数理解析研究所講究録
第1662巻 2009年 211-217

Linear monodromy of the Painlevé transcendents

大山 陽介（大阪大学・情報科学研究科）

講演では、Painlevé 方程式で、連続・q-差分の場合の双方について線型接続問題が決定できる場合について述べた。連続のほうは、本質的に金子の結果であるので、ここでは q-Painlevé VI 型方程式 q-$P_{\rm VI}$ の、原点の周りで解析的な解について論じる。q-$P_{\rm VI}$ は、神保・坂井 [2] によって2階の q-差分線型方程式の接続保存変形として発見された。古典的な Painlevé 微分方程式の場合にはモノドロミ保存変形がきわめて重要な役割を果たしているのに対して、q-差分線型方程式の場合は接続保存変形を使った研究は全くないと言ってよい。一つには、q-差分線型方程式の接続問題自体が深く研究されてないことが理由であろうが、q-$P_{\rm VI}$ に対応する q-差分線型方程式の接続問題を解く事はたやすいことではない。ここでは、一つの nontrivial だが簡単な例について調べることで、将来の研究への布石としたい。

なお、研究会の講演では連続の場合の Painlevé VI 型方程式の原点の周りで解析的な解（金子の解）についても話したが、こちらについては金子氏の論文 [3], [4] を参考されたい。

1 q-Painlevé VI型方程式

記号の統一もあるので、神保・坂井 [2] の復習をする。記号は [2] と全く同じなので、既知の読者は飛ばしてもらって差し支えない。

1) まず、q-Painlevé VI 型方程式 q-$P_{\rm VI}$ とは

$$\frac{y\bar{y}}{a_3a_4}=\frac{(\bar{z}-b_1t)(\bar{z}-b_2t)}{(\bar{z}-b_3)(\bar{z}-b_4)},\quad \frac{z\bar{z}}{b_3b_4}=\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{(y-a_3)(y-a_4)},$$

$$\frac{b_1b_2}{b_3b_4}=q\frac{a_1a_2}{a_3a_4},$$

around $t=0$. $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ は複素パラメタ、$\bar{f}=f(qt)$. 以下では、a_j,b_k の比は全て $q^{\mathbb{Z}}$ ではないと仮定する（全てをそう仮定する必要は実はない）。

q-$P_{\rm VI}$ の解については、超幾何解、わずかの代数解が知られている。q-差分方程式について代数解はあったとしても $\sqrt[n]{t}$ の有理式であるから、連

続の第VI方程式のような面白いものは少ないと思われる（あくまで個人的主観である）。それ以外の解（たとえばPicard解の q-類似があるか？）は、2009年3月の段階では知られてないと言っていいだろう。

2) 神保・坂井の接続保存変形（connection preserving deformation[1]）とは次のような2階2次の線型方程式の変形である。

$$Y(qx,t) = A(x,t)Y(x,t), \tag{1}$$
$$Y(x,qt) = B(x,t)Y(x,t). \tag{2}$$

ここで

$$A(x,t) = A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2,$$

であり、変形方程式のほうは

$$B(x,t) = \frac{x}{(x-a_1qt)(x-a_2qt)}(xI + B_0(t)).$$

$A(x,t)$ については次の標準化を行う：

$$A_2 = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$$

$A_0(t)$ の固有値を $\theta_1 t, \theta_2 t$ とし、

$$A_0 = C_0 \mathrm{diag}(\theta_1 t, \theta_2 t) C_0^{-1}$$

とする。また、$\det A(x,t) = \kappa_1\kappa_2(x-a_1t)(x-a_2t)(x-a_3)(x-a_4)$ と仮定する。もちろん、$\theta_1\theta_2 = \kappa_1\kappa_2 a_1a_2a_3a_4$ であり、微分の場合の Fuchs の関係式にあたる。次の generic condition を課す：

$$\frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \notin \{q^{\pm 1}, q^{\pm 2}, \ldots\}.$$

以下、 $\mathrm{lq}\, x = \log_q x$ とおく。 $\ln x = \log_e x$ のもじりであり、私が個人的に使っている記号なので、普及するかどうかわからない。

Birkhoff [1] は差分の場合にもリーマンの問題を定式化している：

Proposition 1 原点と無限遠点のまわりで次の性質を満たす解 $Y_0(x), Y_\infty(x)$ が一位に存在する：

$$Y_0(x) = \hat{Y}_0(x)x^{D_0}, \qquad D_0 = \mathrm{diag}(\log_q \theta_1 t, lq\, \theta_2 t)$$
$$Y_\infty(x) = q^{u(u-1)}\hat{Y}_\infty(x)x^{D_\infty}, \qquad D_\infty = \mathrm{diag}(\log_q \kappa_1, \log_q \kappa_2),\ u = \log_q x.$$

[1] "∼ preserving deformation" というのは、いかにもなジャパニーズ・イングリッシュであるが、定着したと思われる

ここで、 $\hat{Y}_0(x)$, $\hat{Y}_\infty(x)$ は、それぞれ $x=0$, $x=\infty$ の周りで正則かつ可逆である。また、 $\hat{Y}_0(0)=C_0$, $\hat{Y}_0(\infty)=I$.

接続行列 $P(x)$ は次で定義される

$$Y_\infty(x)=Y_0(x)P(x).$$

あきらかに $P(x)$ は pseudo-constant、すなわち $P(qx)=P(x)$ であり、テータ関数で表示される。

しかしながら、一般には接続行列を求めることは困難である。basic hypergeometic function に対しては、1910 年に Watson が接続係数を計算した。この結果は忘れられたようで、Watson の結果を拡張して、より一般の差分方程式の接続係数を求めた三町氏の論文にも引用されてない。

神保・坂井の変形方程式については、接続行列は t についても pseudo-constant になり、$P(x,qt)=P(x,t)$ をみたす。

3) 以下、self-contained になるように神保・坂井のパラメタを書く。このパラメタの取りかたが本当に良いものかどうか、今後の研究の中で探らないといけないはずであり、本質的ではないかもしれないが重要な問題である（たとえば、連続の場合の三輪神保の PIV、PV のパラメタは良いものではない。金子の論文 [4], [5] を参考)。「正準座標は canonical に選べない」が、よい座標をえらぶことが大切である。Painlevé 方程式の既存の研究では、既存の表示を疑わずに与えられたものとして使う人も多いが、使いやすい表示をたえず探っていきたい。

連続の場合の類似で、$A_{12}(x)$ の零点を y として、$A(x,t)$ $B(x,t)$ を y,z_1,z_2 で表示する：

$$A_{12}(y,t)=0,\quad A_{11}(y,t)=\kappa_1 z_1,\quad A_{22}(y,t)=\kappa_2 z_2.$$

y,z_1 and z_2 は関係式

$$z_1z_2=\kappa_1\kappa_2(y-a_1t)(y-a_2t)(y-a_3)(y-a_4)$$

をみたし、

$$z_1=\frac{(y-a_1t)(y-a_2t)}{\kappa_1 qz},\quad z_2=\kappa_1 qz(y-a_3)(y-a_4).$$

y,z_1,z_2 を使って $A(x,t)$ は次のようにかける：

$$A(x,t)=\begin{pmatrix}\kappa_1((x-y)(x-\alpha)+z_1) & \kappa_2 w(x-y)\\ \kappa_1 w^{-1}(\gamma x+\delta) & \kappa_2((x-y)(x-\beta)+z_2)\end{pmatrix}.$$

ここで

$$\alpha = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}[y^{-1}((\theta_1+\theta_2)t - \kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2) - \kappa_2((a_1+a_2)t + a_3 + a_4 - 2y)],$$
$$\beta = \frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}[-y^{-1}((\theta_1+\theta_2)t - \kappa_1 z_1 - \kappa_2 z_2) + \kappa_1((a_1+a_2)t + a_3 + a_4 - 2y)],$$
$$\gamma = z_1 + z_2 + (y+\alpha)(y+\beta) + (\alpha+\beta)y - a_1 a_2 t^2 - (a_1+a_2)(a_3+a_4)t - a_3 a_4,$$
$$\delta = y^{-1}(a_1 a_2 a_3 a_4 t^2 - (\alpha y + z_1)(\beta y + z_2)),$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2}{\theta_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_2}{\theta_2}, \quad b_3 = \frac{1}{\kappa_1 q}, \quad b_4 = \frac{1}{\kappa_2}.$$

compatibility condition から導かれるのは q-P_{VI} ともう一つ、ゲージ・パラメタ $w = w(t)$ に関する次の差分方程式である：

$$\frac{\bar{w}}{w} = \frac{b_4}{b_3}\frac{\bar{z} - b_3}{\bar{z} - b_4}.$$

$B_0(t)$ の成分は、ここでは使わないが念のために記す：

$$B_{11} = \frac{-\kappa_2 q \bar{z}}{1 - \kappa_2 \bar{z}}\left(-\beta + \frac{t(a_1+a_2) - y}{\kappa_2 \bar{z}}\right), \quad B_{12} = \frac{\kappa_2 q w \bar{z}}{1 - \kappa_2 \bar{z}},$$
$$B_{21} = \frac{\kappa_1 q \bar{z}}{w(1 - \kappa_1 q \bar{z})}\left(a_1 q t - \bar{\alpha} + \frac{a_2 q t - \bar{y}}{\kappa_1 q \bar{z}}\right)\left(a_1 t - \beta + \frac{a_2 t - y}{\kappa_2 \bar{z}}\right),$$
$$B_{22} = \frac{-\kappa_1 q \bar{z}}{1 - \kappa_1 q \bar{z}}\left(-\bar{\alpha} + \frac{qt(a_1+a_2) - \bar{y}}{\kappa_1 q \bar{z}}\right).$$

2 原点の周りでの解析的な解

現時点で、 q-P_{VI} の解の $t = 0, \infty$ での局所的な性質は調べられてない。ただ、だいたいの予想はついているので、別の機会に記す。

q-P_{VI} の原点の周りでの解析的な解は直接方程式を調べて、generic parameter については次の 4 つあることがわかる：

Proposition 2 *generic parameter* では、q-P_{VI} は原点の周りで解析的な解を *4* つ持つ。原点の周りで $y, z \sim O(t^0)$ のものが *2* つ：

$$\text{Case I)} \quad y(0) = \frac{a_3 b_3 - a_4 b_4}{b_3 - b_4}, \qquad z(0) = \frac{a_3 b_3 - a_4 b_4}{a_3 - a_4}, \tag{3}$$
$$\text{Case II)} \quad y(0) = \frac{a_4 b_3 - a_3 b_4}{b_3 - b_4}, \qquad z(0) = \frac{a_3 b_4 - a_4 b_3}{a_3 - a_4}. \tag{4}$$

原点の周りで $y, z \sim O(t^1)$ のものが2つ：

$$\text{Case III)}\quad y'(0) = \frac{a_1a_2(b_1-b_2)}{a_2b_1-a_1b_2}, \qquad z'(0) = -\frac{b_1b_2(a_1-a_2)}{(a_2b_1-a_1b_2)q}, \tag{5}$$

$$\text{Case IV)}\quad y'(0) = \frac{a_1a_2(b_1-b_2)}{a_1b_1-a_2b_2}, \qquad z'(0) = \frac{b_1b_2(a_1-a_2)}{(a_1b_1-a_2b_2)q}. \tag{6}$$

高次の項は順次決定される。

Painlevé VI のときの金子の解の類似で言えば、これら4つの解に対しては接続問題が超幾何方程式に帰着して解けるはずである。

3 接続問題

ここでいう接続問題は線型の話である。まず、q-超幾何の場合を復習する。Heine の q-超幾何函数 (basic hypergeometric function) ${}_2\varphi_1(a,b,c;x)$ とは

$$ {}_2\varphi_1(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n} x^n, \tag{7}$$

で与えられる。ここで、$(a;q)_n = (a)_n = \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j)$, $(a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j)$.

q-超幾何函数の接続公式は Watson [7] によって与えられた：

$$\begin{aligned} {}_2\varphi_1(a,b;c;q;z) = {} & \frac{(b,c/a;q)_\infty(az,q/az;q)_\infty}{(c,b/a;q)_\infty(z,q/z;q)_\infty} {}_2\varphi_1(a,aq/c;aq/b;q;cq/abz) \\ & + \frac{(a,c/b;q)_\infty(bz,q/bz;q)_\infty}{(c,a/b;q)_\infty(z,q/z;q)_\infty} {}_2\varphi_1(b,bq/c;bq/a;q;cq/abz). \end{aligned} \tag{8}$$

q-P_{VI} の解で原点で解析的なものの場合、$t \to 0$ にしたとき、Watson の接続公式に帰着されると予想される。単純にはいかないところもあるが、この予想はだいたい正しい。夏の数理研研究会で話したときは 解III について説明した [6] (1) に解III を代入して直接 $t \to 0$ にすると

$$A(x,0) = \tilde{A}_1 x + \tilde{A}_2 x^2$$

となり、超幾何関数

$$x^{\mathrm{lq}(-a_1/b_1)}\, {}_2\varphi_1\left(\frac{a_4b_2}{a_2b_3}, \frac{a_4b_2}{a_2b_4}, \frac{a_1b_2}{a_2b_1}q; \frac{x}{a_4}\right)$$

を使って解けるので、接続係数はWatsonの公式(8)から求まる。解IVは、解IIIで b_1 と b_2 を入れ替えたもので同様である。

解Iは解IIIと違って，(1)に解Iを代入して直接 $t \to 0$ にするとうまくいかない。連続の場合と同様に

$$Y(qx,t) = A(x,t)Y(x,t)$$

において、まず $x = \xi t$ とおいて、$\hat{A}(\xi,t) = A(\xi t,t)/t$ を考える。$\hat{Y}(x,t) = x^{-\mathrm{lq}\ t}Y(x,t)$ とおくと

$$\hat{Y}(qx,t) = \hat{A}(x,t)\hat{Y}(x,t)$$

となる。ここで $t \to 0$ とすると

$$\hat{A}(x,0) = \hat{A}_0 + x\hat{A}_1$$

となり、超幾何関数

$$x^{\mathrm{lq}\,(a_1a_2/b_1)}\,{}_2\varphi_1\left(\frac{a_3b_2}{a_2b_4},\frac{a_4b_2}{a_2b_3};\frac{b_2q}{b_1};\frac{x}{a_1}\right)$$

を使って解けるので、接続係数はWatsonの公式(8)から求まる。解IIは、解Iで b_3 と b_4 を入れ替えたもので同様である。

参考文献

[1] Birkhoff, G. D., The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc. Am. Acad. Arts and Sciences*, **49** (1914), 521–568.

[2] Jimbo, M. and Sakai, H., A q-analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.

[3] Kaneko, K., Painlevé VI transcendents which are meromorphic at a fixed singularity, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **82** (2006), 71–76.

[4] Kaneko, K., A new solution of the fourth Painlevé equation with a solvable monodromy. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **81** (2005), 75–79.

[5] Kaneko, K.; Ohyama, Y., Fifth Painlevé transcendents which are analytic at the origin. Funkcial. Ekvac. **50** (2007), 187–212.

[6] Ohyama, Y., Analytic solutions to the q-Painlevé functions around the origin, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, to appear.

[7] Watson, G. N., The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.