数理解析研究所講究録
第1663巻 2009年 118-123

n-戦略ゲームの mutation-selection balance 均衡

[1] 科学技術振興機構さきがけ、[2] 東京工業大学　大槻　久 (Hisashi Ohtsuki)
[1]PRESTO, Japan Science and Technology Agency
[2]Tokyo Institute of Technology

1　はじめに

進化ゲーム理論とは、ゲーム理論に集団の概念を導入し、進化の過程をもって戦略がどのように選択されていくかを動学的に分析する学問である。n 個の純戦略 $S_1, \ldots, S_n$ を考え、戦略 S_i が戦略 S_j と対戦して得る利得を a_{ij} とおこう。この時、ゲームは利得行列 $A=(a_{ij})$ によって記述される。

進化ゲーム理論の基本方程式はレプリケーター方程式である [1]。無限に大きい集団を考え、その中での戦略 S_i の頻度を x_i とおこう。すると集団の構成は n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{S}_n$ で記述される。ただしここで $\mathbb{S}_n$ は n 次元単体

$$\mathbb{S}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0\ (\forall i), \textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1\} \tag{1}$$

を表す。戦略 S_i の期待利得は $F_i = \sum_k a_{ik} x_k = (A\boldsymbol{x})_i$ である。ただし $(A\boldsymbol{x})_i$ は列ベクトル $A\boldsymbol{x}$ の第 i 成分を表す。また、集団の平均利得は $\bar{F} = \sum_j F_j x_j = \sum_{j,k} a_{jk} x_j x_k = \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x}$ と計算できる。ただし $\boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x}$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x}$ の標準内積を表す。このゲームのレプリケーター方程式は

$$\dot{x}_i = x_i(F_i - \bar{F}) = x_i \{(A\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x} \cdot A\boldsymbol{x}\} \tag{2}$$

で与えられる。ただしここで $\dot{x}_i$ は x_i の時間微分を表す。

一方で、近年有限集団における進化ゲームの解析が盛んである。サイズ $N\ (<\infty)$ の有限集団では戦略の頻度 x_i はもはや連続値ではなく、0 から 1 を $1/N$ 刻みに区切った離散値を取る。したがって頻度の状態空間は $\mathbb{S}_n$ を離散化した格子点の集合

$$\mathbb{S}_n^{(N)} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1/N, \ldots, 1\}\ (\forall i), \textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1\} \tag{3}$$

となる。また、集団の有限性により、もはや進化動学は決定論的な微分方程式とはなり得ず、一般に確率過程となる。

Nowak らは、有限集団における $n=2$ 戦略ゲームに関して考察を行った [2]。本論文では Nowak らのモデルを一般の n-戦略ゲームへと拡張する。

2　Moran モデル

ある時刻 t において戦略分布 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}_n^{(N)}$ が与えられた時、次のようにして時刻 $t+1$ の戦略分布が決定されるマルコフ連鎖モデルを考えよう。

(ア) まず、ゲームの各プレーヤーは自分以外の $N-1$ 人と対戦し利得を得る。戦略 S_i をとるプレーヤーの $N-1$ 回の対戦での平均利得は

$$\frac{N(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k) - a_{ii}}{N-1} \tag{4}$$

と計算される。ここで分子の $-a_{ii}$ は自分自身との対戦を除く事を表している。以降は N が十分大きい時 $(N \gg 1)$ のみを考えよう。この時、式 (4) は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = (A\boldsymbol{x})_i$ で近似できる。

(イ) このように得られた利得に応じて各プレーヤーの繁殖力 (fecundity)f が、次の公式によって計算される。

$$f = 1 + \delta(\text{プレーヤーの平均利得}) \tag{5}$$

ここでパラメータ $\delta \geq 0$ は選択の強さを表し、δ が大きい程ゲームの利得の大小が繁殖力の大小に反映される。逆に $\delta = 0$ であれば、ゲームの利得に関わらず各プレーヤーの繁殖力は 1 である。戦略 S_i を取るプレーヤーの繁殖力 f_i は

$$f_i = 1 + \delta(A\boldsymbol{x})_i \tag{6}$$

と計算される。以下では δ は十分に小さく、したがってどの f_i も常に正であると仮定しよう。

(ウ) 次に、N 人の集団からランダムに選ばれた 1 個体が死亡し、また繁殖力の大きさに比例した確率で親になる 1 個体が選ばれる。死亡する個体と親になる個体は同じ個体でも良い。戦略 S_i を取るプレーヤーのうちの一人が親となる確率は

$$\frac{Nx_if_i}{\sum_{k=1}^{n} Nx_kf_k} = \frac{x_i\{1+\delta(A\boldsymbol{x})_i\}}{\sum_{k=1}^{n} x_k\{1+\delta(A\boldsymbol{x})_k\}} = x_i\frac{1+\delta(A\boldsymbol{x})_i}{1+\delta\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}} = x_i + \delta x_i\{(A\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\} + o(\delta) \tag{7}$$

で与えられる。

(エ) 親は子供を一人生む。この時確率 u で突然変異が起こり、この場合子供の戦略は n 戦略からランダムに選ばれる。確率 $1-u$ で突然変異は起こらず、この場合子供の戦略は親の戦略に等しい。

3 Mutation-selection balance 均衡

前節で定められた動学モデルは、状態空間 $\mathbb{S}_n^{(N)}$ 上のマルコフ連鎖を定義する。このマルコフ連鎖は $u > 0$ であれば既約で非周期的であるので、唯一の定常分布 π を持ち、初期分布に関わらずこの定常分布に収束する。以下ではこの定常分布の性質、特に戦略 S_i の平衡頻度について考察していこう。

3.1 戦略の平衡頻度

定常分布 π における戦略 x_i の平衡頻度は

$$\langle x_i \rangle_\delta = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}_n^{(N)}} x_i\pi_\delta(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

で計算できる。ここで添字δは、それぞれの量が選択の強さδによってパラメータ付けられていることを表している。

$\delta=0$の時、n個の戦略$S_1,\ldots S_n$はどれも中立であるから

$$\langle x_i\rangle_0=\frac{1}{n} \tag{9}$$

であることは容易に分かる。そこで$0<\delta\ll N^{-1}$なる正のδに関して、$\langle x_i\rangle_\delta$と$1/n$の大小関係を考える。

そのために、状態$\boldsymbol{x}$における戦略S_iの頻度の平均変化量$\Delta x_i(\boldsymbol{x})$を考えよう。突然変異が起きない場合、確率(7)で戦略S_iによる出生が、確率x_iで戦略S_iの死亡が起こる。それぞれは戦略S_iの頻度を$1/N$だけ増減させるから、結局S_iの頻度x_iに

$$\frac{1}{N}\cdot(7)-\frac{1}{N}\cdot x_i=\frac{\delta}{N}x_i\{(A\boldsymbol{x})_i-\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\}+o(\delta)\quad(\equiv\Delta x_i^{sel}(\boldsymbol{x})) \tag{10}$$

の効果をもたらす。また、突然変異が起きた場合は、確率$1/n$で戦略S_iの子が生まれ、確率x_iで戦略S_iの死亡が起こる。よって頻度x_iに及ぼす効果は

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\cdot x_i=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{n}-x_i\right)\quad(\equiv\Delta x_i^{mut}(\boldsymbol{x})) \tag{11}$$

である。以上の議論より

$$\begin{aligned}\Delta x_i(\boldsymbol{x})&=(1-u)\Delta x_i^{sel}(\boldsymbol{x})+u\Delta x_i^{mut}(\boldsymbol{x})\\&=\delta\frac{1-u}{N}x_i\{(A\boldsymbol{x})_i-\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\}+\frac{u}{N}\left(\frac{1}{n}-x_i\right)+o(\delta)\end{aligned} \tag{12}$$

であることが分かった。これを全ての状態$\boldsymbol{x}$に関して確率$\pi_\delta(\boldsymbol{x})$の重みをつけて和を取ると

$$\langle\Delta x_i\rangle_\delta=\delta\frac{1-u}{N}\langle x_i\{(A\boldsymbol{x})_i-\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\}\rangle_\delta+\frac{u}{N}\left(\frac{1}{n}-\langle x_i\rangle_\delta\right)+o(\delta) \tag{13}$$

を得る。定常分布π_δにおいては$\langle\Delta x_i\rangle_\delta=0$なので、式(13)の右辺を0とおいて、

$$\begin{aligned}\langle x_i\rangle_\delta&=\frac{1}{n}+\delta\frac{1-u}{u}\langle x_i\{(A\boldsymbol{x})_i-\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}\}\rangle_\delta+o(\delta)\\&=\frac{1}{n}+\delta\frac{1-u}{u}\left\{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\langle x_ix_k\rangle_\delta-\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\langle x_ix_jx_k\rangle_\delta\right\}+o(\delta)\end{aligned} \tag{14}$$

が得られた。

3.2 δによる摂動

式(14)は$\langle x_i\rangle_\delta$の$\delta$に関する展開の形をしているが、$\langle x_ix_k\rangle_\delta$や$\langle x_ix_jx_k\rangle_\delta$は$\delta$の関数であるのでこれはまだ不完全である。定常分布$\pi_\delta(\boldsymbol{x})$の$\delta=0$の周りでのTaylor展開

$$\pi_\delta(\boldsymbol{x})=\pi_0(\boldsymbol{x})+o(1) \tag{15}$$

を使えば、

$$\begin{aligned}\langle x_i x_k\rangle_\delta &= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_n^{(N)}} x_i x_k \pi_\delta(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_n^{(N)}} x_i x_k\{\pi_0(\boldsymbol{x})+o(1)\} = \langle x_i x_k\rangle_0 + o(1)\\ \langle x_i x_j x_k\rangle_\delta &= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_n^{(N)}} x_i x_j x_k \pi_\delta(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_n^{(N)}} x_i x_j x_k\{\pi_0(\boldsymbol{x})+o(1)\} = \langle x_i x_j x_k\rangle_0 + o(1)\end{aligned} \tag{16}$$

であるので、これを式 (14) に代入して、$\langle x_i\rangle_\delta$ の δ に関する完全な展開

$$\langle x_i\rangle_\delta = \frac{1}{n} + \delta\frac{1-u}{u}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\langle x_i x_k\rangle_0 - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\langle x_i x_j x_k\rangle_0\right\} + o(\delta) \tag{17}$$

を得る。

3.3 中立モデルにおける戦略分布

中立モデル ($\delta = 0$) における戦略の分布は、集団遺伝学で網羅的に調べられており、いくつかの綺麗な結果が存在する。$N \gg 1$ かつ $u = O(1/N)$ としよう。すると

$$\begin{aligned}\langle x_i\rangle_0 &= \frac{1}{n}\\ \langle x_i^2\rangle_0 &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{Nu}{n}+1}{Nu+1}\\ \langle x_i x_j\rangle_0 &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{Nu}{n}}{Nu+1} \qquad (i\neq j)\\ \langle x_i^3\rangle_0 &= \frac{1}{n}\cdot\frac{(\frac{Nu}{n}+1)(\frac{Nu}{n}+2)}{(Nu+1)(Nu+2)}\\ \langle x_i^2 x_j\rangle_0 &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{Nu}{n}(\frac{Nu}{n}+1)}{(Nu+1)(Nu+2)} \qquad (i\neq j)\\ \langle x_i x_j x_k\rangle_0 &= \frac{1}{n}\cdot\frac{(\frac{Nu}{n})^2}{(Nu+1)(Nu+2)} \qquad (i\neq j\neq k\neq i)\end{aligned} \tag{18}$$

であることが知られている [3]。したがって

$$\begin{aligned} n\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\langle x_i x_k\rangle_0 &= \frac{1}{Nu+1}a_{ii} + \frac{\frac{Nu}{n}}{Nu+1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\\ n\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\langle x_i x_j x_k\rangle_0 &= \frac{2}{(Nu+1)(Nu+2)}a_{ii}\\ &\quad + \frac{\frac{Nu}{n}}{(Nu+1)(Nu+2)}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a_{ki} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\right)\\ &\quad + \frac{(\frac{Nu}{n})^2}{(Nu+1)(Nu+2)}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\end{aligned} \tag{19}$$

であり、

$$
\begin{aligned}
&n(Nu+1)(Nu+2)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\langle x_i x_k\rangle_0 - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\langle x_i x_j x_k\rangle_0\right)\\
=&\left[Nua_{ii} + \frac{Nu(Nu+1)}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} - \frac{Nu}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} - \frac{Nu}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kk} - \left(\frac{Nu}{n}\right)^2 \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\right] \\
=&Nu\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ii}+a_{ik}-a_{ki}-a_{kk})\right] + (Nu)^2\left[\frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}(a_{ik}-a_{jk})\right]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる。そこで $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
L_i &\equiv \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ii}+a_{ik}-a_{ki}-a_{kk})\\
H_i &\equiv \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}(a_{ik}-a_{jk})
\end{aligned}
\tag{21}
$$

と定めれば、

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\langle x_i x_k\rangle_0 - \sum_{j,k=1}^{n} a_{ik}\langle x_i x_j x_k\rangle_0 = \frac{Nu}{n(Nu+1)(Nu+2)}(L_i + NuH_i) \tag{22}
$$

なので、これを式 (17) に戻して最終的に

$$
\langle x_i\rangle_\delta = \frac{1}{n} + \delta\frac{N(1-u)}{n(Nu+1)(Nu+2)}(L_i+NuH_i) + o(\delta) \tag{23}
$$

を得る。

4 戦略の比較

式 (23) から次の二つが分かる。

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle_\delta > 1/n &\iff L_i + NuH_i > 0\\
\langle x_i\rangle_\delta > \langle x_j\rangle_\delta &\iff L_i + NuH_i > L_j + NuH_j
\end{aligned}
\tag{24}
$$

特に Nu の値が小さければ、

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle_\delta > 1/n &\iff L_i > 0\\
\langle x_i\rangle_\delta > \langle x_j\rangle_\delta &\iff L_i > L_j
\end{aligned}
\tag{25}
$$

であり、Nu の値が大きければ

$$
\begin{aligned}
\langle x_i\rangle_\delta > 1/n &\iff H_i > 0\\
\langle x_i\rangle_\delta > \langle x_j\rangle_\delta &\iff H_i > H_j
\end{aligned}
\tag{26}
$$

である。

4.1 $n = 2$ の場合

特別な場合として $n = 2$ を考えよう。

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}) \\ H_1 &= \frac{1}{4}(a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}) \end{aligned} \tag{27}$$

であるので、式 (23) に代入して

$$\langle x_1 \rangle_\delta = \frac{1}{2} + \delta \frac{N(1-u)}{8(Nu+1)}(a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}) + o(\delta) \tag{28}$$

を得る。したがって Nu の値に関わらず

$$\langle x_1 \rangle_\delta > 1/2 > \langle x_2 \rangle_\delta \quad \Longleftrightarrow \quad a_{11} + a_{12} > a_{21} + a_{22} \tag{29}$$

であることが分かる。

5 おわりに

本論文では Nowak らによる有限集団進化ゲーム [2] を n-戦略ゲームに拡張し、弱選択極限 $0 < \delta \ll N^{-1}$ の下での各戦略の平衡頻度を導出した。その結果、集団サイズで規格化された突然変異率 Nu が小さい時には L_i という値が、Nu が大きい時には H_i という値が戦略 S_i の平衡頻度の性質を記述する事が分かった。また、一般の Nu に対しては L_i と H_i の線形結合である $L_i + NuH_i$ という値を計算することで、平衡頻度の性質を調べられることが分かった。

参考文献

[1] Taylor, P. D. & Jonker, L. 1978. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Math. Biosci.* **40**, 145-156.

[2] Nowak, M. A. et al. 2004. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. *Nature* **428**, 646-650.

[3] Watterson, G. A. 1977. Heterosis or Neutrality? *Genetics* **85**, 789-814.