ij}) = [\Gamma^i,\Gamma^j] \quad (\forall\, i,j)$$

証明は省略する．
あたえられた積分可能接続に対して，一種のゲージ変換を施して捩れのない積分可能な接続を構成できるための判定条件を調べる．これまでのように，斎藤自由因子 D に沿った積分可能接続を $\Omega = \Gamma^1\omega_1 + \Gamma^2\omega_+ \cdots + \Gamma^n\omega_n$ とする．このとき，$d\Omega = \Omega\wedge\Omega$ が成り立つ．Γ^{jk} を Γ^k の j 番目の縦ベクトルとする．そして $n\times n$ 行列 $P = (\Gamma^{11}\Gamma^{12}\cdots\Gamma^{1n})$ を定義する．
P が可逆であれば，$\tilde{\Omega} = P^{-1}\Omega P - P^{-1}dP$ を定義できる．次の補題は簡単に示せる．

命題 3.9. Ω が積分可能でしかも P が可逆であれば，$\tilde{\Omega}$ は捩れのない積分可能接続である．

与えられた積分可能接続 Ω に対して，これまでの議論から次が成り立っている：
(D1) それぞれの $\omega_j{}^k$ は重みつき斉次でその次数は $\deg\omega_i{}^j = d_j - d_i$.
(D2) それぞれの $\Gamma_i{}^{jk}$ は重みつき斉次でその次数は $\deg\Gamma_i{}^{jk} = -d_i + d_j + d_k$.
今，次の条件を考える：

(D3) $\Gamma_i{}^{1i} \neq 0 \quad (\forall i = 1,2,\ldots,n)$.

条件 (D3) が成り立つとき，成分が定数である適当な対角行列 Q をとり，Ω を $Q^{-1}\Omega Q$ によって置き換えれば，はじめから $\Gamma_i{}^{1i} = s_0\,(i = 1,2,\ldots,n)$ となるような零でない定数 s_0 が存在すると仮定してよい．そしてこのように修正した Ω から始めれば，上で定義した P は仮定 $0 = d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ より，上三角行列でさらに可逆になるので，$\tilde{\Omega}$ を定めることができるが，これは捩れのない積分可能接続である．この接続行列を $\tilde{\Omega} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}^k\omega_k$ で表す．$\tilde{\Gamma}^k$ は $n\times n$ 行列である．その (i,j)-成分を $\tilde{\Gamma}_i{}^{jk} \in R$ で表す．$\tilde{\Omega}^t\vec{e}_1 = s_0{}^t\vec{\omega}$ だから，

$$\tilde{\Gamma}_i{}^{1j} = \delta_i{}^js_0 \quad (\forall i,j)$$

がわかる．
当面の間，条件 (D3) を仮定する．ここで Aleksandrov (cf. [AA], Cor. 3.2) によって示された式:

$$\Gamma_i{}^{j1} - \Gamma_i{}^{1j} = -d_j\delta_i{}^j \quad (\forall i,j)$$

を思い出す．この式から

$$\Gamma_i{}^{j1} = (s_0 - d_j)\delta_i{}^j \quad (\forall i,j)$$

が成り立つ．これは $\tilde{\Gamma}^1$ は対角行列でその i 次対角成分は $s_0 - d_i$ であることを意味する．

$\vec{h}$ を $d\vec{h}+\vec{h}\tilde{\Omega}=\vec{0}$ の解とする．このとき，とくに

$$V^1 h_j + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i{}^{j1} h_i = 0.$$

が成り立つ．$\Gamma_i{}^{j1} = (s_0 - d_j)\delta_i{}^j$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i{}^{j1} h_i = \sum_{i=1}^{n} (s_0 - d_j)\delta_i{}^j h_i = (s_0 - d_j) h_i$$

がわかる．したがって

$$V^1 h_i + (s_0 - d_i) h_i = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が得られる．このことは，それぞれの h_i は $-(s_0 - d_i)$ 次斉次式であることを意味する．

(SUE) $\quad V^k V^j f + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i^{jk} V^i f = 0 \quad \text{for} \quad (\forall k, j)$

を $\tilde{\Omega}$ に関する一意化方程式とする．すでに注意したように，$\tilde{\Gamma}^1$ は対角行列でしかも $\Gamma_i^{11} = s_0 \delta_{i1}$ が成り立っている．このとき，とくに

$$V^1 V^1 f + s_0 V^1 f = 0$$

を得る．したがって，$V^1 f = 0$ あるいは $V^1 f = -s_0 f$ が成り立つ．

$V^1 f = 0$ が成り立つ場合を考える．(SUE) の $j = 1$ に対する微分方程式は

$$V^k V^1 f + s_0 V^k f = 0$$

である．$s_0 \neq 0$ だから

$$V^k f = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を得る．

次に $V^1 f = -s_0 f$ が成り立つ場合を考える．すると

$$V^1 V^j f + (s_0 - d_j) V^j f = 0$$

が成り立つことがわかる．他方では，(SUE) の $k = 1$ に対する微分方程式は

$$V^1 V^j f + \tilde{\Gamma}_j^{j1} V^j f = 0$$

である．すると，

$$(-s_0 + d_j + \tilde{\Gamma}_j^{j1}) V^j f = 0$$

がわかる．$\tilde{\Gamma}_j^{j1} = s_0 - d_j$ だから，これは自明な微分方程式である．

結果として，(SUE) は次のふたつの微分方程式系に分解されることがわかる：

(DR) $\quad V^k f = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$

(SUEa) $\quad V^1 f + s_0 f = 0, \quad V^k V^j f + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Gamma}_i^{jk} V^i f = 0 \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n)$

(DR) は

$$\partial_{x_k} f = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

になる．一方では，(SUEa) は

(SUEa') $\quad V^1 f + s_0 f = 0, \quad V^k \vec{\mathbf{V}}(f) + \vec{\mathbf{V}}(f)\tilde{\Gamma}^k = \vec{0} \quad (k = 2, \ldots, n)$

と書き直せる．$v_j = V^j f$ として，$\vec{v} = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ とおけば，$V^1 v_j = (-s_0 + d_j) v_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つ．したがって，A_1' を (i, j) 成分が $\delta_{ij}(-s_0 + d_j)$ であるような n 次正方行列とすれば，$V^1 \vec{v} = A_1' \vec{v}$ が成り立つ．さらに，$A_k' = -{}^t\tilde{\Gamma}^k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$ とおけば，(SUEa') は $\vec{v}$ に対する微分方程式系

(SUEa")　$V^k\vec{v} = A'_k\vec{v}$　$(k = 1, 2, \dots, n)$

定義より，A'_k の $(1, j)$ 成分は $-\delta_{jk}s_0$ である．$v_1 = V_1 f = -s_0 f$ であるから，$u_1 = f = -\frac{1}{s_0}v_1, u_j = v_j\ (j = 2, \dots, n)$ として，(SUEa') は $\vec{u} = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_n)$ に対する微分方程式系に書き直すことができる．それを

(Su)　$V^k\vec{u} = A_k\vec{u}$　$(k = 1, 2, \dots, n)$

とする．$A_1 = A'_1$ であるが，$k = 2, \dots, n$ に対しては，A_k は A'_k と少し異なり，とくに A_k の $(1, j)$ 成分は δ_{jk} である．さらに，$u_k = V^k u_1\ (k = 2, \dots, n)$ も成り立つ．

以上をまとめると次のことがわかったことになる．斎藤自由因子 D に対して，D の沿って対数的極をもつ積分可能接続 ∇ をとる．∇ の接続行列が条件 (D3) を満たせば，自然に D の沿って対数的極をもつ捩れのない積分可能接続 $\tilde{\nabla}$ を構成でき，この $\tilde{\nabla}$ に対する一意化方程式系は本質的に (Su) の形に表される．次節以降では，(Su) を一意化微分方程式系あるいは一意化方程式系と呼ぶことにする．

§4. 一意化微分方程式の例 I

一意化微分方程式系と古典的な微分方程式との関係をみるために，$F(x_1, x_2) = x_1^n - x_2^2$ の場合を例にとって，一意化微分方程式を導いてみる．簡単のため，n は 2 以上の奇数とする．

$D = \{(x_1, x_2);\ F(x_1, x_2) = 0\}$ とおけば，D が斎藤自由因子であることは知られている．ベクトル場 V^1, V^2 を

$$
\begin{aligned}
V^1 &= 2x_1\partial_{x_1} + nx_2\partial_{x_2} \\
V^2 &= 2x_2\partial_{x_1} + nx_1^{n-1}\partial_{x_2}
\end{aligned}
$$

で定義すれば，V^1, V^2 は $R = \mathbf{C}[x_1, x_2]$ 上の $L(D)$ の生成系である．

一意化微分方程式を求めるために，定数 p_1, p_2, q として 2×2 行列

$$
A_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ qx_1^{n-2} & 0 \end{pmatrix}
$$

を定義する．そして微分方程式系

$(\mathrm{D})_n$　$V^i\vec{u} = A_i\vec{u}$　$(i = 1, 2)$

を考える．ここで，$\vec{u} = {}^t(u_1\, u_2)$ である．簡単な計算より，

$$
\begin{cases}
u_2 &= V^2u_1, \\
p_2 &= p_1 + n - 2, \\
V^1u_1 &= p_1u_1, \\
V^2V^2u_1 &= qx_1^{n-2}u_1
\end{cases}
$$

を得る．

$v = F^{-\frac{p_1}{2n}}u_1$ とおく．すると，$V^1F = 2nF$, $V^2F = 0$ が成り立つから，

$$
V^1v = 0,\ V^2V^2v = qx_1^{n-2}v
$$

がわかる．このことに注意して，$z = \dfrac{x_1^n}{x_2^2}$ とおいて，$v(x_1, x_2) = \varphi(z)$ に対する微分方程式を求める．直接計算により，

$$
V^2z = 2n\frac{x_1^{n-1}}{x_2}(1 - z), \quad V^2V^2z = x_1^{n-2}(1 - z)\{4n(n-1) - 6n^2z\}
$$

を得る．$V^2V^2v = qx_1^{n-2}v$ は $V^2V^2\varphi(z) = qx_1^{n-2}\varphi(z)$ と同じであるから，

$$
4n^2z(1 - z)^2\varphi''(z) + \{4n(n-1) - 6n^2z\}(1 - z)\varphi'(z) - q\varphi(z) = 0
$$

が導かれる．いま $\psi(w)=\varphi(1-w)$ とおけば，

$$(1-w)w^2\psi''(w)-\left\{\frac{n-1}{n}-\frac{3}{2}(1-w)\right\}w\psi'(w)-\frac{q}{4n^2}\psi(w)=0$$

これはガウスの超幾何微分方程式に還元される．とくに，$q=q_0^2-(2-n)^2$ となるように q_0 を定めれば，

$$F\left(\frac{n-2+2q_0}{4n},\frac{n-2-2q_0}{4n};\frac{1}{2};\frac{1}{w}\right)$$

がその解になることがわかる．したがって

$$(x_1^n-x_2^2)^{\frac{p_1}{2n}}F\left(\frac{2-n-2q_0}{4n},\frac{2-n+2q_0}{4n};\frac{1}{2};-\frac{x_2^2}{x_1^n-x_2^2}\right)$$

は一意化方程式 $(\mathrm{D})_n$ のひとつの解になる．

n が偶数の場合には，一意化方程式が超幾何微分方程式に還元されるかどうかはわからない．

§5. 実鏡映群，ユニタリ鏡映群と一意化方程式系

$V_{\mathbf{R}}$ を n 次元実ベクトル空間として，G を $V_{\mathbf{R}}$ を標準表現空間とする既約実鏡映群とする．V を $V_{\mathbf{R}}$ の複素化とし，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ を V の線形座標とする．G は $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$ を不変にする直交群の部分群であるとしてよい．$S=\mathbf{C}[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n]$ を V の座標環とする．$R=S^G$ を $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ の不変多項式からなる S の部分環とする．このとき，代数的に独立な $P_j\in R\ (j=1,2,\ldots,n)$ で $R=\mathbf{C}[P_1,P_2,\ldots,P_n]$ となるものが存在する．各 P_j は斉次式としてよい．したがって，

$$\deg_\xi P_1\le\deg_\xi P_2\le\cdots\le\deg_\xi P_n$$

とする．とくに，$P_1=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$ とする．ξ に対して $\pi(\xi)=(P_1(\xi),P_2(\xi),\ldots,P_n(\xi))$ とおくと，π は V から $W=\mathbf{C}^n$ への写像を定める．

G の鏡映 s に対して s で不変になる V の超平面 H_s はある 1 次式 $\alpha_s\in S$ によって $H_s=\{\xi\in V;\alpha_s(\xi)=0\}$ と表示できる．$\mathcal{R}$ を G の鏡映全体の集合として，各 $s\in\mathcal{R}$ に対して，α_s をひとつ定める．(定数倍を除いて α_s は一意に定まる．) $\Pi=\prod_{s\in\mathcal{R}}\alpha_s$ とおく．このとき，$s\in\mathcal{R}$ に対して $s^2=1$ だから，Π^2 は G-不変であることがわかる．これを G の判別式という．Π^2 は $P_1,P_2,\ldots,P_n$ の多項式して表示できる．この多項式を $F_G(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ とする．したがって

$$\Pi^2(\xi)=F_G(P_1(\xi),P_2(\xi),\ldots,P_n(\xi))$$

が成り立つ．斎藤によって，$\partial_{P_n}^n F_G$ は零でない定数であり，

$$D_G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in W;\ F_G(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\}$$

は W 上の斎藤自由因子になることが証明されている．

$$m_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{\partial P_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial P_j}{\partial\xi_k}$$

は R に含まれ，m_{ij} を (i,j) 成分とする n 次正方行列を M とする．定義より，M は対称行列である．

$$V^j=\sum_{i=1}^n m_{ij}\partial_{P_i}\quad(j=1,2,\ldots,n)$$

とおくと，

$$V^1=\sum_{j=1}^n(\deg P_j)\partial_{P_j},$$

$$L(D_G)=\sum_{j=1}^n RV^j$$

などがわかる.

一意化微分方程式との関係を調べる. V の座標関数 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ は

$$\text{(E)}\quad \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}u=0\quad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

の解である. 実際には, 定数もこの微分方程式系の解になる. 定数を除外するには,

$$\text{(Ea)}\quad \left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\partial_{\xi_j}-1\right)u=0$$

もこの微分方程式系に付け加える必要がある. (E)+(Ea) を $P=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ を使って表したものが一意化方程式系 (Su) にあたるものになる. 実際に書き下すことは大変である.

ユニタリ鏡映群の場合にも実鏡映群と同じような議論を展開することが可能であるが, 一部の議論が統一的に扱えない. もっとも重要な違いは, 判別式の零点として定義される超曲面が斎藤自由因子になることの証明である. 実鏡映群のときには定義より2次の不変式が存在することがわかるので, それを使って対数的ベクトル場を構成することができた. しかし, ユニタリ鏡映群の場合には2次の不変式が存在しないので, この議論は適用できない. 次節で議論する階数3のユニタリ鏡映群の場合には個別に対数的ベクトル場を構成することによって, この障害を乗り越えることは可能である. また, 階数3の場合のユニタリ鏡映群の場合には, 本質的には (E)+(Ea) にあたるものを原岡-加藤 [14] が求めている.

注意 5.1. 最近, 石部正氏から教えていただいたが, Bessis-Michel [5] は階数5までの既約なユニタリ鏡映群の判別式に沿っての対数的ベクトル場を決定している.

§6. 階数3の既約な鏡映群

ここでは, 階数3の既約な鏡映群について基本的な事柄を復習する. 主要な文献としてはShephard-Todd [27] をあげておく.

この で扱うのは, A_3,B_3,H_3 型実鏡映群と [27] で No.24,No.25,No.26,No.27 と番号のついたユニタリ鏡映群である. H_3 型実鏡映群は [27] では No.23 になっている. G をこれらの群のいずれかとする. 断りなく前節の記号を使う. (ユニタリ鏡映群の場合も記号を同じように使うことにする.) このとき, P_1,P_2,P_3 を代数的に独立な G-不変斉次多項式として, $k_j=\deg_\xi(P_j)$ とする. $k_1\le k_2\le k_3$ としてよい. (k_1,k_2,k_3) を最大公約数で割ったものを (k_1',k_2',k_3') とする. 後の都合もあり, P_1,P_2,P_3 をそれぞれ x_1,x_2,x_3 で表すことにする. G の判別式を x_1,x_2,x_3 で表した多項式を $F_G(x_1,x_2,x_3)$ と書くことにする.

A_3,B_3,H_3 の場合, G-不変式 x_1,x_2,x_3 を上手くとれば, $F_{W(A_3)},F_{W(B_3)},F_{W(H_3)}$ はそれぞれ定理 2.3 にある $F_{A,1},F_{B,1},F_{H,1}$ になる. No.25, No.26 の場合にも G-不変式 x_1,x_2,x_3 を上手くとれば, それぞれ $F_{A,1},F_{B,1}$ になる.

	group	order	k_1,k_2,k_3	degree	(k_1',k_2',k_3')
A_3	$W(A_3)$	24	2, 3, 4	12	(2, 3, 4)
B_3	$W(B_3)$	48	2, 4, 6	18	(1, 2, 3)
H_3	$W(H_3)$	120	2, 6, 10	30	(1, 3, 5)
No.24	G_{336}	336	4, 6, 14	42	(2, 3, 7)
No.25	G_{648}	648	6, 9, 12	36	(2, 3, 4)
No.26	G_{1296}	1296	6, 12, 18	54	(1, 2, 3)
No.27	G_{2160}	2160	6, 12, 30	90	(1, 2, 5)

§7. 階数3の既約ユニタリ鏡映群の場合の一意化方程式系

この節では3次元空間に作用するユニタリ鏡映群の判別式が定める斎藤自由因子に対する一意化方程式系を構成する. 7,8 年前にロシア人数学者 A.Aleksandrov 教授と偶然交流する機会があり, 彼に刺激されて斎藤自由因子に付随する積分可能接続の構成に関心をもった. しかしながら, その計算には数十の変数の1次式, 2次式からなる連立方程式を解く必要があり, 現実的でなくそのままにしていた. ところが, 昨年

(2008 年) 春，琉球大学の加藤満生氏が [14] の結果を説明してくれた．はじめはその内容と斎藤自由因子に付随する積分可能接続との関連を認識していなかったのだが，少し考えてみて，重要な関連がわかった．まず，階数 3 のユニタリ鏡映群の判別式の零点集合が斎藤自由因子になることに気づいた．このこと自体は筆者の認識不足の側面もある．ところで，数年前にアーノルドの意味での例外的特異点の 14 族の中の 8 種類に関連する斎藤自由因子を相当数構成していた ([26] 参照)．ユニタリ鏡映群 G_{336}，G_{2160} の判別式はそのときに分類していた斎藤自由因子族に含まれていた．そして，原岡-加藤 [14] の結果から，階数 3 のユニタリ鏡映群 $W(A_3)$, $W(B_3)$, $W(H_3)$, G_{336}, G_{2160} の判別式に付随する積分可能接続に対応する一意化方程式系で，モノドロミー群が有限になる場合にその一意化方程式系を構成できたことになる．このような経緯があって，一意化方程式の構成を本格的に取り組むことにした．この節では，$W(A_3)$ の判別式に付随する一意化方程式系は斎藤 [20] で扱われている．このでは主にユニタリ鏡映群 $W(B_3)$, $W(H_3)$, G_{336}, G_{2160} の判別式に付随する一意化方程式系を示し，特別な場合にそれの解の構成について議論する．解の構成は難しく今後の問題として残される．

§7.1. A_3 型実鏡映群の判別式の場合

この場合には，斎藤 [19] が詳しく調べている ([22] においても言及している)．このノートの原型ともいえる．

§7.2. B_3 型実鏡映群の判別式とユニタリ鏡映群 G_{1296} の判別式の場合

この場合，行列

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & 3x_3 \\ 2x_2 & x_1x_2 + 3x_3 & 2x_1x_3 \\ 3x_3 & 2x_1x_3 & x_2x_3 \end{pmatrix}$$

から議論をはじめる．M の行列式は次の多項式 f_0 と (定数倍を除いて) 一致する．

$$f_0 = x_3(-x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 + 4x_1^3x_3 - 18x_1x_2x_3 + 27x_3^2)$$

f_0 は $W(B_3)$ の判別式である．

V_0, V_1, V_2 を

$${}^t(V_0, V_1, V_2) = M\,{}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

によって定義されるベクトル場とする．このとき，

$$[V_0, V_1] = V_1,\ [V_0, V_2] = 2V_2,\ [V_1, V_2] = -x_3V_0 + x_1V_2$$

$$V_0f_0 = 9f_0,\ V_1f_0 = 4x_1f_0,\ V_2f_0 = x_2f_0$$

が成り立つ．行列 A_1, A_2, A_3 を次のように定める．

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+s_0 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(-1+2k_1-s_0)s_0x_2 & k_1x_1 & 1+s_0 \\ -(-1+3k_1-2s_0)s_0x_3 & 0 & (1+k_1)x_1 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(-2+3k_1-2s_0)s_0x_3 & 0 & k_1x_1 \\ 0 & (1-3k_1+2s_0)x_3 & (2k_1-s_0)x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A_1, A_2, A_3 から定義できるベクトル値未知関数 $\vec{u} = {}^t(u, V_1u, V_2u)$ に対する次の微分方程式系を考える．

$$(B_{\{s_0,k_1\}}) \quad V_j\vec{u} = A_{j+1}\vec{u} \quad (j = 0, 1, 2)$$

これは $f_0 = 0$ に沿った捩れのない積分可能接続に関する一意化方程式系のひとつである．

実鏡映群 $W(B_3)$ の場合，標準表現空間の線形座標系を $t = (t_1, t_2, t_3)$ とすれば，

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \\ x_2 &= t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2 \\ x_3 &= t_1^2t_2^2t_3^2 \end{aligned}$$

としてよい．t_1,t_2,t_3 は x_1,x_2,x_3 の多価関数とみなせる．このとき，t_1,t_2,t_3 の満たす微分方程式系は $s_0=k_1=\frac{1}{2}$ の微分方程式系 $(B_{\{1/2,1/2\}})$ になる．

他方，ユニタリ鏡映群 G_{1296} の場合，標準表現空間の線形座標系 $t=(t_1,t_2,t_3)$ を適当にとれば，次で定義される t の多項式 y_1,y_2,y_3 を G_{1296} 不変式環の生成元になる．(原岡-加藤 [14] にある生成系である．)

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& t_1^6-10t_1^3t_2^3+t_2^6-10t_1^3t_3^3-10t_2^3t_3^3+t_3^6 \\ y_2 &=& (t_1^3+t_2^3+t_3^3)((t_1^3+t_2^3+t_3^3)^3+216(t_1t_2t_3)^3) \\ y_3 &=& ((t_1^3-t_2^3)(t_2^3-t_3^3)(t_3^3-t_1^3))^2 \end{array}$$

x_1,x_2,x_3 を

$$x_1=y_1,\ x_2=(y_1^2-y_2)/3,\ x_3=16y_3,$$

によって定義すれば，G_{1296} の判別式は定数倍を除いて f_0 に一致する．さらに，t_1,t_2,t_3 は x_1,x_2,x_3 の多価関数とみなせる．このとき，t_1,t_2,t_3 の満たす微分方程式系は $s_0=1/6,\ k_1=1/3$ の場合の微分方程式系 $(B_{\{1/6,1/3\}})$ になる．

微分方程式系 $(B_{\{s_0,k_1\}})$ の解を求めることはまだできていない．そこで，$x_1=0$ に方程式を制限してみる．すると解として

$${}_3F_2\left(-\frac{s_0}{6},\frac{2-s_0}{6},\frac{4-s_0}{6};\frac{1}{2},\frac{s_0-2k_1+2}{2};-\frac{27x_3^2}{4x_2^3}\right)$$

を得る．${}_3F_2$ は一般超幾何関数である．同じようにして，超曲面 $4x_2-x_1^2=0$ と超平面 $x_2=0$ に制限することも考える．まず，$4x_2-x_1^2=0$ に制限すると解が

$${}_3F_2\left(\frac{2-s_0}{3},\frac{1-s_0}{3},-\frac{s_0}{3};-s_0+k_1+\frac{1}{2},s_0-2k_1+1;\frac{54x_3}{x_1^3}\right)$$

である常微分方程式が得られる．また $x_2=0$ に制限すると，解が

$${}_3F_2\left(\frac{-s_0+2}{3},\frac{-s_0+1}{3},-\frac{s_0}{3};\frac{2-k_1}{2},\frac{3-k_1}{2};-\frac{27x_3}{4x_1^3}\right)$$

である常微分方程式が得られる．

この意味は次のように解釈できる．$x_1=0$ の場合を説明する．$W(B_3)$ との関係では，$x_1=t_1^2+t_2^2+t_3^2$ だから，$x_1=0$ は t 空間の 2 次曲面 $t_1^2+t_2^2+t_3^2=0$ を表す．これを射影化すれば，$\mathbf{P}^2$ の 2 次曲面になる．一方では，一般超幾何関数 ${}_3F_2(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2;x)$ の満たす微分方程式には 3 個の独立解が存在する．それを $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ とする．もとの微分方程式系 $(B_{\{s_0,k_1\}})$ のモノドロミー群が $W(B_3)$ になるときには，$(0,x_2,x_3)$ から $(\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3)$ を対応させることで，$x_1=t_1^2+t_2^2+t_3^2$ で定義される $\mathbf{P}^2$ の 2 次曲線から $\mathbf{P}^2$ への埋め込みが定義できたことになる．G_{1296} の場合には，$\mathbf{P}^2$ の 6 次曲線 $t_1^6-10t_1^3t_2^3+t_2^6-10t_1^3t_3^3-10t_2^3t_3^3+t_3^6=0$ から $\mathbf{P}^2$ への埋め込みをあたえたことになる．

§7.3. H_3 型実鏡映群の判別式の場合

この群は Shephard-Todd [27] では No.23 である．

はじめに

$$P(t)=t^6+y_1t^5+y_2t^3+y_3t+\frac{1}{20}y_2^2-\frac{1}{4}y_1y_3$$

で定義される t の 6 次式 $P(t)$ の判別式を計算する．結果は次で定義される多項式 g_0 の平方 g_0^2 になる．

$$g_0=125y_1^3y_2^4+864y_2^5-1250y_1^4y_2^2y_3-9000y_1y_2^3y_3+3125y_1^5y_3^2+25000y_1^2y_2y_3^2+50000y_3^3$$

$P(t)$ は本質的にはクラインの著書（「正 20 面体と 5 次方程式」）にある．もともとはヤコビが導入したようである．係数 (y_1,y_2,y_3) を関係式

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& -4x_1 \\ y_2 &=& 10x_1^3-25x_2 \\ y_3 &=& -4x_1^5+50x_1^2x_2-50x_3 \end{array}\right.$$

で定めるように (x_1,x_2,x_3) に変換すると，行列

$$M=\begin{pmatrix} x_1 & 3x_2 & 5x_3 \\ 3x_2 & 2x_3+2x_1^2x_2 & 7x_1x_2^2+2x_1^4x_2 \\ 5x_3 & 7x_1x_2^2+2x_1^4x_2 & \frac{1}{2}(15x_2^3+4x_1^4x_3+18x_1^3x_2^2) \end{pmatrix}$$

の行列式は(定数倍を除いて)g_0 と一致する．この行列 M は矢野-関口 [31] において得られている．いうまでもなく，g_0 は $W(H_3)$ の判別式であり，§2 で与えられた $F_{H,1}$ と一致する．(x,y,z をそれぞれ x_1,x_2,x_3 に置き換える必要があるが．) $F_{H,1}(x)=0$ で定まる $\mathbf{C}^3$ の斎藤自由因子に沿って対数的なベクトル場を構成できる．それらは

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix}$$

である．(前節の記号では V^1,V^2,V^3 であるべきだが，記号を少し変えてある．) 当面の間，$f_0=F_{H,1}$ とおく．簡単に

$$[V_0,V_1]=2V_1,\ [V_0,V_2]=4V_2,\ [V_1,V_2]=(4x_1^3x_2+2x_2^2)V_0+4x_1x_2V_1$$

がわかり，また

$$V_0f_0=15f_0,\ V_1f_0=2x_1^2f_0,\ V_2f_0=2x_1(2x_1^3+5x_2)f_0$$

は直接計算によって確かめられる．

この場合にひとつの一意化方程式を与える．

```
A1={{s0, 0, 0}, {0, 2+s0, 0}, {0, 0, 4+s0}};
A2={{0, 1, 0},
    {2/225*x1*((-4+5*r2-2*s0)*(2+20*r2+s0)*x1^3+15*(12-55*r2+50*r2^2+6*s0-
     5*r2*s0)*x2), 1/15*(8+5*r2+4*s0)*x1^2, r2},
    {(4*(-4+5*r2-2*s0)*(8+5*r2+4*s0)*x1^6+20*(-16-200*r2+275*r2^2+164*s0-10*r2*s0-
     4*s0^2)*x1^3*x2+225*(-20*r2+25*r2^2+8*s0)*x2^2-600*(-4+5*r2-2*s0)*x1*x3)/900,
     1/15*x1*((8+5*r2+4*s0)*x1^3+10*(8+5*r2+s0)*x2), 1/15*(4-5*r2+2*s0)*x1^2}};
A3={{0, 0, 1},
    {(4*(-4+5*r2-2*s0)*(8+5*r2+4*s0)*x1^6+20*(-16-200*r2+275*r2^2-16*s0-10*r2*s0-
     4*s0^2)*x1^3*x2+1125*r2*(-4+5*r2)*x2^2-600*(-4+5*r2-2*s0)*x1*x3)/900,
     1/15*x1*((8+5*r2+4*s0)*x1^3+10*(2+5*r2+s0)*x2), 1/15*(4-5*r2+2*s0)*x1^2},
    {(4*(-4+5*r2-2*s0)*(8+5*r2+4*s0)*x1^8+20*(-4+5*r2-2*s0)*(-1+5*r2+4*s0)*x1^5*x2+
     25*(-104-130*r2+325*r2^2+40*s0+25*r2*s0-8*s0^2)*x1^2*x2^2-300*(-4+5*r2-8*s0)*
     x1^3*x3-750*(-4+5*r2-2*s0)*x2*x3)/450, 1/4*(4+5*r2)*x2*(4*x1^3+5*x2),
     1/15*x1*(-(-16+5*r2-8*s0)*x1^3-10*(-4+5*r2-2*s0)*x2)}};
```

とおいたとき，$\vec{w}={}^t(w_1,w_2,w_3)$ に対する微分方程式系

$$(H_{\{s_0,r_2\}}) \qquad V_j\vec{u}=A_{j+1}\vec{u}\,(j=0,1,2)$$

は一意化方程式になる．パラメータは s_0, r_2 である．定義より，$w_2=V_1w_1$, $w_3=V_2w_1$ である．$u=f_0^{-(s_0+2)/15}w_1$ として，$(H_{\{s_0,r_2\}})$ を $\vec{u}={}^t(u_1,u_2,u_3)={}^t(u,V_1u,V_2u)$ についての微分方程式系にすると，$(H_{\{-2,r_2\}})$ が得られる．

$(H_{\{-2,1\}})$ はモノドロミー群が $W(H_3)$ になる微分方程式系である．本質的には原岡-加藤 [14] によって求められている．これは§5 で議論していた場合でもある．

問題は $(H_{\{-2,r_2\}})$ の解を求めることであるが，かなり難しそうである．

$r_2=0$ の場合には $(H_{\{-2,r_2\}})$ は商をもつ．言い換えれば，微分方程式系

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} V_0u=-2u \\ V_1u=0 \\ \{V_2^2+4x_1^2(3x_2^2+2x_1x_3)\}u=0 \end{cases}$$

を考える．u がこの微分方程式系の解であれば，$\vec{u}={}^t(u,V_1u,V_2u)$ は $(H_{\{-2,0\}})$ の解になる．

(H) の解の構成については，はじめに導入した多項式 $P(t)$ を使った積分で表せるだろうと予想している．具体的には，適当な道 C に沿った定積分

$$\int_C P(t)^{-1/2}dt$$

が (H) の解になるだろうということである．

この予想を支持する計算結果を与える．(H) を超平面 $x_1=0$ に制限すると，x_3 についての微分方程式

$$\left(\partial_{x_3}^2+\frac{60x_3^2}{27x_2^5+20x_3^3}\partial_{x_3}+\frac{64x_3}{5(27x_2^5+20x_3^3)}\right)u=0$$

を得る．簡単な計算によって

$$\frac{1}{x_2}F\left(\frac{2}{15},\frac{8}{15},\frac{2}{3};-\frac{20x_3^3}{27x_2^5}\right)$$

はこの微分方程式の解になる．他方，

$$Q(t)=t^6-25x_2t^3-50x_3t+\frac{125}{4}x_2^2$$

とおく．これは $P(t)$ を x_1,x_2,x_3 の多項式とみて，$P(t)|_{x_1=0}$ とすることで得られる．すると直接計算によって，

$$\begin{aligned}&\left(\partial_{x_3}^2+\frac{60x_3^2}{27x_2^5+20x_3^3}\partial_{x_3}+\frac{64x_3}{5(27x_2^5+20x_3^3)}\right)Q(t)^{-1/2}\\ =\ &\partial_t\left\{\frac{5(12x_2x_3t^4-18x_2^3t^3-40x_3^2t^2-210x_2^2x_3t+225x_2^4)}{2(27x_2^5+20x_3^3)}Q(t)^{-3/2}\right.\\ &\left.+\frac{18x_2t^3-160x_3t-225x_2^2}{25(27x_2^5+20x_3^3)}Q(t)^{-1/2}\right\}\end{aligned}$$

がわかる．結果として，適当な道 C をとれば，定数倍を除いて

$$\frac{1}{x_2}F(\left(\frac{2}{15},\frac{8}{15},\frac{2}{3};-\frac{20x_3^3}{27x_2^5}\right)=\int_C\frac{dt}{(t^6-25x_2t^3-50x_3t+\frac{125}{4}x_2^2)^{1/2}}$$

が成り立つことはもっともらしい．同じようにして，(H) を超曲面 $x_2=\frac{2}{5}x_1^3$ に制限することで，微分方程式

$$\left(\partial_{x_3}^2+\frac{50(8x_1^5+25x_3)}{(8x_1^5-25x_3)(24x_1^5+25x_3)}\partial_{x_3}-\frac{750(4x_1^5-5x_3)}{(8x_1^5-25x_3)^2(24x_1^5+25x_3)}\right)u=0$$

を得る．η を $\eta=\frac{8x_1^5-25x_3}{32x_1^5}$ のよって定義すれば，$F\left(\frac{8}{15},\frac{2}{15};\frac{2}{3};\eta\right)$ がこの微分方程式の解になることがわかる．したがって，この場合にも適当な道 C をとれば

$$F\left(\frac{8}{15},\frac{2}{15};\frac{2}{3};\eta\right)=\int_C\frac{dt}{(P(t)|_{x_2\to2x_1^3/5})^{1/2}}$$

が成り立つことはもっともらしい．

実は $x_1=0$ や $x_2=\frac{2}{5}x_1^3$ に制限することなく，$\{V_2^2+4x_1^2(3x_2^2+2x_1x_3)\}P^{-1/2}=\partial_tR(t,x)$ の形の等式が成り立つ．(H) の解が $P(t)$ を使った式の定積分表示をもとだろうという予想を立て，そのような多項式を探して，それをクラインの著書に見出したのだが，このアイデアは，斎藤 [19] にある．そこでは A_3 型の場合にこの小節と平行した議論が展開されている．逆にみれば，ユニタリ鏡映群の場合の一意化方程式系，あるいはより一般に斎藤自由因子に関する一意化方程式系の中で [19] の議論が適用できる場合があるかどうかを調べることは，一意化方程式系の解の構成を考える上で大変重要な問題であろうと思われる．

§7.4. ユニタリ鏡映群 G_{336} の判別式の場合

G_{336} はクラインの 4 次曲線と関係する群である．この場合に一意化微分方程式系をあたえる．

まず次の 7 次多項式からはじめる．

$$\begin{aligned}P(t)\ =\ &t^7-\tfrac{7}{2}(c_1-1)x_1t^5-\tfrac{7}{2}(c_1-1)x_2t^4-7(c_1+4)x_1^2t^3-14(c_1+2)x_1x_2t^2\\ &+\tfrac{7}{2}\{(3c_1-7)x_1^3-(c_1+5)x_2^2\}t+\tfrac{1}{2}(7c_1-131)x_1^2x_2+x_3\\ &(c_1^2=-7)\end{aligned}$$

$P(t)$ の判別式は f_0^2 である．ただし，f_0 は次の式である．

$$\begin{aligned}f_0\ =\ &2048x_1^9x_2-22016x_1^6x_2^3+60032x_1^3x_2^5-1728x_2^7+256x_1^7x_3-1088x_1^4x_2^2x_3\\ &-1008x_1x_2^4x_3+88x_1^2x_2x_3^2-x_3^3\end{aligned}$$

f_0 はユニタリ鏡映群 G_{336} の判別式である．($P(t)$ はクライン全集第 II 巻 406 ページに与えられているものと本質的に同じである．f_0 もクラインが求めている．)

ベクトル場 V_0, V_1, V_2 を

$$ {}^t(V_0, V_1, V_2) = M\,{}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) $$

で定義する．ここで

$$ M = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 & 7x_3 \\ x_2^2 & -\frac{1}{12}x_3 & -\frac{4}{3}x_1(28x_1^3x_2 - 128x_2^3 + 3x_1x_3) \\ 7x_3 & -56x_1(2x_1^3 - 13x_2^2) & 28(32x_1^6 - 40x_1^3x_2^2 - 84x_2^4 + 59x_1x_2x_3) \end{pmatrix} $$

である．V_0, V_1, V_2 は $f_0 = 0$ に沿って対数的なベクトル場の生成系である．次の関係式は簡単に示せる．

$$ [V_0, V_1] = 4V_1,\ [V_0, V_2] = 5V_2,\ [V_1, V_2] = \frac{7}{3}(-8x_1^3x_2 + 76x_2^3 - 5x_1x_3)V_0 - 616x_1x_2V_1 - \frac{2}{3}x_1^2V_2 $$

$$ V_0f_0 = 21f_0,\ V_1f_0 = -\frac{14}{3}x_1^2f_0,\ V_2f_0 = 3724x_1x_2f_0 $$

行列 A_1, A_2, A_3 を次であたえる．

```
A1={{s0, 0, 0}, {0, s0 + 4, 0}, {0, 0, s0 + 5}};
A2={{0, 1, 0},
    {1/162*x1*(4*(-1+c4-s0)*(8+c4+2*s0)*x1^3-3*(24+43*c4+5*c4^2+24*s0+19*c4*s0)*x2^2),
     1/9*(-10+c4-4*s0)*x1^2, (c4*x2)/504},
    {-7/54*(8*(-152+37*c4+7*c4^2-172*s0-14*c4*s0-38*s0^2)*x1^3*x2-
     18*(8*c4+c4^2+76*s0)*x2^3+3*(8+c4+38*s0)*x1*x3), -14/3*(-20+5*c4-38*s0)*x1*x2,
     -1/9*(8+c4+2*s0)*x1^2}};
A3={{0, 0, 1},
    {-7/54*(8*(-152+37*c4+7*c4^2-190*s0-14*c4*s0-38*s0^2)*x1^3*x2-
     18*c4*(8+c4)*x2^3+3*(8+c4+8*s0)*x1*x3), -14/3*(-152+5*c4-38*s0)*x1*x2,
     -1/9*(2+c4+2*s0)*x1^2},
    {98/9*(48*(-24+5*c4+c4^2-36*s0-c4*s0)*x1^5+4*(-440+97*c4+19*c4^2-658*s0-89*c4*s0-
     722*s0^2)*x1^2*x2^2+3*(8+c4+38*s0)*x2*x3), -1176*(-2+c4)*(2*x1^3-x2^2),
     14/3*(190+5*c4+76*s0)*x1*x2}};
```

これらの行列から一意化方程式系を定義できる．$\vec{w} = {}^t(w_1, w_2, w_3)$ に対して微分方程式系

$$ (K_{\{s_0,c_4\}}) \quad V_j\vec{w} = A_{j+1}\vec{w} \quad (j = 0, 1, 2) $$

がひとつの一意化方程式系である．s_0, c_4 はパラメータである．定義より，$w_2 = V_1$, $w_3 = V_2w_1$ が成り立つ．$u = f_0^{-(s_0+1)/21}w_1$ として，$(K_{\{s_0,c_4\}})$ を $\vec{u} = {}^t(u, V_1u, V_2u)$ についての微分方程式にすると，$(K_{\{-1,c_4\}})$ が得られる．

$(K_{\{-1,-9\}})$ はモノドロミー群が G_{336} になる微分方程式系である．§7.3 において言及したことだが，この微分方程式は本質的には原岡-加藤 [14] によって求められている．

一方では，$(K_{\{-1,c_4\}})$ の解を構成することだが，$c_4 = 0$ ときは §7.3 と同じく少し構造が簡単になる．A_j に $s_0 = -1, c_4 = 0$ を代入すると次の $A_j^{(0)}$ が得られる：

$$ A_0^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad A_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}x_1^2 & 0 \\ \frac{7}{3}(8x_1^3x_2 - 76x_2^3 + 5x_1x_3) & -84x_1x_2 & -\frac{2}{3}x_1^2 \end{pmatrix}, $$

$$ A_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 532x_1x_2 & 0 \\ 196(32x_1^5 - 112x_1^2x_2^2 - 5x_2x_3) & 2352(2x_1^3 - x_2^2) & 532x_1x_2 \end{pmatrix} $$

このとき，$(K_{\{-1,0\}})$ は

$$ V_j\begin{pmatrix} u \\ V_1u \\ V_2u \end{pmatrix} = A_j^{(0)}\begin{pmatrix} u \\ V_1u \\ V_2u \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, 2) $$

であたえられ，これは $V_1u=0$ であたえられる商をもつ．実際，$V_1u=0$ とすれば，$\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix}$ に対する方程式系は次のようになる．

$$
(3)\quad \begin{cases}
V_0\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix} \\
V_1\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{3}(8x_1^3x_2-76x_2^3+5x_1x_3) & -\frac{2}{3}x_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix} \\
V_2\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 196(32x_1^5-112x_1^2x_2^2-5x_2x_3) & 532x_1x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ V_2u \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$P(t)$ を導入した理由は次の予想であった．つまり，道 C を適当にとれば定積分で定義される (x_1,x_2,x_3) の関数

$$\int_C P(t)^{-2/7}dt$$

は (3) の解になるだろう．この根拠は前小節の議論である．しかしながら，この予想の形では成り立たないようである．

微分方程式系 (3) の制限を調べる．

(R1) 超平面 $x_1=0$ への制限

この場合，(3) から

$$\left(\partial_{x_3}^2+\frac{18x_3^2}{7(1728x_2^7+x_3^3)}\partial_{x_3}+\frac{10x_3}{49(1728x_2^7+x_3^3)}\right)u=0$$

が得られる．これはガウスの超幾何微分方程式に還元される．ひとつの解は

$$x_2^{-1/3}F\left(\frac{1}{21},\frac{10}{21};\frac{2}{3};-\frac{x_3^3}{1728x_2^7}\right)$$

で表される．

(R2) 超平面 $x_2=0$ への制限

この場合，(3) から

$$\left(\partial_{x_3}^2-\frac{256x_1^7+11x_3^2}{7x_3(256x_1^7-x_3^2)}\partial_{x_3}+\frac{3}{49(-256x_1^7+x_3^2)}\right)u=0$$

が得られる．ひとつの解は

$$x_1^{-1/2}F\left(\frac{1}{14},\frac{3}{14};\frac{3}{7};\frac{x_3^2}{256x_1^7}\right)$$

で表される．

$(K_{\{s_0,c_4\}})$ のモノドロミー群が G_{336} になる場合に，$x_1=0$ や $x_2=0$ に制限したものを扱うと F. クラインの考察していたことと結びつきがでてくる．G_{336} の標準表現空間の線形座標系 $t=(t_1,t_2,t_3)$ を上手にとれば，$x_1=t_1^3t_2+t_2^3t_3+t_3^3t_1$ にとれる．このとき，$x_1=0$ はクラインの 4 次曲線 $t_1^3t_2+t_2^3t_3+t_3^3t_1=0$ になる．一方では，$(K_{\{s_0,c_4\}})$ を $x_1=0$ に制限して得られる微分方程式は一般超幾何関数 ${}_3F_2$ を解にもつ．この議論は §7.2 のときと平行している．この一般超幾何関数は Halphan[13] と A.Hurwitz [15] によって決定されている．この一般超幾何関数を並べて写像を作れば，$\mathbf{P}^2$ のクラインの 4 次曲線 $t_1^3t_2+t_2^3t_3+t_3^3t_1=0$ から $\mathbf{P}^2$ への埋め込み写像を構成できる．この写像はクラインの 4 次曲線 $t_1^3t_2+t_2^3t_3+t_3^3t_1=0$ の一意化をあたえている．$x_2=0$ のときも同じようにして，一般超幾何関数をつかって，$\mathbf{P}^2$ の 6 次曲線から $\mathbf{P}^2$ への埋め込み写像を構成できる．

注意 7.4.1. G_{336} の判別式と関連した話題をいくつか挙げておく．

$$P(t)=t^7+x_1t^5+\frac{25}{28}x_1^2t^3+x_2t^4+\frac{5}{7}x_1x_2t^2+\frac{4}{7}x_2^2t+x_3$$

とおく．多項式 $P(t)$ の判別式は f_{K5}^2 の形になる．ただし，f_{K5} は次式で定められた x_1, x_2, x_3 の多項式である．

$$\begin{aligned} f_{K5} \;=\; & -80000x_1^6x_2^3 - 2367792x_1^3x_2^5 - 35271936x_2^7 + 525000x_1^7x_3 + 15820875x_1^4x_2^2x_3 \\ & +336063168x_1x_2^4x_3 - 635304600x_1^2x_2x_3^2 + 2490394032x_3^3 \end{aligned}$$

f_{K5} も斎藤自由因子になる．

G_{336} の判別式も f_{K5} も，変数 x_1, x_2, x_3 に重み $2, 3, 7$ をあたえて次数を 21 とした重みつき斉次多項式であり，しかも斎藤自由因子を定義する．一般に，変数 x_1, x_2, x_3 に重み $2, 3, 7$ をつけ，$x_1 = 0$ のときに (定数倍の座標変換を除いて) $x_2^7 + x_3^3$ となる多項式でその零点集合が定める超曲面が斎藤自由因子になるものは 8 種類あり，それらは下のものである．G_{336} の判別式は重みつき座標変換によって $kn6$ になる．$kn1, \ldots, kn7$ は係数が実数だが，$kn8$ の場合だけは複素数である．$kn6$ のときには対応する一意化方程式系が存在するが，その他では $kn2$ のときにも対応する一意化方程式系を構成できた．他の場合には一意化方程式系は存在しない．f_{K5} は座標変換によって f_{kn5} に移る．ここで，一意化方程式系が存在することは，捩じれののない積分可能な接続で条件 (D3) を満たすものが存在するという意味で使用したことに注意しておく．

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
kn1 = x1^6*x2^3/32+3*x1^3*x2^5/28+3*x2^7/49-3/16*x1^4*x2^2*x3-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn2 = -1/864*x1^6*x2^3+5*x1^3*x2^5/84+3*x2^7/49-1/48*x1^4*x2^2*x3-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn3 = x1^3*x2^5/21+3*x2^7/49-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn4 = 3*x2^7/49-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn5 = 78125*x1^9*x2/200120949+44375*x1^6*x2^3/4840416+107*x1^3*x2^5/1372+3*x2^7/49-
      6250*x1^7*x3/3176523-1375*x1^4*x2^2*x3/16464-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn6 = (64*x1^9*x2)/823543+(208*x1^6*x2^3)/453789+(68*x1^3*x2^5)/1029+(3*x2^7)/49+
      (48*x1^7*x3)/117649-(40*x1^4*x2^2*x3)/1029-(3/7)*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn7 = -448*x1^9*x2/243+16*x1^6*x2^3/9-4*x1^3*x2^5/7+3*x2^7/49-112*x1^7*x3/27+
      8/3*x1^4*x2^2*x3-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
kn8 = -752*x1^9*x2/823543-(2017*I*x1^9*x2)/(823543*Sqrt[3])-397*x1^6*x2^3/33614+
      (323*I*Sqrt[3]*x1^6*x2^3)/33614+39*x1^3*x2^5/686+(9/686)*I*Sqrt[3]*x1^3*x2^5+
      3*x2^7/49+1763*x1^7*x3/235298-(249*I*Sqrt[3]*x1^7*x3)/235298+3/686*x1^4*x2^2*x3-
      37/686*I*Sqrt[3]*x1^4*x2^2*x3-3/7*x1*x2^4*x3+x3^3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

§7.5. ユニタリ鏡映群 G_{2160} の場合

この場合，t の 6 次多項式

$$P(t) = t^6 + y_1t^5 + y_2t^4 + y_3t^3 + y_4t^2 + y_5t + y_6$$

から出発する．係数 y_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ を次のような x_j $(j = 1, 2, 3)$ の多項式になるようにする．

```
y1=x1
y2=(5/16)*(9 + sr)*x2,
y3=(5/64)*(11 + 3*sr)*x1*x2,
y4=(5/512)*(37 + 45*sr)*x2^2,
y5=(61 + 5*sr)*(-64*x1^3*x2 + 373*x1*x2^2 + 15*sr*x1*x2^2 + 2*x3))/12288,
y6=(-279 + 145*sr)*(-512*x1^4*x2 + 2864*x1^2*x2^2 + 1425*x2^3 + 135*sr*x2^3 +
                     16*x1*x3)/3538944,
```

ただし，$sr^2 = -15$ とする．

このとき，$P(t)$ の判別式は f_0^2 になる．ここで f_0 は次の多項式である：

$$\begin{aligned} f_0 \;=\; & 65536x_1^{11}x_2^2 - 1765376x_1^9x_2^3 + 17406016x_1^7x_2^4 - 73887360x_1^5x_2^5 + 107371008x_1^3x_2^6 \\ & +34338816x_1x_2^7 - 4096x_1^8x_2x_3 + 96640x_1^6x_2^2x_3 - 707952x_1^4x_2^3x_3 + 1622592x_1^2x_2^4x_3 \\ & +186624x_2^5x_3 + 64x_1^5x_3^2 - 1584x_1^3x_2x_3^2 + 7128x_1x_2^2x_3^2 + 9x_3^3 \end{aligned}$$

多項式 f_0 はユニタリ鏡映群 G_{2160} の判別式とみなせる．(この判別式は原岡-加藤 [14] からとった．) とくに，f_0 は次の行列の行列式に一致する．

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & 5x_3 \\ x_2^2 & \frac{1}{432}(144x_1x_2^2 - x_3) & \begin{array}{c}\frac{1}{108}(640x_1^6x_2 - 9388x_1^4x_2^2 + 36600x_1^2x_2^3 \\ -19872x_2^4 - 28x_1^3x_3 + 307x_1x_2x_3)\end{array} \\ x_3 & \begin{array}{c}\frac{1}{135}(-1920x_1^4x_2 + 8724x_1^2x_2^2 \\ +16416x_2^3 + 139x_1x_3)\end{array} & \begin{array}{c}-\frac{4}{135}x_1(65920x_1^6x_2 - 887092x_1^4x_2^2 + 2886120x_1^2x_2^3 \\ +367632x_2^4 - 2692x_1^3x_3 + 20533x_1x_2x_3)\end{array} \end{pmatrix}$$

ベクトル場 V_0, V_1, V_2 を次で定義する．

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix}$$

すると，V_0, V_1, V_2 は $D : f_0 = 0$ に沿って対数的ベクトル場のなすリー環の生成系になる．直接計算によって

$$[V_0, V_1] = 3V_1, [V_0, V_2] = 4V_2$$

$$\begin{aligned}[V_1, V_2] &= \frac{1}{540}(3200x_1^5x_2 - 16412x_1^3x_2^2 - 18056x_1x_2^3 - 80x_1^2x_3 - 307x_2x_3)V_0 \\ &\quad -\frac{8}{135}(474x_1^4 - 4102x_1^2x_2 + 7209x_2^2)V_1 - \frac{1}{54}x_1(6x_1^2 - 73x_2)V_2\end{aligned}$$

$$V_0f_0 = 15f_0, \quad V_1f_0 = -\frac{5}{108}x_1(8x_1^2 - 105x_2)f_0, \quad V_2f_0 = \frac{4}{27}(632x_1^4 - 4875x_1^2x_2 + 5346x_2^2)f_0$$

少し長いが行列 A_1, A_2, A_3 を次であたえる．(A_1, A_2, A_3 の計算には神戸大学の野呂正行教授にお世話になった．)

```
A1={{s0, 0, 0}, {0, 3+s0, 0}, {0, 0, 4+s0}};
A2={{0, 1, 0},
    {1/2099520*(320*(1+1728*h1-4*s0)*(3+864*h1+s0)*x1^6-
     120*(47+58752*h1-280*s0)*(3+864*h1+s0)*x1^4*x2+36*(2115+2967840*h1+
     679311360*h1^2-15870*s0-2515104*h1*s0-6125*s0^2)*x1^2*x2^2-
     3888*(15+30240*h1+7464960*h1^2-175*s0+28512*h1*s0)*x2^3+45*(3+864*h1-35*s0)*
     x1*x3), -1/810*x1*((55+42768*h1+40*s0)*x1^2-3*(255+83376*h1+175*s0)*x2),
     -1/6*h1*(x1^2-6*x2)},
    {1/656100*(-25280*(1+1728*h1-4*s0)*(3+864*h1+s0)*x1^7+120*(9879+16458336*h1+
     3920596992*h1^2-42907*s0-16232832*h1*s0-17560*s0^2)*x1^5*x2-
     36*(123660+210094560*h1+50250378240*h1^2-721860*s0-210720096*h1*s0-
     308135*s0^2)*x1^3*x2^2+1944*(345+3546720*h1+992839680*h1^2-14815*s0+
     6258816*h1*s0-5775*s0^2)*x1*x2^3-45*(147+42336*h1-1625*s0)*x1^2*x3-
     3645*(5+1440*h1+44*s0)*x2*x3), (4*(316*(-15+25704*h1+10*s0)*x1^4-
     3*(-16645+15303168*h1+8125*s0)*x1^2*x2-2430*(56+1440*h1-11*s0)*x2^2))/2025,
     (x1*(2*(-85+42768*h1-20*s0)*x1^2-3*(-715+166752*h1-175*s0)*x2))/1620}};
A3={{0, 0, 1},
    {1/656100*(-25280*(1+1728*h1-4*s0)*(3+864*h1+s0)*x1^7+120*(9879+16458336*h1+
     3920596992*h1^2-75307*s0-16232832*h1*s0-17560*s0^2)*x1^5*x2-36*(123660+
     210094560*h1+50250378240*h1^2-1275765*s0-210720096*h1*s0-308135*s0^2)*x1^3*x2^2+
     1944*(345+3546720*h1+992839680*h1^2-3530*s0+6258816*h1*s0-5775*s0^2)*x1*x2^3-
     45*(147+42336*h1-3785*s0)*x1^2*x3-6075*(3+864*h1-35*s0)*x2*x3), 4*(632*(15+
     12852*h1+5*s0)*x1^4-3*(24375+15303168*h1+8125*s0)*x1^2*x2-2430*(-33+1440*h1-
     11*s0)*x2^2)/2025, x1*(2*(5+42768*h1-20*s0)*x1^2-3*(15+166752*h1-
     175*s0)*x2)/1620}, {1/820125*(4*(1997120*(1+1728*h1-4*s0)*(3+864*h1+s0)*x1^8-
     120*(680901+1246968864*h1+302650380288*h1^2-3612193*s0-1421635968*h1*s0-
     1027000*s0^2)*x1^6*x2+36*(6514065+14746523040*h1+3706696028160*h1^2-67397805*s0-
     17324851104*h1*s0-16957205*s0^2)*x1^4*x2^2-972*(-235065+392096160*h1+
     132420925440*h1^2-3712385*s0+1286813088*h1*s0-1072500*s0^2)*x1^2*x2^3+
```

```
1574640*(5+1440*h1-11*s0)*(-5+8640*h1+33*s0)*x2^4+45*(4503+1296864*h1-
144155*s0)*x1^3*x3+3645*(740+213120*h1+5891*s0)*x1*x2*x3)),
-16*(49928*(-25+60048*h1)*x1^5-192*(-44815+84795282*h1)*x1^3*x2-
1620*(4469+1982880*h1)*x1*x2^2+180225*x3)/10125,
-8*(632*(-10+6426*h1-5*s0)*x1^4-3*(-16250+7651584*h1-8125*s0)*x1^2*x2-
2430*(22+720*h1+11*s0)*x2^2)/2025}};
```

これらの行列から一意化方程式系を定義できる．$\vec{w}={}^t(w_1,w_2,w_3)$ に対して微分方程式系

$$(V_{\{s_0,h_1\}})\quad V_j\vec{w}=A_{j+1}\vec{w}\quad (j=0,1,2)$$

がひとつの一意化方程式系である．s_0,h_1 は媒介変数である．

$s_0=\frac{1}{6}$, $h_1=-\frac{19}{5184}$ のときには，この方程式系のモノドロミー群は G_{2160} になる．この微分方程式は本質的には原岡-加藤 [14] によって求められている．L.Lachtin [17] はこの一意化方程式を $x_1=0$ に制限して得られる常微分方程式は

$$ {}_3F_2\left(\frac{7}{30},\frac{13}{30},\frac{5}{6};\frac{3}{4},\frac{5}{4};J\right)$$

を解にもつことを示している．

$(V_{\{s_0,h_1\}})$ の定義より，$w_2=V_1$, $w_3=V_2w_1$ が成り立つ．$u=f_0^{-(s_0+3)/15}w_1$ として，$(V_{\{s_0,h_1\}})$ を $\vec{u}={}^t(u,V_1u,V_2u)$ についての微分方程式にすると，$(V_{\{-3,h_1\}})$ が得られる．

$h_1=0$ のときには，$(V_{\{-3,h_1\}})$ は商をもつ．実際，

$$(V)\quad\left\{\begin{array}{ccc} V_1u & = & \frac{1}{162}x_1(13x_1^2-162x_2)u\\ V_j\begin{pmatrix}u\\ V_2u\end{pmatrix} & = & B_{j+1}\begin{pmatrix}u\\ V_2u\end{pmatrix}\quad (j=0,1,2)\end{array}\right.$$

がそうである．ここで，B_j $(j=1,2,3)$ は次の行列である．

```
B1={{-3, 0}, {0, 1}};
B2={{1/162*x1*(13*x1^2-162*x2), 0},
   {1/43740*(-98592*x1^7+1926304*x1^5*x2-10970316*x1^3*x2^2+17754552*x1*x2^3-
    15066*x1^2*x3+30861*x2*x3), -1/162*x1*(5*x1^2-57*x2)}};
B3={{0, 1},
   {1/164025*(4*(6490640*x1^8-180214176*x1^6*x2+999084132*x1^4*x2^2-
    712058040*x1^2*x2^3-1244595456*x2^4+2995542*x1^3*x3-665577*x1*x2*x3)),
   -8/405*(632*x1^4-4875*x1^2*x2+5346*x2^2)}};
```

この小節のはじめにあたえた 6 次多項式の係数 $y_1,\dots,y_6$ を x_1,x_2,x_3 の式におきかえて得られる多項式を $Q(t)$ としたとき，方程式系 (V) と $Q(t)$ との関係だが，適当な有理数 r をとり，適当な道 C をとれば

$$u(x_1,x_2,x_3)=\int_C Q(t)^r dt$$

の形の関数が (V) の解になるだろうと予想して，$Q(t)$ を求めた．計算してみると，このままでは予想は成り立たないようである．何らかの修正が必要と思われる．

§8. 17 種類の斎藤自由因子と一意化微分方程式

定理 2.3 で求めた 17 種類の多項式から定義できる斎藤自由因子に関する捩れのない積分可能な接続が存在するかどうかを調べ，存在する場合にそれらをすべて分類することは興味深い問題である．この節では，条件 (D3) を満たすそのような接続を決定したので，その結果を報告する．条件 (D3) をつけないと分類が煩雑になり，しかも応用上おもしろいのはこの条件をつけたものである．

定理 8.1. 17 種類の多項式の中で，対応する斎藤自由因子が条件 (D3) を満たす捩れのない積分可能な接続が存在する多項式は

$$F_{A,1},F_{B,1},F_{B,2},F_{B,3},F_{B,4},F_{B,6},F_{H,1},F_{H,2},F_{H,3}$$

である．

注意 8.2. F を定理 2.3 で求めた 17 種類の多項式のひとつとする．このとき，$\mathbf{C}^3$ における斎藤自由因子 $D : F = 0$ の補集合 $Z = \mathbf{C}^3 - D$ の基本群は斎藤-石部 [23] によって決定されている．その結果をみると，$F = F_{B,5}, F_{B,7}, F_{H,4}, F_{H,5}, F_{H,6}, F_{H,7}, F_{H,8}$ の場合には，$\pi(Z,*) = \mathbf{Z}$ になり，残りの場合には $\pi(Z,*) \neq \mathbf{Z}$ となる．これから次のことが観察される．すなわち，F を 17 種類の多項式のひとつとして，対応する斎藤自由因子が条件 (D3) を満たす捩れのない積分可能な接続が存在すれば，$\pi(Z,*) \neq \mathbf{Z}$ が成り立つ．しかし，逆は成り立たない．実際，$F = F_{A,2}$ の場合には，$\pi(Z,*) \neq \mathbf{Z}$ が成り立ち，しかも条件 (D3) を満たす捩れのない積分可能な接続は存在しない．$F = F_{A,2}$ の場合に捩れのない積分可能な接続は存在しないことは，すでに Aleksandrov [3] において指摘されていた．

このノートの主要な結果は，

$$F_{A,1}, F_{B,1}, F_{B,2}, F_{B,3}, F_{B,4}, F_{B,6}, F_{H,1}, F_{H,2}, F_{H,3}$$

に場合に，条件 (D3) を満たす捩れのない積分可能な接続をすべて分類したことである．少々長くなるが下に行列の組 A_1, A_2, A_3 をあたえた．もとになる多項式 $F_{A,1}, \ldots, F_{H,8}$ と対応する行列 M は §2 で与えてある．(x, y, z は x1,x2,x3 に置き換えてある．)

```
%%% F_{A,1} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{s0,0,0},{0,1+s0,0},{0,0,2+s0}};
A2={{0,1,0},{(-(1/6))*b3*(-2+2*b3+s0)*x1,0,b3},
    {(-(1/4))*(-b3+b3^2-2*s0)*x2,(-(1/6))*(2+b3-s0)*x1,0}};
A3={{0,0,1},{(-(1/4))*(-1+b3)*b3*x2,(-(1/6))*(-1+b3-s0)*x1,0},{1/36*((-1-b3+2*b3^2-
     2*s0-b3*s0-s0^2)*x1^2+(-12+12*b3+24*s0)*x3),-1/4*(1+b3)*x2,1/6*(2+b3+2*s0)*x1}};
(II)
A1={{s0,0,0},{0,1+s0,0},{0,0,2+s0}};
A2={{0,1,0},{(-(1/6))*(8-2*b3+b3*s0)*x1,0,b3},{((2-2*b3+b3*s0)*x2)/(2*b3),
     (-4-2*b3+b3*s0)*x1/(6*b3),0}};
A3={{0,0,1},{-(-1+b3)*x2/b3,(-4+b3+b3*s0)*x1/(6*b3),0},{-((4+4*b3-8*b3^2+4*b3*s0+
     2*b3^2*s0+b3^2*s0^2)*x1^2+(-144-48*b3+48*b3^2-24*b3^2*s0)*x3)/(36*b3^2),
     -(1+b3)*x2/b3^2,(2+b3+b3*s0)*x1/(3*b3)}};

%%% F_{B,1} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/3*(-3*q4*r3*x1^2+3*r3^2*x1^2-2*r2*x2+p1*r2*x2+3*q4*r2*x2+2*r2^2*x2+6*r3*x2-
     9*r2*r3*x2),q4*x1,r2},{1/3*(r3*x1*x2+p1*r3*x1*x2-3*q4*r3*x1*x2-r2*r3*x1*x2+
     3*r3^2*x1*x2-3*p1*x3-6*r2*x3+9*q4*r2*x3+6*r2^2*x3+9*r3*x3-18*r2*r3*x3),
     -1/3*(1+p1-3*q4-r2+3*r3)*x2,(1+r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/3)*(r3*x1*x2+p1*r3*x1*x2-3*q4*r3*x1*x2-r2*r3*x1*x2+3*r3^2*x1*x2-6*r2*x3+
     9*q4*r2*x3+6*r2^2*x3+9*r3*x3-18*r2*r3*x3),-1/3*(1+p1-3*q4-r2+3*r3)*x2,r3*x1},
    {1/9*(2*x2^2+p1*x2^2-p1^2*x2^2-9*q4*x2^2+9*q4^2*x2^2-4*r2*x2^2-p1*r2*x2^2+9*q4*r2*x2^2+
     2*r2^2*x2^2+15*r3*x2^2+6*p1*r3*x2^2-36*q4*r3*x2^2-15*r2*r3*x2^2+27*r3^2*x2^2-6*x1*x3-
     6*p1*x1*x3+27*q4*x1*x3-27*q4^2*x1*x3+6*r2*x1*x3-18*q4*r2*x1*x3-27*r3*x1*x3+81*q4*r3*x1*x3+
     18*r2*r3*x1*x3-54*r3^2*x1*x3),(-1+3*q4+2*r2-6*r3)*x3,-1/3*(-1+2*p1+r2-6*r3)*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/3*(-3*q4*r3*x1^2+3*r3^2*x1^2+2*q4*x2-2*q4^2*x2+p1*r2*x2-q4*r2*x2+2*r3*x2+
     8*q4*r3*x2-r2*r3*x2-8*r3^2*x2),q4*x1,r2},{-1/(3*r2)*(q4*r3*x1*x2-q4^2*r3*x1*x2-
     p1*r2*r3*x1*x2+q4*r2*r3*x1*x2-2*r3^2*x1*x2+4*q4*r3^2*x1*x2+r2*r3^2*x1*x2-4*r3^3*x1*x2+
     3*q4^2*x3-3*q4^3*x3+3*p1*r2*x3-3*q4*r2*x3-12*q4*r3*x3+18*q4^2*r3*x3-3*r2*r3*x3+12*r3^2*x3-
     36*q4*r3^2*x3+24*r3^3*x3),(q4-q4^2-p1*r2+q4*r2-2*r3+4*q4*r3+r2*r3-4*r3^2)*x2/(3*r2),
     (1+r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-((1/(3*r2))*(q4*r3*x1*x2-q4^2*r3*x1*x2-p1*r2*r3*x1*x2+q4*r2*r3*x1*x2-
     2*r3^2*x1*x2+4*q4*r3^2*x1*x2+r2*r3^2*x1*x2-4*r3^3*x1*x2+3*q4^2*x3-3*q4^3*x3-3*q4*r2*x3-
     12*q4*r3*x3+18*q4^2*r3*x3-3*r2*r3*x3+12*r3^2*x3-36*q4*r3^2*x3+24*r3^3*x3)),((q4-q4^2-
     p1*r2+q4*r2-2*r3+4*q4*r3+r2*r3-4*r3^2)*x2)/(3*r2),r3*x1},{-((1/(9*r2^2))*(-2*q4^2*x2^2+
     4*q4^3*x2^2-2*q4^4*x2^2+p1*q4*r2*x2^2-q4^2*r2*x2^2-p1*q4^2*r2*x2^2+q4^3*r2*x2^2+
```

```
    p1^2*r2^2*x2^2-2*p1*q4*r2^2*x2^2+q4^2*r2^2*x2^2+8*q4*r3*x2^2-24*q4^2*r3*x2^2+
    16*q4^3*r3*x2^2-2*p1*r2*r3*x2^2+q4*r2*r3*x2^2+4*p1*q4*r2*r3*x2^2-3*q4^2*r2*r3*x2^2-
    2*p1*r2^2*r3*x2^2+2*q4*r2^2*r3*x2^2-8*r3^2*x2^2+48*q4*r3^2*x2^2-48*q4^2*r3^2*x2^2+
    2*r2*r3^2*x2^2-4*p1*r2*r3^2*x2^2 +r2^2*r3^2*x2^2-32*r3^3*x2^2+64*q4*r3^3*x2^2+
    4*r2*r3^3*x2^2-32*r3^4*x2^2+9*q4^2*x1*x3-18*q4^3*x1*x3+9*q4^4*x1*x3+3*q4*r2*x1*x3-
    3*q4^2*r2*x1*x3+6*p1*r2^2*x1*x3-6*q4*r2^2*x1*x3-27*q4*r3*x1*x3+90*q4^2*r3*x1*x3-
    63*q4^3*r3*x1*x3+3*r2*r3*x1*x3+3*q4*r2*r3*x1*x3-6*r2^2*r3*x1*x3+18*r3^2*x1*x3-
    144*q4*r3^2*x1*x3+162*q4^2*r3^2*x1*x3+6*r2*r3^2*x1*x3+72*r3^3*x1*x3-180*q4*r3^3*x1*x3+
    72*r3^4*x1*x3)),-(-1+q4-2*r3)*(q4-q4^2+r2-2*r3+4*q4*r3-4*r3^2)*x3/r2^2,
    -1/(3*r2)*((q4-q4^2+2*p1*r2-2*q4*r2-2*r3+4*q4*r3-2*r2*r3-4*r3^2)*x2)}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/4))*q4*(q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{(1/12)*(2*q4*x1*x2+2*p1*q4*x1*x2-
    3*q4^2*x1*x2-12*p1*x3+18*q4*x3),(-(1/6))*(2+2*p1-3*q4)*x2,(1/2)*(2+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/12)*q4*(2*x1*x2+2*p1*x1*x2-3*q4*x1*x2+18*x3),(-(1/6))*(2+2*p1-3*q4)*x2,
    q4*x1/2},{1/36*(8*x2^2+4*p1*x2^2-4*p1^2*x2^2-6*q4*x2^2+12*p1*q4*x2^2-9*q4^2*x2^2-
    24*x1*x3-24*p1*x1*x3+36*q4*x1*x3-18*q10*q4*x1*x3),q10*x3,-1/3*(-1+2*p1-3*q4)*x2}};
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/36))*(-1-q10+3*q4)*(x1^2+q10*x1^2+3*q4*x1^2-12*x2),q4*x1,0},
   {1/36*(-x1*x2-2*p1*x1*x2-2*p1*q10*x1*x2+q10^2*x1*x2+6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-
    9*q4^2*x1*x2-18*x3-36*p1*x3-18*q10*x3+54*q4*x3),-1/6*(1+2*p1-q10-3*q4)*x2,
    -1/6*(-5+q10-3*q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/36))*(1+q10-3*q4)*(x1*x2+2*p1*x1*x2-q10*x1*x2-3*q4*x1*x2+18*x3),
    -1/6*(1+2*p1-q10-3*q4)*x2,(-(1/6))*(1+q10-3*q4)*x1},
   {1/36*(x2^2-4*p1^2*x2^2-4*q10*x2^2-4*p1*q10*x2^2+3*q10^2*x2^2+12*p1*q4*x2^2+
    6*q10*q4*x2^2-9*q4^2*x2^2-12*x1*x3-24*p1*x1*x3+6*q10*x1*x3-6*q10^2*x1*x3+36*q4*x1*x3-
    18*q10*q4*x1*x3),q10*x3,(-(1/3))*(2*p1+q10-3*q4)*x2}};
(V)
A1={{{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/4*(-1+q4)*(x1^2+q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{1/2*(q5*x1*x2-q4*q5*x1*x2-2*x3-
    4*p1*x3+6*q4*x3-6*q5*x3),q5*x2,(1/2)*(1+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/2*(q5*x1*x2-q4*q5*x1*x2-2*x3-2*p1*x3+6*q4*x3-6*q5*x3),q5*x2,1/2*(-1+q4)*x1},
   {1/8*(4*q11*x1^2*x2-4*q11*q4*x1^2*x2-16*q11*x2^2+4*q5*x2^2+8*p1*q5*x2^2-12*q4*q5*x2^2+
    16*q5^2*x2^2-3*x1*x3-8*p1*x1*x3-4*p1^2*x1*x3+12*q11*x1*x3+9*q4*x1*x3+4*p1*q4*x1*x3-
    4*p1^2*q4*x1*x3+36*q11*q4*x1*x3+3*q4^2*x1*x3+12*p1*q4^2*x1*x3-9*q4^3*x1*x3-8*q5*x1*x3-
    24*p1*q5*x1*x3+12*q4*q5*x1*x3-24*p1*q4*q5*x1*x3+36*q4^2*q5*x1*x3-36*q5^2*x1*x3-
    36*q4*q5^2*x1*x3),1/4*(4*q11*x1*x2+3*x3+8*p1*x3+4*p1^2*x3-36*q11*x3-12*q4*x3-
    12*p1*q4*x3+9*q4^2*x3+24*q5*x3+24*p1*q5*x3-36*q4*q5*x3+36*q5^2*x3),
    -1/2*(1+2*p1-3*q4+2*q5)*x2}};
(VI)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/4*(-1+q4)*(x1^2+q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{1/12*(x1*x2-2*p1*x1*x2+2*q4*x1*x2+
    2*p1*q4*x1*x2-3*q4^2*x1*x2-18*x3-12*p1*x3+18*q4*x3),-1/6*(-1+2*p1-3*q4)*x2,1/2*(1+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/12*(-1+q4)*(-x1*x2+2*p1*x1*x2-3*q4*x1*x2+18*x3),-1/6*(-1+2*p1-3*q4)*x2,
    1/2*(-1+q4)*x1},{1/36*(4*x1^2*x2-2*q10*x1^2*x2-4*q4*x1^2*x2+2*q10*q4*x1^2*x2-11*x2^2-
    8*p1*x2^2-4*p1^2*x2^2+8*q10*x2^2+12*q4*x2^2+12*p1*q4*x2^2-9*q4^2*x2^2-12*x1*x3-24*p1*x1*x3-
    6*q10*x1*x3+36*q4*x1*x3-18*q10*q4*x1*x3),(1/9)*(2*x1*x2-q10*x1*x2+9*q10*x3),
    -1/3*(2+2*p1-3*q4)*x2}};
(VII)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/4*(-2+q4)*(2*x1^2+q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{1/12*(8*x1*x2-4*p1*x1*x2+2*q4*x1*x2+
    2*p1*q4*x1*x2-3*q4^2*x1*x2-36*x3-12*p1*x3+18*q4*x3),-1/6*(-4+2*p1-3*q4)*x2,q4*x1/2}};
A3={{0,0,1},{1/12*(-2+q4)*(-4*x1*x2+2*p1*x1*x2-3*q4*x1*x2+18*x3),-1/6*(-4+2*p1-3*q4)*x2,
    1/2*(-2+q4)*x1},{1/108*(-20*x1^4+4*q10*x1^4+10*q4*x1^4-2*q10*q4*x1^4+120*x1^2*x2-
    24*q10*x1^2*x2-60*q4*x1^2*x2+12*q10*q4*x1^2*x2-72*x2^2-60*p1*x2^2-12*p1^2*x2^2+
    48*q10*x2^2+90*q4*x2^2+36*p1*q4*x2^2-27*q4^2*x2^2-216*x1*x3-72*p1*x1*x3-36*q10*x1*x3+
    108*q4*x1*x3-54*q10*q4*x1*x3),1/27*(-5*x1^3+q10*x1^3+30*x1*x2-6*q10*x1*x2+27*q10*x3),
    -1/3*(5+2*p1-3*q4)*x2}};
(VIII)
```

```
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/9*(4*x1^2+2*q4*x1^2-2*q4^2*x1^2-4*r3*x1^2-q4*r3*x1^2+r3^2*x1^2-12*x2+3*p1*r2*x2-
     3*q4*r2*x2+18*r3*x2-3*r2*r3*x2),q4*x1,r2},{-1/(27*r2)*(-4*x1^3+3*q4^2*x1^3-q4^3*x1^3+
     6*r3*x1^3-9*q4*r3*x1^3+3*q4^2*r3*x1^3+6*r3^2*x1^3-4*r3^3*x1^3+12*x1*x2+6*q4*x1*x2-
     6*q4^2*x1*x2-30*r3*x1*x2+24*q4*r3*x1*x2-9*p1*r2*r3*x1*x2+9*q4*r2*r3*x1*x2-24*r3^2*x1*x2+
     9*r2*r3^2*x1*x2-54*q4*x3+27*p1*r2*x3-27*q4*r2*x3+108*r3*x3-27*r2*r3*x3),
     1/(9*r2)*(2*x1^2+q4*x1^2-q4^2*x1^2-2*r3*x1^2+4*q4*r3*x1^2-4*r3^2*x1^2-6*x2-3*p1*r2*x2+
     3*q4*r2*x2+3*r2*r3*x2),(1+r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/(27*r2)*(-4*x1^3+3*q4^2*x1^3-q4^3*x1^3+6*r3*x1^3-9*q4*r3*x1^3+3*q4^2*r3*x1^3+
     6*r3^2*x1^3-4*r3^3*x1^3+12*x1*x2+6*q4*x1*x2-6*q4^2*x1*x2-30*r3*x1*x2+24*q4*r3*x1*x2-
     9*p1*r2*r3*x1*x2+9*q4*r2*r3*x1*x2-24*r3^2*x1*x2+9*r2*r3^2*x1*x2-54*q4*x3-27*q4*r2*x3+
     108*r3*x3-27*r2*r3*x3),1/(9*r2)*(2*x1^2+q4*x1^2-q4^2*x1^2-2*r3*x1^2+4*q4*r3*x1^2-
     4*r3^2*x1^2-6*x2-3*p1*r2*x2+3*q4*r2*x2+3*r2*r3*x2),r3*x1},{-1/(81*r2^2)*(4*x1^4+4*q4*x1^4-
     3*q4^2*x1^4-2*q4^3*x1^4+q4^4*x1^4-14*r3*x1^4+3*q4*r3*x1^4+12*q4^2*r3*x1^4-5*q4^3*r3*x1^4+
     6*r3^2*x1^4-24*q4*r3^2*x1^4+6*q4^2*r3^2*x1^4+16*r3^3*x1^4+4*q4*r3^3*x1^4-8*r3^4*x1^4-
     24*x1^2*x2-12*q4*x1^2*x2+12*q4^2*x1^2*x2+6*p1*r2*x1^2*x2-6*q4*r2*x1^2*x2+
     3*p1*q4*r2*x1^2*x2-3*q4^2*r2*x1^2*x2-3*p1*q4^2*r2*x1^2*x2+3*q4^3*r2*x1^2*x2+60*r3*x1^2*x2-
     30*q4*r3*x1^2*x2-18*q4^2*r3*x1^2*x2-6*r2*r3*x1^2*x2-6*p1*r2*r3*x1^2*x2+3*q4*r2*r3*x1^2*x2+
     12*p1*q4*r2*r3*x1^2*x2-9*q4^2*r2*r3*x1^2*x2+12*r3^2*x1^2*x2+72*q4*r3^2*x1^2*x2+
     6*r2*r3^2*x1^2*x2-12*p1*r2*r3^2*x1^2*x2-72*r3^3*x1^2*x2+12*r2*r3^3*x1^2*x2+36*q4*x2^2-
     36*q4^2*x2^2-18*p1*r2*x2^2+18*q4*r2*x2^2+9*p1^2*r2^2*x2^2-18*p1*q4*r2^2*x2^2+
     9*q4^2*r2^2*x2^2-72*r3*x2^2+144*q4*r3*x2^2+18*r2*r3*x2^2-18*p1*r2^2*r3*x2^2+
     18*q4*r2^2*r3*x2^2-144*r3^2*x2^2+9*r2^2*r3^2*x2^2+108*x1*x3-108*q4*x1*x3+108*q4^2*x1*x3+
     27*q4*r2*x1*x3-27*q4^2*r2*x1*x3+54*p1*r2^2*x1*x3-54*q4*r2^2*x1*x3+54*r3*x1*x3-
     270*q4*r3*x1*x3+27*r2*r3*x1*x3+27*q4*r2*r3*x1*x3-54*r2^2*r3*x1*x3+108*r3^2*x1*x3+
     54*r2*r3^2*x1*x3),-1/(27*r2^2)*(2*x1^3+3*q4*x1^3-q4^3*x1^3-6*r3*x1^3+6*q4^2*r3*x1^3-
     12*q4*r3^2*x1^3+8*r3^3*x1^3-12*x1*x2-6*q4*x1*x2+6*q4^2*x1*x2+12*r3*x1*x2-24*q4*r3*x1*x2+
     24*r3^2*x1*x2+54*x3-54*q4*x3-27*r2*x3+27*q4*r2*x3+108*r3*x3-54*r2*r3*x3),
     1/(9*r2)*(-2*x1^2-q4*x1^2+q4^2*x1^2+2*r3*x1^2-4*q4*r3*x1^2+4*r3^2*x1^2+6*x2-
     6*p1*r2*x2+6*q4*r2*x2+6*r2*r3*x2)}};

%%% F_{B,2} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/3*(12*r3*x1^2-3*r3^2*x1^2+16*x2),2*(-2+r3)*x1,4},{-1/6*(-4+3*r3)*(r3*x1*x2-6*x3),
     r3*x2/2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/6*(-4+3*r3)*(r3*x1*x2-6*x3),1/6*(-4+3*r3)*x2,r3*x1},{1/36*(-16*r3*x1^2*x2-
     32*x2^2+36*r3*x2^2-9*r3^2*x2^2-72*r3*x1*x3),1/9*(4*x1*x2+9*x3),1/3*(-8+3*r3)*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-r3*(-4*x1^2+r3*x1^2-4*x2),2*(-2+r3)*x1,-4},{-1/6*r3*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),
     (1/6)*(-4+3*r3)*x2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/6))*r3*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),1/6*(-8+3*r3)*x2,r3*x1},
    {-1/36*r3*x2*(-8*x1^2-24*x2+9*r3*x2),1/9*(-2*x1*x2-9*x3),(-2+r3)*x2}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/3))*r3*(4+3*r3)*x1^2,(2/3)*(2+3*r3)*x1,4},
    {(-(1/18))*(4+3*r3)*(-4*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(1/6)*(4+3*r3)*x2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/18))*(4+3*r3)*(-4*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(r3*x2)/2,r3*x1},
    {(-(1/36))*(4+3*r3)*(-4*x2^2+3*r3*x2^2+12*x1*x3),0,(1/3)*(-2+3*r3)*x2}};
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/3))*(4+3*r3)*(r3*x1^2-4*x2),(2/3)*(2+3*r3)*x1,-4},
    {(-(1/18))*(4+3*r3)*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(r3*x2)/2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/18))*(4+3*r3)*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(1/6)*(-4+3*r3)*x2,r3*x1},
    {(-(1/12))*(4+3*r3)*(r3*x2^2+8*x1*x3),x3,r3*x2}};
(V)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/9*(32*x1^2+12*r3*x1^2-9*r3^2*x1^2+48*x2),2/3*(-2+3*r3)*x1,4},
    {1/54*(-32*x1^3-24*r3*x1^3-27*r3^2*x1*x2-216*x3+216*q10*x3+162*r3*x3),1/18*(8*x1^2+12*x2+
```

```
     9*r3*x2),1/3*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/54*(-32*x1^3-24*r3*x1^3-27*r3^2*x1*x2-216*x3+216*q10*x3+162*r3*x3),
     1/18*(8*x1^2+9*r3*x2),r3*x1},{1/324*(-64*x1^4-48*r3*x1^4-288*x1^2*x2-144*r3*x1^2*x2+
     216*r3*x2^2-81*r3^2*x2^2-864*x1*x3-324*r3*x1*x3-324*q10*r3*x1*x3),1/27*(4*x1^3+18*x1*x2+
     27*q10*x3),1/9*(-4*x1^2-18*x2+9*r3*x2)}};
(VI)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/9))*(4+3*r3)*(-8*x1^2+3*r3*x1^2-12*x2),(2/3)*(-2+3*r3)*x1,-4},
    {1/54*(32*x1^3+24*r3*x1^3+144*x1*x2+72*r3*x1*x2-27*r3^2*x1*x2+216*x3-216*q10*x3+162*r3*x3),
     1/18*(-8*x1^2-12*x2+9*r3*x2),(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/54*(32*x1^3+24*r3*x1^3+144*x1*x2+72*r3*x1*x2-27*r3^2*x1*x2+216*x3-216*q10*x3+
     162*r3*x3),1/18*(-8*x1^2-24*x2+9*r3*x2),r3*x1},{1/324*(-64*x1^4-48*r3*x1^4-96*x1^2*x2-
     72*r3*x1^2*x2+144*x2^2-81*r3^2*x2^2-432*x1*x3-324*r3*x1*x3-324*q10*r3*x1*x3),
     (1/27)*(4*x1^3+27*q10*x3),(1/9)*(4*x1^2-6*x2+9*r3*x2)}};
(VII)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/6))*r3*(-8*x1^2+6*r3*x1^2-12*x2+3*r2*x2),(2/3)*(-2+3*r3)*x1,r2},
    {(1/6)*(4*r3*x1*x2-3*r3^2*x1*x2+6*q10*r2*x3+18*r3*x3),(r3*x2)/2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/6)*(4*r3*x1*x2-3*r3^2*x1*x2+6*q10*r2*x3+18*r3*x3),(1/6)*(-4+3*r3)*x2,r3*x1},
    {(-(1/12))*r3*(-4*x2^2+3*r3*x2^2+12*x1*x3+12*q10*x1*x3),q10*x3,(1/3)*(-4+3*r3)*x2}};
(VIII)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-r3*(-4*x1^2+r3*x1^2-2*x2),2*(-2+r3)*x1,0},{-1/2*r3*(-4*x1*x2+r3*x1*x2-6*x3),
     (1/6)*(-8+3*r3)*x2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/2*r3*(-4*x1*x2+r3*x1*x2-6*x3),1/2*(-4+r3)*x2,r3*x1},{-1/36*r3*(16*x1^2*x2-
     12*x2^2+9*r3*x2^2+36*x1*x3),(4*x1*x2)/9,(1/3)*(-4+3*r3)*x2}};
(IX)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/3))*r3*(-8*x1^2+3*r3*x1^2-6*x2),(2/3)*(-4+3*r3)*x1,0},
    {(-(1/6))*r3*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(1/6)*(-4+3*r3)*x2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/6))*r3*(-8*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(1/6)*(-8+3*r3)*x2,r3*x1},
    {(-(1/12))*r3*(-4+3*r3)*x2^2,-x3,(1/3)*(-4+3*r3)*x2}};
(X)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/3))*r3*(-4*x1^2+3*r3*x1^2-6*x2),(2/3)*(-2+3*r3)*x1,0},
    {(-(1/6))*r3*(-4*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(r3*x2)/2,(1/3)*(-8+3*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/6))*r3*(-4*x1*x2+3*r3*x1*x2-18*x3),(1/6)*(-4+3*r3)*x2,r3*x1},
    {(-(1/12))*r3*(-4*x2^2+3*r3*x2^2-12*x1*x3),-2*x3,(1/3)*(-4+3*r3)*x2}};

%%% F_{B,3} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/5))*r3*(-9*x1^2+5*r3*x1^2-20*x2),(1/5)*(-9+10*r3)*x1,-2},
    {(-(1/5))*r3*(-6*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-3+5*r3)*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}},
A3={{0,0,1},{-1/5*r3*(-6*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),1/5*(-6+5*r3)*x2,r3*x1},
    {-1/50*r3*(-9*x1^2*x2-60*x2^2+50*r3*x2^2-45*x1*x3),-9/50*(x1*x2+5*x3),
     1/5*(-9+10*r3)*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}},
A2={{0,1,0},{(1/5)*(9*r3*x1^2-5*r3^2*x1^2+12*x2),(1/5)*(-9+10*r3)*x1,2},
    {(-(1/5))*r3*(-3*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),r3*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/5*r3*(-3*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),1/5*(-3+5*r3)*x2,r3*x1},
    {1/25*(-9*r3*x1^2*x2-18*x2^2+45*r3*x2^2-25*r3^2*x2^2-45*r3*x1*x3),9/25*(x1*x2+5*x3),
     (2/5)*(-6+5*r3)*x2}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/5))*r3*(-3*x1^2+5*r3*x1^2-10*x2+5*r2*x2),(1/5)*(-3+10*r3)*x1,r2},
    {(-(1/5))*r3*(-3*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),r3*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/5))*r3*(-3*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-3+5*r3)*x2,r3*x1},
    {(-(1/5))*r3*(-3+5*r3)*x2^2,0,(2/5)*(-3+5*r3)*x2}};
```

```
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/5*r3*(-6*x1^2+5*r3*x1^2-10*x2),2/5*(-3+5*r3)*x1,0},{-1/5*r3*(-6*x1*x2+
     5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-3+5*r3)*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/5*r3*(-6*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),1/5*(-6+5*r3)*x2,r3*x1},
    {-1/5*r3*(-3*x2^2+5*r3*x2^2+5*q10*x1*x3),q10*x3,(2/5)*(-3+5*r3)*x2}};
(V)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/5))*r3*(-9*x1^2+5*r3*x1^2-10*x2),(1/5)*(-9+10*r3)*x1,0},
    {(-(1/5))*r3*(-9*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-6+5*r3)*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/5))*r3*(-9*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-9+5*r3)*x2,r3*x1},
    {-1/25*r3*(9*x1^2*x2-15*x2^2+25*r3*x2^2+45*x1*x3),9/25*(x1*x2+5*x3),2/5*(-3+5*r3)*x2}};
(VI)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(-(1/5))*r3*(-12*x1^2+5*r3*x1^2-10*x2),(2/5)*(-6+5*r3)*x1,0},
    {(-(1/5))*r3*(-12*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),(1/5)*(-9+5*r3)*x2,(1/5)*(-6+5*r3)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/5*r3*(-12*x1*x2+5*r3*x1*x2-15*x3),1/5*(-12+5*r3)*x2,r3*x1},
    {-1/250*r3*(27*x1^4+270*x1^2*x2-150*x2^2+250*r3*x2^2+675*x1*x3),
     (27/250)*(x1^3+10*x1*x2+25*x3),(2/5)*(-3+5*r3)*x2}};

%%% F_{B,4} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/4*(-18+q4)*(18*x1^2+q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{1/4*(216*x1*x2-108*p1*x1*x2+
     6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-108*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),(-(1/2))*(-12+6*p1-q4)*x2,
     (q4*x1)/2}};
A3={{0,0,1},{-1/4*(-18+q4)*(12*x1*x2-6*p1*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),-1/2*(-12+6*p1-q4)*x2,
     1/2*(-18+q4)*x1},{1/4*(-4860*x1^4+270*q4*x1^4+3240*x1^2*x2-180*q4*x1^2*x2-216*x2^2-
     180*p1*x2^2-36*p1^2*x2^2+30*q4*x2^2+12*p1*q4*x2^2-q4^2*x2^2-1620*x1*x3+90*q4*x1*x3),
     -45*(3*x1^3-2*x1*x2+x3),(-(15+6*p1-q4))*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-1/4*(-9+q4)*(9*x1^2+q4*x1^2-4*x2),q4*x1,0},{1/4*(27*x1*x2-54*p1*x1*x2+
     6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-54*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),(-(1/2))*(-3+6*p1-q4)*x2,
     (1/2)*(9+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(1/4))*(-9+q4)*(3*x1*x2-6*p1*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),(-(1/2))*(-3+6*p1-q4)*x2,
     1/2*(-9+q4)*x1},{1/4*(162*x1^2*x2-18*q4*x1^2*x2-27*x2^2-72*p1*x2^2-36*p1^2*x2^2+
     12*q4*x2^2+12*p1*q4*x2^2-q4^2*x2^2+162*x1*x3-18*q4*x1*x3),9*(x1*x2+x3),-(6+6*p1-q4)*x2}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(9*x1^2-q4^2*x1^2+12*x2+4*q4*x2-18*r2*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),q4*x1,r2},
    {(-(1/4))*(-3-6*p1+q4)*(3*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),(-(1/2))*(3+6*p1-q4)*x2,(1/2)*(21+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/4)*(9*x1*x2+18*p1*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-18*x3+6*q4*x3),
     -1/2*(3+6*p1-q4)*x2,1/2*(3+q4)*x1},{-1/4*(-9+6*p1-q4)*(3+6*p1-q4)*x2^2,0,
     -(-3+6*p1-q4)*x2}}},
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(9*x1^2-q4^2*x1^2+12*x2+4*q4*x2+6*r2*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),q4*x1,r2},
    {(1/4)*(-9*x1*x2+18*p1*x1*x2-6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-54*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),
     (-(1/2))*(-3+6*p1-q4)*x2,(1/2)*(21+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/4)*(-9*x1*x2+18*p1*x1*x2-6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-54*x3+6*q4*x3),
     -(-3+6*p1-q4)/2*x2,1/2*(3+q4)*x1},{-1/4*(-3+6*p1-q4)*(3+6*p1-q4)*x2^2,0,-(6*p1-q4)*x2}};
(V)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(9*x1^2-q4^2*x1^2-12*x2+4*q4*x2-6*r2*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),q4*x1,r2},
    {(1/4)*(3+6*p1-q4)*(-3*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),(-(1/2))*(3+6*p1-q4)*x2,(1/2)*(15+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/4*(-3+q4)*(3*x1*x2+6*p1*x1*x2-q4*x1*x2+6*x3),-1/2*(3+6*p1-q4)*x2,
     1/2*(-3+q4)*x1},{(-(1/4))*(-3+6*p1-q4)*(3+6*p1-q4)*x2^2,0,(-(6*p1-q4))*x2}}};
(VI)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
```

```
A2={{0,1,0},{1/4*(36*x1^2-q4^2*x1^2-24*x2+4*q4*x2+12*r2*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),q4*x1,r2},
    {(1/4)*(-36*p1*x1*x2+6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-36*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),
     -1/2*(6*p1-q4)*x2,(1/2)*(12+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/4)*(-6+q4)*(6*p1*x1*x2-q4*x1*x2+6*x3),(-(1/2))*(6*p1-q4)*x2,
     (1/2)*(-6+q4)*x1},{(-(1/4))*(6*p1-q4)*(6+6*p1-q4)*x2^2,0,(-(3+6*p1-q4))*x2}};
(VII)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(144*x1^2-q4^2*x1^2-48*x2+4*q4*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),q4*x1,r2},
    {1/4*(-72*x1*x2-72*p1*x1*x2+18*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-72*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),
     (-(1/2))*(6+6*p1-q4)*x2,(1/2)*(6+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/4*(-12+q4)*(-6*x1*x2-6*p1*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),-1/2*(6+6*p1-q4)*x2,
     (1/2)*(-12+q4)*x1},{-((36*p1*r2*x2^2+36*p1^2*r2*x2^2-6*q4*r2*x2^2-12*p1*q4*r2*x2^2+
     q4^2*r2*x2^2+432*x1*x3-36*q4*x1*x3)/(4*r2)),-((18*x3)/r2),(-(3+6*p1-q4))*x2}}};
(VIII)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(144*x1^2-q4^2*x1^2-48*x2+4*q4*x2+24*r2*x2+12*p1*r2*x2-2*q4*r2*x2),
     q4*x1,r2},{(1/4)*(-72*p1*x1*x2+12*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-72*x3-
     36*p1*x3+6*q4*x3),-1/2*(6*p1-q4)*x2,(1/2)*(6+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{-1/4*(-12+q4)*(-6*p1*x1*x2+q4*x1*x2-6*x3),-1/2*(6*p1-q4)*x2,1/2*(-12+q4)*x1},
    {-((72*p1*r2*x2^2+36*p1^2*r2*x2^2-12*q4*r2*x2^2-12*p1*q4*r2*x2^2+q4^2*r2*x2^2+
     216*x1*x3-18*q4*x1*x3)/(4*r2)),-((9*x3)/r2),(-(6+6*p1-q4))*x2}};
(IX)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/4*(225*x1^2-q4^2*x1^2-72*x2+24*p1*x2),q4*x1,2},{(1/4)*(270*x1^3-18*q4*x1^3-
     153*x1*x2-54*p1*x1*x2+18*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-126*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),
     (1/2)*(18*x1^2-9*x2-6*p1*x2+q4*x2),(1/2)*(9+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/4)*(270*x1^3-18*q4*x1^3-153*x1*x2-54*p1*x1*x2+18*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-
     q4^2*x1*x2-126*x3+6*q4*x3),(1/2)*(18*x1^2-9*x2-6*p1*x2+q4*x2),(1/2)*(-9+q4)*x1},
    {1/4*(-810*x1^4+54*q4*x1^4+324*x1^2*x2-108*p1*x1^2*x2+9*x2^2-36*p1^2*x2^2+
     12*p1*q4*x2^2-q4^2*x2^2-432*x1*x3+36*q4*x1*x3),-9*(3*x1^3-x1*x2+2*x3),-9*x1^2-6*p1*x2+
     q4*x2}};
(X)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/4)*(144*x1^2-q4^2*x1^2-48*x2-24*p1*x2+8*q4*x2),q4*x1,-2},{(1/4)*(-216*x1^3+
     18*q4*x1^3+72*x1*x2-6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-144*x3-36*p1*x3+6*q4*x3),
     (1/2)*(-18*x1^2+6*x2-6*p1*x2+q4*x2),(1/2)*(18+q4)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/4)*(-216*x1^3+18*q4*x1^3+72*x1*x2-6*q4*x1*x2+6*p1*q4*x1*x2-q4^2*x1*x2-
     144*x3+6*q4*x3),(1/2)*(-18*x1^2+6*x2-6*p1*x2+q4*x2),(q4*x1)/2},{(1/4)*(-324*x1^4+
     27*q4*x1^4+216*x1^2*x2+108*p1*x1^2*x2-36*q4*x1^2*x2-36*p1*x2^2-36*p1^2*x2^2+6*q4*x2^2+
     12*p1*q4*x2^2-q4^2*x2^2+108*x1*x3-18*q4*x1*x3),(-(9/2))*(3*x1^3-2*x1*x2-2*x3),
     9*x1^2-3*x2-6*p1*x2+q4*x2}};

%%% F_{B,6} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{1/36*(275*x1^2-140*p1*x1^2-100*p1^2*x1^2-96*x2-60*p1*x2),1/3*(7+10*p1)*x1,1},
    {(1/24)*(253*x1*x2-10*p1*x1*x2-200*p1^2*x1*x2-105*x3+300*p1*x3),(5/4)*(1+4*p1)*x2,
     1/3*(8+5*p1)*x1}};
A3={{0,0,1},{1/24*(253*x1*x2-10*p1*x1*x2-200*p1^2*x1*x2-105*x3+120*p1*x3),1/4*(23+20*p1)*x2,
     (1/6)*(-11+10*p1)*x1},{(1/16)*(297*x1^2*x2-270*p1*x1^2*x2+65*x2^2+160*p1*x2^2-
     400*p1^2*x2^2-198*x1*x3+180*p1*x1*x3),(9/8)*(9*x1*x2-4*x3),(1/4)*(37+40*p1)*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-5/18*(2+5*p1)*(-x1^2+2*p1*x1^2-6*x2),1/6*(-1+20*p1)*x1,-1},{-5/24*(-35*x1*x2+
     50*p1*x1*x2+40*p1^2*x1*x2+12*x3-60*p1*x3),(1/4)*(-1+20*p1)*x2,(1/6)*(31+10*p1)*x1}};
A3={{0,0,1},{-5/24*(-1+2*p1)*(35*x1*x2+20*p1*x1*x2-12*x3),1/4*(17+20*p1)*x2,(2+5*p1)/3*x1},
    {(-(5/16))*(-1+2*p1)*(16*x2^2+40*p1*x2^2-9*x1*x3),-((9*x3)/8),(1/4)*(43+40*p1)*x2}}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{-5/36*(-1+2*p1)*(13*x1^2+10*p1*x1^2+6*x2),2/3*(2+5*p1)*x1,1},{-5/12*(-13*x1*x2+
```

```
     16*p1*x1*x2+20*p1^2*x1*x2+6*x3-30*p1*x3),(2+5*p1)*x2,(11+5*p1)/3*x1}};
A3={{0,0,1},{(-(5/12))*(-1+2*p1)*(13*x1*x2+10*p1*x1*x2-6*x3),(1/2)*(13+10*p1)*x2,
     (5/6)*(-1+2*p1)*x1},{(-(5/8))*(-1+2*p1)*(-1+20*p1)*x2^2,(9*x3)/4,1/2*(17+20*p1)*x2}};
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,1+p1,0},{0,0,2+p1}};
A2={{0,1,0},{(1/18)*(7*x1^2-25*p1*x1^2-50*p1^2*x1^2+51*x2+150*p1*x2),(5/6)*(1+4*p1)*x1,-1},
    {(14*x1*x2-50*p1*x1*x2-100*p1^2*x1*x2+15*x3+150*p1*x3)/12,(-1+5*p1)*x2,5/6*(5+2*p1)*x1}};
A3={{0,0,1},{(1/12)*(14*x1*x2-50*p1*x1*x2-100*p1^2*x1*x2+15*x3+60*p1*x3),(1/2)*(7+10*p1)*x2,
     (-1+5*p1)/3*x1},{(-(1/4))*(-1+5*p1)*(5*x2^2+20*p1*x2^2-3*x1*x3),0,(1/2)*(23+20*p1)*x2}};

%%% F_{H,1} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-2/225*x1*(8*x1^3+8*p1*x1^3+2*p1^2*x1^3+70*r2*x1^3+35*p1*r2*x1^3-100*r2^2*x1^3-
     180*x2-90*p1*x2+825*r2*x2+75*p1*r2*x2-750*r2^2*x2),(1/15)*(8+4*p1+5*r2)*x1^2,r2},
    {(1/900)*(-128*x1^6-128*p1*x1^6-32*p1^2*x1^6+80*r2*x1^6+40*p1*r2*x1^6+100*r2^2*x1^6-
     320*x1^3*x2+3280*p1*x1^3*x2-80*p1^2*x1^3*x2-4000*r2*x1^3*x2-200*p1*r2*x1^3*x2+
     5500*r2^2*x1^3*x2+1800*p1*x2^2-4500*r2*x2^2+5625*r2^2*x2^2+2400*x1*x3+1200*p1*x1*x3-
     3000*r2*x1*x3),(1/15)*x1*(8*x1^3+4*p1*x1^3+5*r2*x1^3+80*x2+10*p1*x2+50*r2*x2),
     (1/15)*(4+2*p1-5*r2)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(1/900)*(-128*x1^6-128*p1*x1^6-32*p1^2*x1^6+80*r2*x1^6+40*p1*r2*x1^6+
     100*r2^2*x1^6-320*x1^3*x2-320*p1*x1^3*x2-80*p1^2*x1^3*x2-4000*r2*x1^3*x2-
     200*p1*r2*x1^3*x2+5500*r2^2*x1^3*x2-4500*r2*x2^2+5625*r2^2*x2^2+2400*x1*x3+
     1200*p1*x1*x3-3000*r2*x1*x3),x1*(8*x1^3+4*p1*x1^3+5*r2*x1^3+20*x2+10*p1*x2+50*r2*x2)/15,
     (1/15)*(4+2*p1-5*r2)*x1^2},{(1/450)*(-128*x1^8-128*p1*x1^8-32*p1^2*x1^8+80*r2*x1^8+
     40*p1*r2*x1^8+100*r2^2*x1^8+80*x1^5*x2-280*p1*x1^5*x2-160*p1^2*x1^5*x2-500*r2*x1^5*x2+
     200*p1*r2*x1^5*x2+500*r2^2*x1^5*x2-2600*x1^2*x2^2+1000*p1*x1^2*x2^2-200*p1^2*x1^2*x2^2-
     3250*r2*x1^2*x2^2+625*p1*r2*x1^2*x2^2+8125*r2^2*x1^2*x2^2+1200*x1^3*x3+2400*p1*x1^3*x3-
     1500*r2*x1^3*x3+3000*x2*x3+1500*p1*x2*x3-3750*r2*x2*x3),(1/4)*(4+5*r2)*x2*(4*x1^3+5*x2),
     (1/15)*x1*(16*x1^3+8*p1*x1^3-5*r2*x1^3+40*x2+20*p1*x2-50*r2*x2)}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-130*x1^3-3*p1*x1^3+p1^2*x1^3-1175*x2-100*p1*x2),2/15*(19+2*p1)*x1^2,
     -(22/15)},{(1/225)*(988*x1^6+28*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+7300*x1^3*x2+1360*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+12375*x2^2+450*p1*x2^2-3900*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(19*x1^3+
     2*p1*x1^3-20*x2+5*p1*x2),(2/15)*(-13+p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(1/225)*(988*x1^6+28*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+7300*x1^3*x2+460*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+12375*x2^2-3900*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(19*x1^3+2*p1*x1^3-50*x2+
     5*p1*x2),(2/15)*(-13+p1)*x1^2},{(1/2475)*(21736*x1^8+616*p1*x1^8-176*p1^2*x1^8+
     72020*x1^5*x2+5900*p1*x1^5*x2-880*p1^2*x1^5*x2+359500*x1^2*x2^2+925*p1*x1^2*x2^2-
     1100*p1^2*x1^2*x2^2-156300*x1^3*x3+600*p1*x1^3*x3-107250*x2*x3+8250*p1*x2*x3),
     -15/22*(36*x1^3*x2+31*x2^2-56*x1*x3),(2/15)*x1*(-7*x1^3+4*p1*x1^3+80*x2+10*p1*x2)}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-102*x1^3+11*p1*x1^3+p1^2*x1^3-1645*x2+10*p1*x2),2/15*(-11+2*p1)*x1^2,
     22/15},{(1/225)*(748*x1^6-92*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+3340*x1^3*x2+280*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+6975*x2^2+450*p1*x2^2-7500*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(-11*x1^3+
     2*p1*x1^3+100*x2+5*p1*x2),(2/15)*(17+p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(1/225)*(748*x1^6-92*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+3340*x1^3*x2-620*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+6975*x2^2-7500*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(-11*x1^3+2*p1*x1^3+
     70*x2+5*p1*x2),(2/15)*(17+p1)*x1^2},{(1/225)*(1496*x1^8-184*p1*x1^8-16*p1^2*x1^8-
     2060*x1^5*x2-740*p1*x1^5*x2-80*p1^2*x1^5*x2+14000*x1^2*x2^2+725*p1*x1^2*x2^2-
     100*p1^2*x1^2*x2^2-20100*x1^3*x3+1200*p1*x1^3*x3-18750*x2*x3+750*p1*x2*x3),
     (15/2)*x2*(4*x1^3+5*x2),(2/15)*x1*(23*x1^3+4*p1*x1^3-40*x2+10*p1*x2)}};
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-18*x1^3+3*p1*x1^3+p1^2*x1^3+45*x2-60*p1*x2),2/15*(9+2*p1)*x1^2,
     -(2/5)},{(1/225)*(108*x1^6-12*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+180*x1^3*x2+900*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+675*x2^2+450*p1*x2^2-900*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(9*x1^3+
     2*p1*x1^3+45*x2+5*p1*x2),(2/15)*(-3+p1)*x1^2}};
```

```
A3={{0,0,1},{(1/225)*(108*x1^6-12*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+180*x1^3*x2-20*p1^2*x1^3*x2+675*x2^2-
     900*x1*x3+300*p1*x1*x3),2/15*x1*(9*x1^3+2*p1*x1^3+15*x2+5*p1*x2),(2/15)*(-3+p1)*x1^2},
    {(1/225)*(216*x1^8-24*p1*x1^8-16*p1^2*x1^8-540*x1^5*x2+420*p1*x1^5*x2-80*p1^2*x1^5*x2+
     3600*x1^2*x2^2+1125*p1*x1^2*x2^2-100*p1^2*x1^2*x2^2-900*x1^3*x3+300*p1*x1^3*x3-
     2250*x2*x3+750*p1*x2*x3),(-(5/2))*(4*x1^3*x2+5*x2^2-12*x1*x3),(2/15)*x1*(3*x1^3+
     4*p1*x1^3+15*x2+10*p1*x2)}};
(V)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-14*x1^3+5*p1*x1^3+p1^2*x1^3-165*x2-30*p1*x2),2/15*(-1+2*p1)*x1^2,
     2/5},{1/225*(28*x1^6-52*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+760*x1^3*x2+740*p1*x1^3*x2-20*p1^2*x1^3*x2+
     1125*x2^2+450*p1*x2^2-600*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(-x1^3+2*p1*x1^3+35*x2+5*p1*x2),
     (2/15)*(7+p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{1/225*(28*x1^6-52*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+760*x1^3*x2-160*p1*x1^3*x2-20*p1^2*x1^3*x2+
     1125*x2^2-600*x1*x3+300*p1*x1*x3),(2/15)*x1*(-x1^3+2*p1*x1^3+5*x2+5*p1*x2),
     2/15*(7+p1)*x1^2},{1/225*(56*x1^8-104*p1*x1^8-16*p1^2*x1^8+100*x1^5*x2-160*p1*x1^5*x2-
     80*p1^2*x1^5*x2+3800*x1^2*x2^2+325*p1*x1^2*x2^2-100*p1^2*x1^2*x2^2-600*x1^3*x3+
     1200*p1*x1^3*x3-1500*x2*x3+750*p1*x2*x3),15*x2^2/2,2/15*x1*(13*x1^3+4*p1*x1^3+25*x2+
     10*p1*x2)}};
(VI)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-56*x1^3-p1*x1^3+p1^2*x1^3+60*x2-120*p1*x2),2/15*(29+2*p1)*x1^2,-2},
    {(-(2/225))*(-224*x1^6-4*p1*x1^6+4*p1^2*x1^6+340*x1^3*x2-685*p1*x1^3*x2+10*p1^2*x1^3*x2-
     2250*x2^2-225*p1*x2^2+1200*x1*x3-150*p1*x1*x3),1/15*x1*(88*x1^3+4*p1*x1^3+55*x2+10*p1*x2),
     (2/15)*(-23+p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(-(2/225))*(-224*x1^6-4*p1*x1^6+4*p1^2*x1^6+340*x1^3*x2-235*p1*x1^3*x2+
     10*p1^2*x1^3*x2-2250*x2^2+1200*x1*x3-150*p1*x1*x3),(1/15)*x1*(88*x1^3+4*p1*x1^3-5*x2+
     10*p1*x2),(2/15)*(-23+p1)*x1^2},{(1/225)*(896*x1^8+16*p1*x1^8-16*p1^2*x1^8-2360*x1^5*x2+
     1160*p1*x1^5*x2-80*p1^2*x1^5*x2+16700*x1^2*x2^2+625*p1*x1^2*x2^2-100*p1^2*x1^2*x2^2-
     5400*x1^3*x3+450*p1*x1^3*x3-6000*x2*x3+750*p1*x2*x3),(1/2)*(16*x1^6-32*x1^3*x2-15*x2^2+
     50*x1*x3),(1/15)*x1*(-64*x1^3+8*p1*x1^3+65*x2+20*p1*x2)}};
(VII)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-4/225*x1*(-36*x1^3+9*p1*x1^3+p1^2*x1^3-990*x2+30*p1*x2),2/15*(-21+2*p1)*x1^2,2},
    {(1/225)*(288*x1^6-72*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+4770*x1^3*x2+270*p1*x1^3*x2-20*p1^2*x1^3*x2+
     3375*x2^2+450*p1*x2^2-3150*x1*x3+300*p1*x1*x3),(1/15)*x1*(-72*x1^3+4*p1*x1^3+105*x2+
     10*p1*x2),(2/15)*(27+p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(1/225)*(288*x1^6-72*p1*x1^6-8*p1^2*x1^6+4770*x1^3*x2-630*p1*x1^3*x2-
     20*p1^2*x1^3*x2+3375*x2^2-3150*x1*x3+300*p1*x1*x3),(1/15)*x1*(-72*x1^3+4*p1*x1^3+45*x2+
     10*p1*x2),(2/15)*(27+p1)*x1^2},{(1/225)*(576*x1^8-144*p1*x1^8-16*p1^2*x1^8+5940*x1^5*x2-
     690*p1*x1^5*x2-80*p1^2*x1^5*x2+12150*x1^2*x2^2+600*p1*x1^2*x2^2-100*p1^2*x1^2*x2^2-
     6750*x1^3*x3+900*p1*x1^3*x3-7875*x2*x3+750*p1*x2*x3),-8*x1^6-x1^3*x2+10*x2^2+10*x1*x3,
     (1/15)*x1*(96*x1^3+8*p1*x1^3+15*x2+20*p1*x2)}};

%%% F_{H,2} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-72*(1+p1)*x1*(-x1^3+2*p1*x1^3-x2),6*(1+4*p1)*x1^2,0},{10*(-8*x1^6+8*p1*x1^6+
     16*p1^2*x1^6+80*x1^3*x2-166*p1*x1^3*x2-60*p1^2*x1^3*x2+5*x2^2+15*p1*x2^2-8*x1*x3+
     30*p1*x1*x3),(-(10/3))*x1*(-20*x1^3+4*p1*x1^3-15*p1*x2),6*(11+2*p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{10*(-8*x1^6+8*p1*x1^6+16*p1^2*x1^6+80*x1^3*x2-160*p1*x1^3*x2-60*p1^2*x1^3*x2+
     5*x2^2-8*x1*x3+12*p1*x1*x3),-10/3*x1*(-2*x1^3+4*p1*x1^3-25*x2-15*p1*x2),
     12*(1+p1)*x1^2},{(-(50/9))*(-16*x1^8+16*p1*x1^8+32*p1^2*x1^8+336*x1^5*x2-636*p1*x1^5*x2-
     240*p1^2*x1^5*x2-216*x1^2*x2^2+324*p1*x1^2*x2^2+450*p1^2*x1^2*x2^2+8*x1^3*x3+12*x2*x3-
     45*p1*x2*x3),-100/27*(24*x1^6-38*x1^3*x2-3*x2^2+6*x1*x3),-10/3*x1*(26*x1^3+8*p1*x1^3-
     65*x2-30*p1*x2)}};

%%% F_{H,3} Case %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
(I)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-x1*(-11*x1^3+14*p1*x1^3+16*p1^2*x1^3-1500*x2-6000*p1*x2)/22500,
```

```
    1/300*(7+16*p1)*x1^2,-2/25},{1/450*(11*x1^3*x2-14*p1*x1^3*x2-16*p1^2*x1^3*x2+1125*x2^2+
    1800*p1*x2^2-60*x1*x3+120*p1*x1*x3),(2/3)*(-1+2*p1)*x1*x2,(1/300)*(41+8*p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(11*x1^3*x2-14*p1*x1^3*x2-16*p1^2*x1^3*x2+1125*x2^2-60*x1*x3+120*p1*x1*x3)/450,
    (1/6)*(11+8*p1)*x1*x2,(1/75)*(-1+2*p1)*x1^2},{(-(1/9))*(-1+2*p1)*x2*(11*x1^2*x2+
    8*p1*x1^2*x2-30*x3),0,(1/6)*(37+16*p1)*x1*x2}};
(II)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-(((-9+8*p1)*x1*(21*x1^3+8*p1*x1^3-600*x2))/90000),(1/75)*(3+4*p1)*x1^2,2/25},
   {(189*x1^3*x2-96*p1*x1^3*x2-64*p1^2*x1^3*x2+7200*p1*x2^2-540*x1*x3+480*p1*x1*x3)/1800,
      (1/3)*(3+4*p1)*x1*x2,(1/75)*(9+2*p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{-(((-9+8*p1)*x1*(21*x1^2*x2+8*p1*x1^2*x2-60*x3))/1800),(1/6)*(21+8*p1)*x1*x2,
    (1/300)*(-9+8*p1)*x1^2},{(-(1/144))*(-9+8*p1)*x2*(39*x1^2*x2+32*p1*x1^2*x2-120*x3),
    (125*x2^2)/4,(1/6)*(27+16*p1)*x1*x2}};
(III)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-x1*(-779*x1^3+176*p1*x1^3+64*p1^2*x1^3+37560*x2-21120*p1*x2)/90000,
    (1/150)*(11+8*p1)*x1^2,-7/125},{(703*x1^3*x2+8*p1*x1^3*x2-128*p1^2*x1^3*x2+6300*x2^2+
    14400*p1*x2^2-2280*x1*x3+960*p1*x1*x3)/3600,(7+16*p1)/12*x1*x2,(13+4*p1)/150*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(703*x1^3*x2+8*p1*x1^3*x2-128*p1^2*x1^3*x2+6300*x2^2-2280*x1*x3+
    960*p1*x1*x3)/3600,(1/12)*(37+16*p1)*x1*x2,(1/300)*(-19+8*p1)*x1^2},{(-855*x1^5*x2+
    360*p1*x1^5*x2+6788*x1^2*x2^2+6208*p1*x1^2*x2^2-7168*p1^2*x1^2*x2^2+3420*x1^3*x3-
    1440*p1*x1^3*x3-63840*x2*x3+26880*p1*x2*x3)/4032,(-(375/112))*(x1^3*x2+16*x2^2
    -4*x1*x3),(1/12)*(59+32*p1)*x1*x2}};
(IV)
A1={{p1,0,0},{0,2+p1,0},{0,0,4+p1}};
A2={{0,1,0},{-((3+4*p1)*x1*(-9*x1^3+8*p1*x1^3-960*x2))/45000,1/300*(-3+16*p1)*x1^2,7/125},
   {(513*x1^3*x2-312*p1*x1^3*x2-128*p1^2*x1^3*x2+10800*x2^2+14400*p1*x2^2-1980*x1*x3+
    960*p1*x1*x3)/3600,(1/12)*(-3+16*p1)*x1*x2,(1/300)*(51+8*p1)*x1^2}};
A3={{0,0,1},{(513*x1^3*x2-312*p1*x1^3*x2-128*p1^2*x1^3*x2+10800*x2^2-1980*x1*x3+
    960*p1*x1*x3)/3600,(1/12)*(27+16*p1)*x1*x2,(1/150)*(3+4*p1)*x1^2},
   {(-(1/144))*x2*(-621*x1^2*x2+264*p1*x1^2*x2+256*p1^2*x1^2*x2+1980*x3-960*p1*x3),
    (125*x2^2)/4,(1/12)*(69+32*p1)*x1*x2}};

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

§9. y^5+z^4 の変形として得られる斎藤自由因子の場合

y^5+z^4 はアーノルドの記号で W_{12} と書かれた 14 種類の例外的特異点のひとつである．これの変形で得られる多項式の零点が斎藤自由因子のなるものは分類されている ([26])．正確にいえば，x_1,x_2,x_3 を重み 2, 4, 5 の変数として，$f(x_1,x_2,x_3)$ は次数 20 の重みつき多項式で，$f(0,x_2,x_3)=x_2^5+x_3^4$ が成り立ち，さらに $f(x)=0$ は斎藤自由因子になる．これらの条件を満たす多項式は重みつき座標変換を除いて次の 4 種類の多項式のいずれかになる．

```
f1 = 2560*x1^4*x2^3 - 95*x1^2*x2^4 + x2^5 - 65536*x1^5*x3^2 + 2560*x1^3*x2*x3^2 -
     30*x1*x2^2*x3^2 + x3^4
f2 = (16*x1^6*x2^2 + 24*x1^4*x2^3 + 9*x1^2*x2^4 + x2^5 - 8*x1^3*x2*x3^2 -
     6*x1*x2^2*x3^2 + x3^4);
f3 = 25*x1^8*x2 + 100*x1^6*x2^2 + 110*x1^4*x2^3 + 20*x1^2*x2^4 + x2^5 - 2*x1^5*x3^2 -
     20*x1^3*x2*x3^2 - 10*x1*x2^2*x3^2 + x3^4;
f4 = (x1^2*x2^4 + x2^5 - 2*x1*x2^2*x3^2 + x3^4);
```

これらの多項式から定まる斎藤自由因子に対して，捩れのない積分可能接続で条件 (D3) を満たすものが存在するのは，f_3 だけである．この場合を調べる．以下の計算のアイデアは斎藤 [19] にある．

まず,

$$M=\begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 5x_3 \\ x_3 & 2x_1x_3 & \frac{5}{2}(5x_1^4+10x_1^2x_2+x_2^2) \\ x_2^2 & -2(5x_1^3x_2+10x_1x_2^2-x_3^2) & \frac{5}{2}x_1(3x_1^2-2x_2)x_3 \end{pmatrix}$$

とおいて,多項式 $f=\det M$ を定義する.この f は上の f_3 に他ならない.

ベクトル場 $V_j\ (j=0,1,2)$ を

$$^t(V_0,V_1,V_2)=M^t(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3})$$

によって定義する.このとき,

$$[V_0,V_1]=3V_1,\ [V_0,V_2]=6V_2,\ [V_1,V_2]=-\frac{3}{2}(5x_1^2+2x_2)x_3V_0+\frac{15}{2}x_1(x_1^2+2x_2)V_1$$

$$V_0f=20f,\ V_1f=0,\ V_2f=-10x_1(x_1^2+6x_2)f.$$

が成り立つ.$\vec{u}={}^t(u,V_1u,V_2u)$ とおいて,微分方程式系

$$(W)\quad V_j\vec{u}=A_{j+1}\vec{u}\ (j=0,1,2)$$

を考える.ここで

$$A_1=\begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 6+s_0 \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}s_0(5x_1^2+2x_2)x_3 & -\frac{1}{2}x_1(-12x_1^2+s_0x_1^2-12x_2+6s_0x_2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}(3+s_0)x_1(x_1^2+6x_2) & 0 \\ \begin{array}{l}\frac{1}{4}\{-(s_0+3)^2x_1^6-3(2s_0+1)(2s_0-9)x_1^4x_2 \\ \quad -9(4s_0^2-2s_0+3)x_1^2x_2^2+3(3-4s_0)x_2^3 \\ \quad -24s_0x_1x_3^2\}\end{array} & \frac{3}{2}(3x_1^2+x_2)x_3 & -(3+s_0)x_1(x_1^2+6x_2) \end{pmatrix}$$

(W) は斎藤自由因子 $f=0$ に関する一意化方程式系である.(W) は次の微分方程式系に書き直せる.

$$(W'_{s_0})\quad \left\{\begin{array}{lcl} V_0u &=& s_0u, \\ {V_1}^2u &=& 0, \\ V_2V_1u &=& -\frac{1}{2}(s_0+3)x_1(x_1^2+6x_2)V_1u, \\ {V_2}^2u &=& \frac{1}{4}\{-(s_0+3)^2x_1^6-3(2s_0+1)(2s_0-9)x_1^4x_2-9(4s_0^2-2s_0+3)x_1^2x_2^2 \\ && +3(3-4s_0)x_2^3-24s_0x_1x_3^2\}u+\frac{3}{2}x_3(3x_1^2+x_2)V_1-(s_0+3)x_1(x_1^2+6x_2)V_2. \end{array}\right.$$

そこで

$$(W''_{s_0})\quad \left\{\begin{array}{lcl} V_0u &=& s_0u, \\ V_1u &=& 0, \\ {V_2}^2u &=& \frac{1}{4}\{-(s_0+3)^2x_1^6-3(2s_0+1)(2s_0-9)x_1^4x_2-9(4s_0^2-2s_0+3)x_1^2x_2^2 \\ && +3(3-4s_0)x_2^3-24s_0x_1x_3^2\}u-(s_0+3)x_1(x_1^2+6x_2)V_2. \end{array}\right.$$

とおくと,(W''_{s_0}) は (W'_{s_0}) の商である.

(W''_{s_0}) の解を求める.そのために

$$p=x_2-x_1^2,\ q=x_1^5+10x_1^3x_2+5x_1x_2^2-x_3^2$$

として,さらに

$$V'_2=V_2+(\frac{1}{2}x_1^3+3x_1x_2)V_0.$$

を定義する．このとき，定数倍を除いて，p^5+q^2 は $\det M$ に一致する．簡単な計算によって

$$V_0p=4p,\ V_0q=10q,\quad V_1p=V_1q=0,\quad V_2'p=-2q,\ V_2'q=5p^4$$

$t=\frac{p^5+q^2}{p^5}$ とおくと，(W'') より微分方程式

$$\{(3+s_0-20\vartheta)^2-t(-4+s_0-20\vartheta)(s_0-20\vartheta)\}u=0$$

を得る．ここで，$\vartheta=t\partial_t$ である．$v=t^{-(s_0+3)/20}u$ とおくと，この微分方程式は

$$\{\vartheta^2-t(\vartheta+\frac{7}{20})(\vartheta+\frac{3}{20})\}v=0$$

になる．したがって

$$u=t^{(s_0+3)/20}F\left(\frac{7}{20},\frac{3}{20};1;t\right)$$

が解になることがわかる．

このようにして，超幾何関数を使って (W''_{s_0}) の解を表示できる．この議論は本質的には §4 の議論と同じである．

(W'_{s_0}) のもうひとつの解法を説明する．これは斎藤 [19] の最後の 2 ページにあるのとほとんど同じである．逆にいえば，そこでの議論を応用できる場合である．

$f_0^{(-s_0-3)/20}$ を u にかけた未知関数に対する微分方程式にすることで $s_0=-3$ としてよい．今後議論を (W'_{-3}) の場合に限定する．まず h の多項式

$$P(h)=h^5+5ph^3+5p^2h+2q$$

を定義する．p,q は上で定めた x_1,x_2,x_3 の多項式である．$P(h)$ の判別式は $(p^5+q^2)^2$ になる．次の公式が成り立つ．

$$(V_2'^2-\frac{9}{4}p^3)P(h)^{-1/2}=\frac{d}{dh}[P(h)^{-3/2}\{-5(p^4h^4+2(2p^5+q^2)h^2+p^3qh+2p(p^5+q^2))+\frac{3}{2}p^3hP(h)\}]$$

この式から，適当なサイクル $\gamma_i(x)$ $(i=1,2)$ をとって，

$$u_i(x)=\int_{\gamma_i(x)}P(h)^{-1/2}dh\quad(i=1,2)$$

が線形独立でともに (W''_{-3}) の解になるようにする．（本当にこのようなサイクル $\gamma_i(x)$ $(i=1,2)$ がとれるかどうかは現在のところ確認できていない．）次に

$$v(x)=\int_{\infty}^{ax_1}P(h)^{-1/2}dh$$

とおく．a は定数で後に定める．$v(x)$ が (W'_{-3}) の解になるための条件を調べる．簡単な計算によって，

$$V_0P(h)=10P(h)-2h\frac{d}{dh}P(h)$$

を確かめることができる．したがって

$$\begin{aligned}V_0v&=a(V_0x_1)(P(h)|_{h\to ax_1})-\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{\infty}^{ax_1}P^{-3/2}(V_0P)dh\\&=2ax_1(P(h)|_{h\to ax_1})-5v+\textstyle\int_{\infty}^{ax_1}hP^{-3/2}\frac{d}{dh}Pdh\end{aligned}$$

ここで

$$hP^{-3/2}\frac{d}{dh}P=2P^{-1/2}-2\frac{d}{dh}(hP^{-1/2})$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}V_0v&=2ax_1(P(h)|_{h\to ax_1})-5v+\{2v-2(hP^{-1/2})|_{h\to ax_1}\}\\&=-3v\end{aligned}$$

がわかる．次に V_1v を計算する．$V_1p=V_1q=0$ だから $V_1P=0$ は明らか．したがって

$$V_1v=a(V_1x_1)P(ax_1)^{-1/2}$$

となる．$V_1x_1=x_3$ であるから，$P(ax_1)/x_3^2$ が定数になるように a を求める．すると $a=-2$ のとき，上手い具合に $P(-2x_1)=-2x_3^2$ となる．これからは $a=-2$ として計算を続ける．$P(-2x_1)=-2x_3^2$ だから，

$$V_1v=\sqrt{-2}$$

となる．これから $V_1^2v=V_2V_1v=0$ が得られる．最後に $V_2'^2v$ の計算をする．

$$V_2'v=\int_\infty^{-2x_1}(V_2'P^{-1/2})dh-2(V_2'x_1)(P^{-1/2}|_{h\to-2x_1})$$

であるから，

$$V_2'^2v=\int_\infty^{-2x_1}(V_2'^2P^{-1/2})dh-2(V_2'x_1)(V_2'(P^{-1/2})|_{h\to-2x_1})-2V_2'((V_2'x_1)(P^{-1/2}|_{h\to-2x_1}))$$

ところで，

$$(V_2'^2-\frac{9}{4}p^3)P^{-1/2}=\frac{d}{dh}[P^{-3/2}\{-5(p^4h^4+2(2p^5+q^2)h^2+p^3qh+2p(p^5+q^2))+\frac{3}{2}p^3hP\}]$$

が成り立つ．この両辺を h に関して ∞ から $-2x_1$ まで積分することによって，

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\infty^{-2x_1}V_2'^2P^{-1/2}dh-\frac{9}{4}p^3v\\ =\ &P^{-3/2}\{-5(p^4h^4+2(2p^5+q^2)h^2+p^3qh+2p(p^5+q^2))+\tfrac{3}{2}p^3hP\}|_{h\to-2x_1}\end{aligned}$$

以上から，

$$V_2'^2v=\frac{9}{4}p^3v+\frac{3\sqrt{-2}}{2}x_3(3x_1^2+x_2)$$

が得られる．$V_1v=\sqrt{-2}$ であったから，

$$V_2'^2v=\frac{9}{4}p^3v+\frac{3}{2}x_3(3x_1^2+x_2)V_1v$$

以上から，v が

$$\begin{cases}V_0v&=\ -3v\\ V_1^2v&=\ 0\\ V_2V_1v&=\ 0\\ V_2'^2v&=\ \frac{9}{4}p^3v+\frac{3}{2}x_3(3x_1^2+x_2)V_1v\end{cases}$$

を満たすことがわかる．この微分方程式系は (W'_{-3}) に他ならない．

u_1,u_2 の構成のときの議論でサイクルのとり方が気になるが，すでに超幾何関数を使った表示をあたえているから一応は (W'_{-3}) の 3 個の独立解を構成したことになる．

$D=\{x\in\mathbf{C}^3;\ f_0(x)=0\}$ は斎藤自由因子であるが，u_1,u_2,v を使って，

$$\varphi(x)=(u_1(x),u_2(x),v(x))$$

とおけば，写像

$$\varphi:\mathbf{C}^3-D\longrightarrow\mathbf{C}^3$$

を構成できる．

この写像の像は $\mathbf{C}^3$ の開集合になるが，これを決定すること，また特殊関数を使って逆写像を構成することは興味深い問題である．

注意 9.1. 本節の議論は §7.3 の H_3 型鏡映群の場合にも展開することは可能である．

References

[1] A.G.Aleksandrov, Milnor numbers of nonisolated Saito singularities. Funct. Anal. Appl. 21, 1-9 (1987).

[2] A. G. Aleksandrov, Nonisolated hypersurfaces singularities. Advances in Soviet Math. **1** (1990), 211-246.

[3] A. G. Aleksandrov, Moduli of logarithmic connections along free divisor. Contemp. Math. **314** (2002), 2-23.

[4] A. G. Aleksandrov and J. Sekiguchi, Free deformations of hypersurface singularities, To appear in Kokyuroku.

[5] D. Bessis and J. Michel, Explicit presentations for exceptional braid groups, Experimental Math., **13** (2004), 257-266.

[6] P. Boalch, From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo, Proc. London Math. Soc., **90** (2005), 167-208.

[7] E. Brieskorn and K. Saito, Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent. Math. **17**(1972), 245-271.

[8] P.Cartier, Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de geometrie combinatoire. Semin. Bourbaki, 33e annee, Vol. 1980/81, Exp. No.561, Lect. Notes Math. 901, 1-22 (1981).

[9] B. Dubrovin and M. Mazzocco, Monodromy of Painlevé VI transcendents and reflection groups, Invent. Math., **141** (2000), 55-147.

[10] J. Damon, On the freeness of equisingular deformations of plane curve singularities, Topology Appl. 118(2002) no.1-2, 31-43.

[11] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent. Math. **17** (1972), 273-302.

[12] M. Granger, D. Mond, A. N. Reyes, M. Schulze, Linear free divisors, preprint.

[13] G. H. Halphen, Sur une équation différentielle linéaires du troisième ordre, Math. Ann., **21** (1884), 461, in *Oeuvres*, IV, 112–115.

[14] Y. Haraoka and M. Kato, Systems of partial differential equations with finite monodromy groups, preprint.

[15] A. Hurwitz, Über einige besondere homogene linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., **26** (1886), 117–126 *Math. Werke*, I (no. 9) 153–162.

[16] T. Ishibe, Master thesis presented to RIMS, Kyoto University (2007).

[17] L. Lachtin: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleiching 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ster} Ordnung. Math. Ann. 51(1898), 463-472.

[18] H. Nakayama and J. Sekiguchi, Determination of b-functions of polynomials defining Saito free divisors related with simple curve singularities of types E_6, E_7, E_8, to appear in Kumamoto Math. J.

[19] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci. RIMS Kokyuroku **287** (1977), 117-137.

[20] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Faculty of Sciences, Univ. Tokyo **27** (1980), 265-291.

[21] K. Saito, On a linear structure of the quotient variety by a finite reflection group. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **29** (1993), 535-579.

[22] K. Saito, Uniformization of orbifold of a finite reflection group, Frobenius Manifold, Quantam Cohomology and Singularities. A Publication of the Max-Planck-Institute f040010137109-1p.jpgpr Mathematics, Bonn, 265-320.

[23] K. Saito and T. Ishibe, The fundamental groups of the complement of logarithmic free divisors in $\mathbf{C}^3$. Preprint.

[24] J. Sekiguchi, Some topics related with discriminant polynomials. RIMS Kokyuroku **810** (1992), 85-94.

[25] J. Sekiguchi, On the classification of weighted homogeneous Saito free divisors, To appear in J. Math. Soc. Japan.

[26] J. Sekiguchi, Three dimensional Saito free divisors and deformations of singular curves, J. Siberian Federal Univ., Mathematicas and Physics, 1 (2008), 33-41.

[27] G. C. Shephard and A. J. Todd, Finite reflection groups, Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

[28] P. Slodowy, Simple Singularities and Simple Algebraic Groups. Springer LNM **815**.

[29] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness, I, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. Math. 27 (1980), 293-320.

[30] T. Yano and J. Sekiguchi, The microlocal structure of weighted homogenous polynomials associated with Coxeter systems. I, Tokyo J. Math. **2** (1979), 193-219.

[31] T. Yano and J. Sekiguchi, The microlocal structure of weighted homogenous polynomials associated with Coxeter systems. II, Tokyo J. Math. **4** (1981), 1-34.

[32] T. Yano and J. Sekiguchi, The microlocal structure of weighted homogenous polynomials associated with Coxeter systems (with Appendix on $GL(2)$). RIMS Kokyuroku **281** (1976), 40-105.