数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 148-157

一般化超幾何函数の接続公式とねじれホモロジーの交叉数

東京工業大学大学院理工学研究科　三町 勝久 (Katsuhisa Mimachi)
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

1. 確定特異点型の微分方程式の大域的性質を調べる一環としていわゆる接続問題が知られている．それぞれの特異点の近傍における解の基本系を指定した後，それらの一次関係式を与える定数が接続係数であり，それらを決定せよというのが接続問題である．

この接続問題は微分方程式の解の大域的な性質を調べる問題の中での象徴的なもののひとつであり，したがって，多くの研究がなされているが，具体例に即した具体的な結果は非常に少ないというのが現状のようである．

今回は，この接続問題を捉えるための新たな視点を導入する．それは「サイクルの交叉数」である．

一般に，解が積分表示されるとき，接続問題はサイクルのみたす一次関係式を求めることに帰着されるが，その係数が，じつは交叉数で表される．したがって，サイクルの交叉数を調べることが，すなわち，解の大域的構造を決定することになるのである．

積分表示を経由するという点では，全く新しいものではないかもしれないが，サイクルの交叉数という視点を獲得したことで，いままで実行不可能であった計算が，するすると計算できるようになる場合が出てくる．ここでは，その実行例として，一般化超幾何函数の接続問題を取り上げ，サイクルの交叉数がいかに接続問題に有効であるかを理解してもらう．

ここで，確認しておくと，一般化超幾何函数 (Generalized Hypergeometric Function) とは，一般化超幾何級数

$$
{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n+1} \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n\end{matrix}\ ;\ z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\cdots(\alpha_{n+1})_k}{(\beta_1)_k\ldots,(\beta_n)_k\,k!}\,z^k,\quad |z|<1
$$

(ただし，$(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$ とする) を解析接続したものとして定義されるものであり，Gauss の超幾何函数の自然な拡張のひとつとして知られているものである．そして，一般化超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ は

$$
\left\{\theta_z\Big\{\prod_{1\le i\le n}(\theta_z+\beta_i-1)\Big\}-z\Big\{\prod_{1\le i\le n+1}(\theta_z+\alpha_i)\Big\}\right\}F=0
$$

(ただし，$\theta=zd/dz$) なる確定特異点型の微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ を満たし，その特異点は $\mathbb{P}^1$ 上 $0,1,\infty$ なる 3 点であることがわかる．さらに，微分方程式 ${}_{n+1}E_n$ の各特異点における特性指数は

$$
\begin{aligned}
&0,\ 1-\beta_1,\ 1-\beta_2,\ \ldots,\ 1-\beta_n \quad \text{at} \quad z=0,\\
&0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i-\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i \quad \text{at} \quad z=1,\\
&\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n+1} \quad \text{at} \quad z=\infty
\end{aligned}
$$

であり，特に，$\beta_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}$ （$1\le i<j\le n+1$ および $\beta_{n+1}=1$ とする）なるとき，原点 $z=0$ における解の基本系として，

$$f_i^{(0)}(z)=(-z)^{1-\beta_i}{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_1-\beta_i+1,\ \alpha_2-\beta_i+1,\ \ldots,\ \alpha_{n+1}-\beta_i+1\\ \beta_1-\beta_i+1,\ \ldots\ \widehat{\beta_i-\beta_i+1},\ \ldots,\ \beta_{n+1}-\beta_i+1\end{matrix};z\right) \tag{1}$$

で $i=1,2,\ldots,n+1$ としたものを選ぶことができるし，同様に，$\alpha_i-\alpha_j\notin\mathbb{Z}\,(1\le i<j\le n+1)$ なる条件のもと，$z=\infty$ における解の基本系として

$$f_i^{(\infty)}(z)=(-z)^{-\alpha_i}{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_i-\beta_1+1,\ \alpha_i-\beta_2+1,\ \ldots\ \alpha_i-\beta_{n+1}+1\\ \alpha_i-\alpha_1+1,\ \ldots,\ \widehat{\alpha_i-\alpha_i+1},\ \ldots\ \alpha_i-\alpha_{n+1}+1\end{matrix};\frac{1}{z}\right) \tag{2}$$

で $i=1,2,\ldots,n+1$ としたものを選ぶことができる．ただし，ここでも，$\beta_{n+1}=1$ としている．

そして，これらの解の基本系に対して，次のような接続問題の解が知られている．

定理（接続公式） $1\le i\le n+1$ に対して，

$$f_i^{(\infty)}(z)=\sum_{j=1}^{n+1}\prod_{s\neq i}\frac{\Gamma(\alpha_i-\alpha_s+1)}{\Gamma(\beta_j-\alpha_s)}\prod_{s\neq j}\frac{\Gamma(\beta_j-\beta_s)}{\Gamma(\alpha_i-\beta_s+1)}\times f_j^{(0)}(z). \tag{3}$$

この公式は，${}_3F_2$ の場合の Thomae (1870) を皮切りに，Barnes (1908)，Winkler (1930)，Smith (1938)，Nørlund (1955), 川畑ユリ子 (1978)，大久保 - 高野 - 吉田 (節) (1988) により，それぞれ工夫を凝らした方法により，導かれている．

ところで，ガウスの超幾何函数 ${}_2F_1$ の場合の接続公式の導出方法の代表的なものとして，オイラー型積分表示式とコーシーの積分定理とを組み合わせるものが知られており，犬井先生の教科書 [2] の 172 ページから 176 ページに丁寧に解説されていることもあって，多くの人にとってお馴染みの方法となっている．そして，一般化超幾何函数のオイラー型積分表示は

$$
{}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n+1}\\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n\end{matrix};z\right)=\prod_{s=1}^{n}\frac{\Gamma(\beta_s)}{\Gamma(\alpha_s)\Gamma(\beta_s-\alpha_s)}
$$
$$
\times\int_{1<t_1<t_2<\cdots<t_n<\infty}\prod_{i=1}^{n}t_i^{\alpha_{i+1}-\beta_i}\prod_{i=1}^{n+1}(t_i-t_{i-1})^{\beta_i-\alpha_i-1}\,dt_1\cdots dt_n
$$

（ただし，$t_0=1$, $t_{n+1}=z$ とする）で与えられる．しかし，さきほど書き並べた多くの方々がとった方法は，${}_2F_1$ のときに犬井先生が本に書いたものとは異なる方法であって，コーシーの積分定理を用いて ${}_{n+1}F_n$ の場合に接続公式を導くという論文は見当たらない．それを不思議に思ったのが数年前で，${}_3F_2$ の場合，どんな状況に出くわすかを経験するために計算してみた [7]．まずは，この経験により明らかになった問題点を説明したいが，そのためにも，一般的な枠組みとしてのねじれホモロジーについて，まとめておきたい．

2. 適当な多項式の組 $\{f_i(t)\}$ に対して，

$$T=\mathbb{C}^m\setminus\cup_i\{f_i(t)=0\}$$

とする．そして，多価函数

$$u(t) = \prod_i f_i(t)^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

により定義される T 上の局所定数層（局所系）を $\mathcal{L}$，つまり，$\omega = du(t)/u(t)$ を用いた L に対する微分方程式 $dL = L\omega$ の局所解のなす層を $\mathcal{L}$ とする．このとき，$\mathcal{L}$ を係数とする T のホモロジー $H_m(T,\mathcal{L})$ や $H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})$ を m 次ねじれホモロジー (twisted homology)，または，函数を背負ったホモロジー (homology with loaded functions) という．ここで，$H_m(T,\mathcal{L})$ は有限チェインによるもの，$H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})$ は必ずしも有限チェインとは限らない局所有限 (locally finite) なチェインによるものとし，どちらにしても，その元を，ねじれサイクル，または，函数を背負ったサイクルと呼ぶことにする．

そして，$u(t)$ の各因子 $f_i(t)$ が $\mathbb{R}$ 上で定義されている場合，T を実数部分に制限した $T|_{\mathbb{R}}$ における単連結領域 D に応じて，新たな函数 $u_D(t)$ を次のように定める．

$$u_D(t) = \prod_i (\epsilon_i f_i(t))^{\alpha_i}.$$

ここで，$\epsilon_i = \pm$ なる符号を D 上で $\epsilon_i f_i(t)$ が正になるように決め，D における $(\epsilon_i f_i(t))$ の偏角をゼロと定める．$\mathcal{L}$ の切断 $u_D(t)$ を D 上の標準的な切断と呼ぶことにする．そして，単連結な D と標準的な切断 $u_D(t)$ とを合わせて考える場合，D に函数 u を標準的に背負わせる（*standard loading*）と言うことにして，サイクル C に u を標準的に背負わせるなど，それに準じた言葉遣いをも許すことにする．

以下，特に断らなければ，標準的なサイクルを考えることにして，ねじれサイクルの元を表す際も，トポロジカルな部分だけを記すこととし，$\mathcal{L}$ の切断部分を陽に記すことは省略することにする．たとえば，$u(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$ のとき，$\overrightarrow{(0,1)}$ で $\overrightarrow{(0,1)} \otimes t^\alpha(1-t)^\beta$ を表し，$\overrightarrow{(1,\infty)}$ で $\overrightarrow{(1,\infty)} \otimes t^\alpha(t-1)^\beta$ を表すものとする．

また，指数 α_i が適当な条件を満たすとき，正則化（*regularization*）と呼ばれる同型写像

$$\mathrm{reg} \ : \ H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L}) \longrightarrow H_m(T,\mathcal{L})$$

が定義できる．例えば，$T = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ で定義される函数 $u(t) = t^\alpha(t-1)^\beta$ の指数が $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ であるとき，$C = \overrightarrow{(0,1)} \in H_1^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})$ の正則化 $\mathrm{reg}\, C \in H_1(T,\mathcal{L})$ は

$$\mathrm{reg}\, C = \left\{ \frac{1}{d_\alpha} S(\epsilon\,;0) + \overrightarrow{[\epsilon, 1-\epsilon]} - \frac{1}{d_\beta} S(1-\epsilon\,;1) \right\}$$

で与えられる．

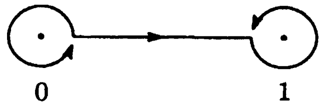

図 1

ただし，ここで，$S(\epsilon\,;0)$ は $t=0$ を中心，$t=\epsilon$ を始点および終点とする反時計方向にひとまわりの円周とし，$u(t)$ の各因子の偏角を始点の $t=\epsilon$ においてゼロと固定，同様に，$S(1-\epsilon\,;1)$ は中心を $t=1$，始点および終点を $t=1-\epsilon$ とする反時計方向にひとまわりの円周とし，$u(t)$ の各因子の偏角を始点の $t=1-\epsilon$ においてゼロと固定する．ϵ は小さな正数（実際は $0<\epsilon\le 1/2$ でよい）．そして，$d_a = e(2a)-1$ および $e(A) = \exp(\pi\sqrt{-1}A)$ とする．

次では，一般化超幾何函数の考察に戻る．

3. いま，$z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ に対して，$t_0 = 1$, $t_{n+1} = z$ として，

$$T_z = \mathbb{C}^n \backslash \cup_{i=1}^{n} \{ t_i = 0 \} \cup \cup_{i=1}^{n+1} \{ t_i - t_{i-1} = 0 \}$$

とする．そして，

$$u(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha_{i+1}-\beta_i} \prod_{i=1}^{n+1} (t_i - t_{i-1})^{\beta_i - \alpha_i - 1}$$

（ただし，$\beta_{n+1} = 1$ とした）により定義される T_z 上の局所定数層（局所系）を $\mathcal{L}_z$，このとき，適当な genericity 条件のもとでのねじれホモロジー $H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ のランクは $n+1$ であり，同型写像

$$\mathrm{reg}\ :\ H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z) \longrightarrow H_m(T_z, \mathcal{L}_z)$$

が存在する．このとき，$H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ の基底は，z を $\infty < z < 0$ なる点に固定したとき，ねじれサイクル

$$D_i^{(0)} = \begin{pmatrix} \infty < z < t_n < \cdots < t_i < 0 \\ 1 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < \infty \end{pmatrix}$$

による $\{D_1^{(0)}, D_2^{(0)}, \ldots, D_{n+1}^{(0)}\}$ や，ねじれサイクル

$$D_i^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \infty < t_i < \cdots < t_n < z \\ 0 < t_{i-1} < \cdots < t_1 < 1 \end{pmatrix}$$

による $\{D_1^{(\infty)}, D_2^{(\infty)}, \ldots, D_{n+1}^{(\infty)}\}$ で与えることができる．

また，いっぽうで，サイクル $D_i^{(0)}$ における積分 $I_i^{(0)}(z)$ は (1) を用いて，

$$I_i^{(0)}(z) = \int_{D_i^{(0)}} u_{D_i^{(0)}}(t)\, dt_1 \cdots dt_n = \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne i}} B(\alpha_s - \beta_i + 1, \beta_s - \alpha_s) \times f_i^{(0)}(z), \qquad (4)$$

サイクル $D_i^{(\infty)}$ における積分 $I_i^{(\infty)}(z)$ は (2) を用いて，

$$I_i^{(\infty)}(z) = \int_{D_i^{(\infty)}} u_{D_i^{(\infty)}}(t)\, dt_1 \cdots dt_n = \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne i}} B(\alpha_i - \beta_s + 1, \beta_s - \alpha_s) \times f_i^{(\infty)}(z) \qquad (5)$$

であるので，けっきょく，接続公式を求めることが，ねじれサイクルの二組の基底 $\{D_1^{(0)}, D_2^{(0)}, \ldots, D_{n+1}^{(0)}\}$ と $\{D_1^{(\infty)}, D_2^{(\infty)}, \ldots, D_{n+1}^{(\infty)}\}$ との一次関係式を求めることに帰着されたことになる．

そして，$m = 1$ の場合，すなわち，ガウスの超幾何函数 ${}_2F_1$ の場合には，4つのサイクル $D_1^{(0)}, D_2^{(0)}, D_1^{(\infty)}, D_2^{(\infty)}$ の間の関係式として，トリビアルサイクルを上半平面から持ってくることで生じる関係式と下半平面からから持ってくることで生じる関係式のふたつがあり，それを用いて，$D_i^{(\infty)}$ $(i = 1, 2)$ を $D_1^{(0)}, D_2^{(0)}$ の一次結合で表せば接続公式そのものになるということが大井先生の教科書に書かれていることであった．つぎに，この事情を，$m = 2$ の場合に，吟味してみる．

4. この節だけ，函数 $u(t)$ の指数の名前付けをちょっとだけ変えて，

$$u(t) = t_1^{\lambda_1} (t_1 - 1)^{\lambda_2} (t_2 - z)^{\lambda_3} t_2^{\lambda_4} (t_2 - t_1)^{\lambda_5}$$

とする．文献 [7] に合わせるためと，簡単のためである．z は今まで通り $z < 0$ に固定する．そして，$T_{\mathbb{R}}$ の領域 D_j $(1 \le j \le 13)$ を下の図のように番号付けする．

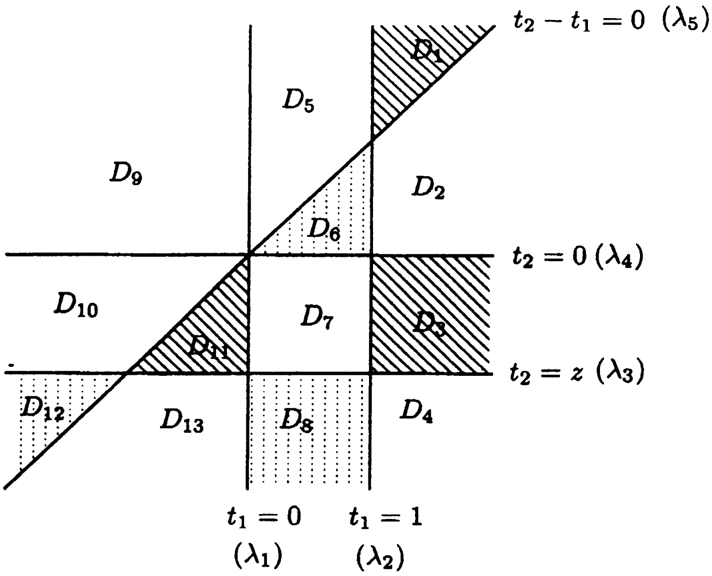

図 2

この図 1 におけるサイクル D_1, D_3, D_{11} が，それぞれ，ちょうど，原点の近傍での解の基本系を与える $D_3^{(0)}$, $D_2^{(0)}, D_1^{(0)}$ に対応し，D_6, D_8, D_{12} それぞれが無限遠点の近傍での解の基本系を与える $D_3^{(\infty)}$, $D_2^{(\infty)}, D_1^{(\infty)}$ に対応する．

ここで図 1 における 13 個のサイクルに関する一次関係式を求めてみると，

$$\lambda_{ijk\cdots l} = \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \cdots + \lambda_l, \qquad e_{ijk\cdots l} = e(\lambda_{ijk\cdots l})$$

および，

$$e(A) = \exp(\pi\sqrt{-1}A)$$

なる記号を用いて，

$$D_1 + e_5\,D_2 + e_{45}\,D_3 + e_{345}\,D_4 = 0, \tag{6}$$

$$D_5 + e_5\,D_6 + e_{45}\,D_7 + e_{345}\,D_8 = 0, \tag{7}$$

$$D_9 + e_4\,D_{10} + e_{45}\,D_{11} + e_{34}\,D_{12} + e_{345}\,D_{13} = 0, \tag{8}$$

$$D_9 + e_1\,D_5 + e_{15}\,D_6 + e_{12}\,D_1 + e_{125}\,D_2 = 0, \tag{9}$$

$$D_{10} + e_5\,D_{11} + e_{15}\,D_7 + e_{125}\,D_3 = 0, \tag{10}$$

$$D_{12} + e_5\,D_{13} + e_{15}\,D_8 + e_{125}\,D_4 = 0, \tag{11}$$

および

$$D_1 + e_5^{-1} D_2 + e_{45}^{-1} D_3 + e_{345}^{-1} D_4 = 0, \tag{12}$$

$$D_5 + e_5^{-1} D_6 + e_{45}^{-1} D_7 + e_{345}^{-1} D_8 = 0, \tag{13}$$

$$D_9 + e_4^{-1} D_{10} + e_{45}^{-1} D_{11} + e_{34}^{-1} D_{12} + e_{345}^{-1} D_{13} = 0, \tag{14}$$

$$D_9 + e_1^{-1} D_5 + e_{15}^{-1} D_6 + e_{12}^{-1} D_1 + e_{125}^{-1} D_2 = 0, \tag{15}$$

$$D_{10} + e_5^{-1} D_{11} + e_{15}^{-1} D_7 + e_{125}^{-1} D_3 = 0, \tag{16}$$

$$D_{12} + e_5^{-1} D_{13} + e_{15}^{-1} D_8 + e_{125}^{-1} D_4 = 0. \tag{17}$$

となる．そして，これを解いて，D_6, D_8, D_{12} を D_1, D_3, D_{11} により表せば，

$$D_6 = \frac{s(\lambda_{345})s(\lambda_{12345})}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{1345})} D_1 + \frac{s(\lambda_3)s(\lambda_{125})}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{15})} D_3 - \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_3)}{s(\lambda_{15})s(\lambda_{1345})} D_{11}, \tag{18}$$

$$D_8 = \frac{s(\lambda_5)s(\lambda_{12345})}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{1345})} D_1 + \frac{s(\lambda_4)s(\lambda_{125})}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{15})} D_3 - \frac{s(\lambda_5)s(\lambda_{145})}{s(\lambda_{15})s(\lambda_{1345})} D_{11}, \tag{19}$$

$$D_{12} = \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_{345})}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{1345})} D_1 - \frac{s(\lambda_2)s(\lambda_4)}{s(\lambda_{34})s(\lambda_{15})} D_3 + \frac{s(\lambda_1)s(\lambda_{145})}{s(\lambda_{15})s(\lambda_{1345})} D_{11} \tag{20}$$

が得られ，結局，求める接続公式が導かれる．ただし，$s(A) = \sin(\pi A)$ とした．

ここまで書けば，この状況が m を増やしていくにつれどのようになるかが簡単に想像できるだろう．$m = 2$ の場合ですら，目指す 3 個の関係式 (18) ~ (20) を得るためには，13 変数についての，みかけ 12 個の連立方程式 (6) ~ (17) を解かねばならないのである．このままでは，一般的な m の場合には，全く無力であると結論するしかない．このことが，いかに正攻法と見えども，過去の手段として採用されなかった大きな理由である（高次元のサイクルをいかに捉えるかということも，もう一方の，大きな障害ではあったと思うが）．

ここをどうクリアーするか．これが問題である．

5. もう一度，頭を冷やして，問題を整理してみよう．設定を，m 一般での，一般化超幾何函数の場合に戻すと，接続公式を求めることは $H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ のねじれサイクルの二組の基底 $\{D_1^{(0)}, D_2^{(0)}, \ldots, D_{n+1}^{(0)}\}$ と $\{D_1^{(\infty)}, D_2^{(\infty)}, \ldots, D_{n+1}^{(\infty)}\}$ との一次関係式を求めることであった．

ここで，当たり前のことから確認していくことにすると，それぞれが $H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ の基底であるということから，複素数 c_{ij} が存在して，$i = 1, \ldots, n+1$ に対して，

$$D_i^{(\infty)} = \sum_{1 \le j \le n+1} c_{ij} D_j^{(0)}$$

なる一次関係式が存在することは保証されている．この係数 c_{ij} をいかに決めるかが問題なのであった．この関係式をしばらくじっと眺めてみよう,,,.

すると,,,, 両辺は $H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ の元である．$H_m^{\mathrm{lf}}(T_z, \mathcal{L}_z)$ には，いくつかの双対的な空間がある．ひとつは，コホモロジー，もうひとつは，やはり，ホモロジー,,,. これを利用できないか？そう思い始めれば，あとは早い．交差数を考えればよいではないか．

いま，$H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})\times H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})$ 上のエルミート形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を次のように定義する．

$$(C,C')\longmapsto\langle C,C'\rangle=\sum_{\rho,\sigma}a_\rho\,\overline{a'_\sigma}\sum_{t\in\rho\cap\sigma}I_t(\rho,\sigma)v_\rho(t)\overline{v'_\sigma(t)}/|u|^2.$$

ただし，第一成分の $C\in H_m^{\mathrm{lf}}(T,\mathcal{L})$ に対しては，その正則化 $\mathrm{reg}\,C\in H_m(T,\mathcal{L})$ を取ったもの，

$$\mathrm{reg}\ C=\sum_\rho a_\rho\,\rho\otimes v_\rho(t)$$

と，第二成分の複素共役

$$\overline{C'}=\sum_\sigma\overline{a'_\sigma}\,\sigma\otimes\overline{v'_\sigma(t)}$$

とのぶつかり具合を調べている．ここで，a_ρ,a'_σ は複素数，ρ と σ は m-単体，v_ρ と v'_σ は ρ 上または σ 上の $\mathcal{L}$ の切断，$^-$ は複素共役，$I_x(\rho,\sigma)$ は点 x における ρ と σ との通常の交叉数である．このエルミート形式を交叉形式（*Intersection form*），その値 $\langle C,C'\rangle$ をサイクル C と C' との交叉数（*intersection number*）という．また，交叉数を表すには $C\bullet C'$ という記号を使うこともある．

例えば，$u(t)=t^\alpha(1-t)^\beta,T=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ のとき，$C=\overrightarrow{(0,1)}$ の自己交叉数 $C\bullet C$ は $d_a=e(2a)-1,e(a)=\exp(\pi\sqrt{-1}a)$ として，

$$-\frac{d_{\alpha+\beta}}{d_\alpha d_\beta}$$

となる．というのも，C の正則化 $\mathrm{reg}\,C\in H_1(T,\mathcal{L})$ が

$$\mathrm{reg}\,C=\left\{\frac{1}{d_\alpha}S(\epsilon\,;0)+\overrightarrow{[\epsilon,1-\epsilon]}-\frac{1}{d_\beta}S(1-\epsilon\,;1)\right\}$$

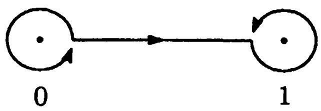

図 3

であるので，ぶつかり具合がよくわかるよう，もういっぽうの $\overline{C}$ をサイン曲線のようにぐにゃりと曲げて考えると，$\mathrm{reg}\,C$ と $\overline{C}$ との交点は三か所になって，それぞれでの係数から来る値を拾えば，

$$-\frac{1}{d_\alpha}-1+\frac{-1}{d_\beta}=-\frac{d_{\alpha+\beta}}{d_\alpha d_\beta}.$$

となるからである．

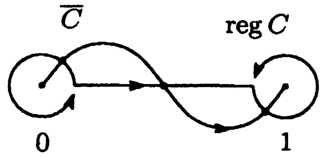

図 4

また，$C = \overrightarrow{(0,1)}$ と $C' = \overrightarrow{(1,\infty)}$ との交叉数 $\langle C, C' \rangle$ は

$$\frac{e(\beta)}{e(2\beta)-1}$$

である．

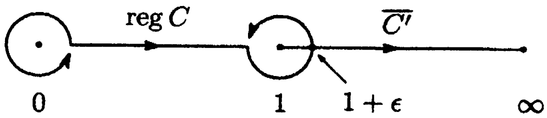

図 5

さて，このような交叉数を使うと，接続係数についての一般的な公式が導かれる．これを一般化超幾何函数の場合で説明すると，次の如くなる．

$$D_i^{(\infty)} = \sum_{1 \le j \le n+1} c_{ij}\, D_j^{(0)}$$

この両辺の $D_1^{(0)}$ との交叉数，$D_2^{(0)}$ との交叉数，...，という具合に考えて，それをまとめて書けば，$C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n+1}$ として，

$$\begin{pmatrix} D_1^{(\infty)} \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{n+1}^{(\infty)} \end{pmatrix} \bullet (D_1^{(0)}, \dots, D_{n+1}^{(0)}) = C \begin{pmatrix} D_1^{(0)} \\ \vdots \\ \vdots \\ D_{n+1}^{(0)} \end{pmatrix} \bullet (D_1^{(0)}, \dots, D_{n+1}^{(0)}).$$

つまり，

$$\begin{pmatrix} D_1^{(\infty)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_1^{(\infty)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{n+1}^{(\infty)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_{n+1}^{(\infty)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} D_1^{(0)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_1^{(0)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{n+1}^{(0)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_{n+1}^{(0)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$C = \begin{pmatrix} D_1^{(\infty)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_1^{(\infty)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{n+1}^{(\infty)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_{n+1}^{(\infty)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^{(0)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_1^{(0)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{n+1}^{(0)} \bullet D_1^{(0)} & \cdots & D_{n+1}^{(0)} \bullet D_{n+1}^{(0)} \end{pmatrix}^{-1}$$

となり，接続行列がサイクルの交叉行列の積で表示される．一応，一般化超幾何函数の場合の説明であるが，接続行列がサイクルの交叉行列の積で表示されるということは，一般化超幾何函数の場合に限らず，一般的な公式であることを注意・強調しておきたい．

そして，さらに，一般化超幾何函数であることが反映される状況に論を進めると， $1 \le i, j \le n+1$ なる i, j に対して，

$$D_i^{(0)} \bullet D_j^{(0)} = \delta_{ij} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne j}} \frac{\sin(\beta_s - \beta_j)}{\sin(\beta_s - \alpha_s)\sin(\alpha_s - \beta_j)}.$$

つまり，交叉行列 $\left(D_i^{(0)} \bullet D_j^{(0)}\right)_{1 \le i,j \le n+1}$ が対角行列で，しかも，その要素が正弦函数の比で表わされることがわかる．そして，さらには

$$D_i^{(\infty)} \bullet D_j^{(0)} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \frac{1}{\sin(\beta_j - \alpha_i)} \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne i,j}} \frac{1}{\sin(\beta_s - \alpha_s)}$$

であるから，けっきょく，

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{D_i^{(\infty)} \bullet D_j^{(0)}}{D_j^{(0)} \bullet D_j^{(0)}} \\ &= \frac{\sin(\beta_i - \alpha_i)}{\sin(\beta_j - \alpha_i)} \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne j}} \frac{\sin(\alpha_s - \beta_j)}{\sin(\beta_s - \beta_j)} \end{aligned}$$

が得られる．これで念願の関係式が得られた．

$$D_i^{(\infty)} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\sin(\beta_i - \alpha_i)}{\sin(\beta_j - \alpha_i)} \prod_{\substack{1 \le s \le n+1 \\ s \ne j}} \frac{\sin(\alpha_s - \beta_j)}{\sin(\beta_s - \beta_j)} \times D_j^{(0)}.$$

あとは，お約束通り，(4), (5) とあわせれば，接続公式 (3) となる．

微分方程式の解の接続問題がホモロジーの交叉数の議論に帰着される話，いかがだったろうか．この議論は，その後，いくつもの具体例の計算へ導いてくれている．それについては，またの機会に話したい．

(2009.7.13 脱稿)

参考文献

[1] E. W. Barnes : A new development of the theory of the hypergeometric functions, Proc. London Math. Soc. (2), **6** (1908), 141–177.

[2] 犬井鉄郎 ： 特殊函数，岩波全書 252，岩波書店，1962.

[3] 川畑ユリ子：3 個の確定特異点をもつ n 階 Fuchs 型微分方程式の接続問題，津田塾大学紀要，**8** (1976), 69–75, 同 II, ibid, **10** (1978), 45–55.

[4] M. Kita and M. Yoshida : Intersection theory for twisted cycles, Math. Nach., **166** (1994), 287–304.

[5] M. Kita and M. Yoshida : Intersection theory for twisted cycles II, Math. Nach., **168** (1994), 171–190.

[6] K. Matsumoto and M. Yoshida : Recent progress of interesection theory for twisted (co)homology groups, Advanced Studies in Pure Math., **27** (2000), 217–237.

[7] K. Mimachi : Connection matrices associated with the generalized hypergeometric function ${}_3F_2$, Funkt. Ekvac., **51** (2008) 107 – 133.

[8] K. Mimachi and M. Yoshida : Intersection numbers of twisted cycles and the correlation functions of the conformal field theory, Commun. Math. Phys., **234** (2003), 339–358.

[9] K. Mimachi and M. Yoshida : Intersection numbers of twisted cycles associated with the Selberg integral and an application to the conformal field theory, Commun. Math. Phys., **250** (2004), 23–45.

[10] N. E. Nørlund : Hypergeometric functions, Acta Math., **94** (1955), 289–349.

[11] K. Okubo, K. Takano, S. Yoshida : A connection problem for the generalized hypergeometric equation, Funk. Ekvac., **31** (1988), 483–495.

[12] F. C. Smith : Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q + 1$. Non-logarithmic cases, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 429–433.

[13] V. T. Thomae : Ueber die höheren hypergeometrischen reihen, insbesondere über die reihe: $1 + \frac{a_0 a_1 a_2}{1.b_1 b_2} x + \frac{a_0(a_0+1)a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{1.2.b_1(b_1+1)b_2(b_2+1)} x^2 + \cdots$, Math. Ann., **2** (1870), 427–444

[14] E. Winkler : Über die hypergeometrische differentialgleichung n^{ter} ordnung mit zwei endlichen singulären punkten, Inaugural-Dissertation, Universität München, 1930.