

## 平行曲面の特異点

埼玉大学大学院理工学研究科  
長谷川 大

### 0 はじめに

$\mathbb{R}^2$  の開部分集合  $U$  に対して, 可微分写像  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって定義される  $\mathbb{R}^3$  内の曲面を  $M$  とする.  $M$  の正則点では, 単位法ベクトル  $\mathbf{n} = (g_u \times g_v) / \|g_u \times g_v\|$  が定義される. このとき, 実定数  $t_0$  に対して,

$$\tilde{g}(u, v) = g(u, v) + t_0 \mathbf{n}(u, v)$$

によって定義される曲面  $\tilde{M}$  を初期曲面  $M$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面と呼ぶ. 点  $p = g(u_0, v_0)$  における曲面  $M$  の主曲率を  $\kappa_i (i = 1, 2)$  とする.  $t_0 = 1/\kappa_i$  のとき, 平行曲面  $\tilde{M}$  は点  $\tilde{g}(u_0, v_0)$  で特異点を持つ. 特に, 点  $p$  が曲面  $M$  の臍点でないとき,  $\tilde{g}$  のヤコビ行列の階数は 1 で, 点  $p$  が曲面  $M$  の臍点であるときは,  $\tilde{g}$  のヤコビ行列の階数は 0 となり, 退化した特異点ということができる. このように, 平行曲面の特異点は初期曲面の微分幾何学的な状況によって記述されることが期待される. 本稿では, 平行曲面の特異点の初期曲面の微分幾何学的な情報による分類を紹介する.

### 1 微分幾何学的な基礎知識

本節では, 平行曲面の特異点の分類に必要な, 微分幾何学的な概念を紹介する. 点  $p = g(u_0, v_0)$  を曲面  $M$  の臍点ではない正則点とするとき, 点  $p$  における主曲率を  $\kappa_i$ , 対応する主方向を  $\mathbf{v}_i$  とする.

**定義 1.1.** 点  $p$  が曲面  $M$  の臍点ではない正則点とする. 点  $p$  が曲面  $M$  の主方向  $\mathbf{v}_i$  に関する峰点 (ridge point) であるとは,  $\mathbf{v}_i \kappa_i(u_0, v_0) = 0$  を満たすときであり, 峰点の集合を主方向  $\mathbf{v}_i$  に関する峰線 (ridge line) という. さらに,  $\mathbf{v}_i^{(m)} \kappa_i(u_0, v_0) = 0 (1 \leq m \leq k)$  かつ  $\mathbf{v}_i^{(k+1)} \kappa_i(u_0, v_0) \neq 0$  を満たすとき,  $p$  は  $k$  次の峰点であるという. ここで,  $\mathbf{v}_i \kappa_i$  は主方向  $\mathbf{v}_i$  による主曲率関数  $\kappa_i$  の方向微分である.

峰点は焦曲面の特異点に対応していて, Porteous [8] によって初めて詳細な研究がなされた.

**定義 1.2.** 点  $p$  が曲面  $M$  の臍点ではない正則点とする. 点  $p$  が曲面  $M$  の主方向  $\mathbf{v}_i$  に関する劣放物点 (sub-parabolic point) であるとは,  $\mathbf{v}_i \kappa_j(u_0, v_0) = 0 (i \neq j)$  を満たすときである. 峰点と同様に劣放物線 (sub-parabolic line) や位数も定義できる.

劣放物点は Bruce と Wilkinson [3] の折り目写像 (folding map) の観点から初めて詳細な研究が行われた. 劣放物点は関連する主方向に対応する焦曲面の放物点に対応している.

**定義 1.3.** 原点が曲面  $M$  の臍点であるとし, 曲面  $M$  がモンジュ形  $(u, v, f(u, v))$

$$f(u, v) = \frac{1}{2}k(u^2 + v^2) + \frac{1}{6}(a_{30}u^3 + 3a_{21}u^2v + 3a_{12}uv^2 + a_{03}v^3) + \text{h.o.t.}$$

で与えられているとする.  $f$  の 3 次の項のなす 3 次形式が楕円の (i.e. 異なる 3 つの実根を持つとき), 放物的 (i.e. 二重根を持つとき), 双曲的 (i.e. 実根を 1 つ持つとき), 完全立方 (i.e. 三重根を持つとき) であるとき,

原点はそれぞれ楕円的臍点, 放物的臍点, 双曲的臍点, 完全臍点 (perfect umbilic) であるという。また,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a_{30} & a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} & a_{03} \end{vmatrix} = 0$$

であるとき, 直角臍点 (right-angled umbilic) であるという。

ジェネリックな臍点の分類は 1890 年代に Darboux [4] によって知られていたが, Bruce と Fidal [1] や Gutierrez と Sotomayer [5] によって 1980 年代に現代的な立場から証明されている。

これら, 峰点, 劣放物点, 臍点については [2, 9] にまとめられている。

## 2 平行曲面の特異点

曲面  $M = g(U)$  に対して, 関数

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; \Phi(u, v, x, y, z, t) = -\frac{1}{2}(\|(x, y, z) - g(u, v)\|^2 - t^2)$$

と,  $t = t_0$  と固定して, 関数

$$\tilde{\Phi} : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \tilde{\Phi}(u, v, x, y, z) = \Phi(u, v, x, y, z, t_0)$$

を考える。このとき,  $\Phi$  の判別集合は

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{(x, y, z, t); \exists(u, v) \text{ s.t. } (x, y, z) = g(u, v) + t\mathbf{n}(u, v)\}$$

で与えられ,  $\mathcal{D}(\Phi)$  と  $t = t_0$  との切り口は曲面  $M$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面  $\tilde{M}$  と一致する。また,  $\tilde{\Phi}$  の判別集合は

$$\mathcal{D}(\tilde{\Phi}) = \{(x, y, z); \exists(u, v) \text{ s.t. } (x, y, z) = g(u, v) + t_0\mathbf{n}(u, v)\}$$

で与えられ, 曲面  $M$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面  $\tilde{M}$  と一致する。

ここで,

$$(x_0, y_0, z_0) = g(u_0, v_0) + t_0\mathbf{n}(u_0, v_0), t_0 = 1/\kappa_i$$

とし,  $\varphi(u, v) = \Phi(u, v, x_0, y_0, z_0, t_0)$  または,  $\varphi(u, v) = \tilde{\Phi}(u, v, x_0, y_0, z_0)$  とおく。

$$\Phi : (U \times \mathbb{R}^4, (u_0, v_0, x_0, y_0, z_0, t_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

と,

$$\tilde{\Phi} : (U \times \mathbb{R}^3, (u_0, v_0, x_0, y_0, z_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

が  $\varphi : (U, (u_0, v_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であると仮定すると, 判別集合  $\mathcal{D}(\Phi)$ ,  $\mathcal{D}(\tilde{\Phi})$  はカスプ状曲面, ツバメの尾, 蝶々,  $D_4$  特異点のいずれかと局所微分同相である。したがって, 平行曲面の特異点を分類するには, 「いつ」 $\Phi$  または  $\tilde{\Phi}$  が  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であるかを調べればよい。

**補題 2.1.** 点  $p$  は曲面  $M$  の正則点であるとする。このとき, 次が成り立つ。

- (1) 点  $p$  が曲面  $M$  の峰点でも臍点でもないとき,  $\tilde{\Phi}$  は  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折である。
- (2) 点  $p$  が曲面  $M$  の 1 次の峰点であるとき, もう一方の主方向に関する劣放物点でなければ,  $\tilde{\Phi}$  は  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折である。

- (3) 点  $p$  が曲面  $M$  の 2 次の峰点であるとき, 峰線が点  $p$  で正則であれば,  $\Phi$  は  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折である.
- (4) 点  $p$  が曲面  $M$  の楕円的臍点か直角臍点ではない双曲的臍点であるとき,  $\Phi$  は  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折である.

補題の証明の概略 (2) の場合を述べる. 曲面  $M$  がモンジュ形

$$g(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{2}(\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2) + \sum_{i+j \geq 3} \frac{1}{i!j!} a_{ij} u^i v^j \right)$$

で与えられているとする. このとき,

$$(x_0, y_0, z_0) = \left( 0, 0, \frac{1}{\kappa_i} \right), t_0 = \frac{1}{\kappa_i}$$

である. また,  $\tilde{\Phi}$  は

$$\tilde{\Phi}(u, v, x, y, z) = c_{00} + xu + yv + \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}_1 u^2 + \tilde{\kappa}_2 v^2) + \sum_{i+j \geq 3} \frac{1}{i!j!} c_{ij} u^i v^j$$

と書くことができる. 特に,

$$c_{00} = \frac{t_0^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2}, \tilde{\kappa}_i = \kappa_i z - 1, c_{ij} = a_{ij} z \ (i+j=3),$$

$$c_{40} = a_{40} z - 3\kappa_1^2, c_{31} = a_{31} z, c_{22} = a_{22} z - \kappa_1 \kappa_2, c_{13} = a_{13} z, c_{04} = a_{04} z - 3\kappa_2^2$$

である.  $\varphi$  が原点で  $A_3$  特異点を持つとすると,

- (1)  $\tilde{\kappa}_1 = 0, \tilde{\kappa}_2 \neq 0, c_{30} = 0, -3c_{21}^2 + \tilde{\kappa}_2 c_{40} \neq 0$  または,
- (2)  $\tilde{\kappa}_1 \neq 0, \tilde{\kappa}_2 = 0, c_{03} = 0, -3c_{12}^2 + \tilde{\kappa}_1 c_{04} \neq 0$

である. (1) の場合を考える. (1) の条件は, 原点が主方向  $v_1$  に関する 1 次の峰点であることと同値である.  $A_3$  特異点は  $\mathcal{R}$ -4 確定であるから,  $\tilde{\Phi}$  が  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であることの必要十分条件は

$$\mathcal{E}_2 = \langle \varphi, \varphi_u, \varphi_v \rangle \mathcal{E}_2 + \langle \tilde{\Phi}_x|_{U \times p_0}, \tilde{\Phi}_y|_{U \times p_0}, \tilde{\Phi}_z|_{U \times p_0} \rangle_{\mathbb{R}} + \langle u, v \rangle^5 \tag{2.1}$$

である. ここで,  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  である.  $c = c_{21}/(2\tilde{\kappa}_2)$  とし,  $v$  を  $v - cu^2$  と置き換える. このとき, 次のような行列を考える. これは, 左端の関数の定数項から 4 次の項までの係数を並べたものである.

	1	$u$	$v$	$u^2$	$uv$	$v^2$	$u^3$	$u^2v$	$uv^2$	$v^3$	$u^4$	$u^3v$	$u^2v^2$	$uv^3$	$v^4$
$\tilde{\Phi}_x _{U \times p_0}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{\Phi}_y _{U \times p_0}$	0	0	1	-c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{\Phi}_z _{U \times p_0}$	-z_0	0	0	$\frac{1}{2}\kappa_1$	0	$\frac{1}{2}\kappa_2$	0	*	*	*	*	*	*	*	*
$\varphi$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}\tilde{\kappa}_2$	0	0	$\frac{1}{2}c_{12}$	$\frac{1}{6}c_{03}$	$\frac{1}{24}\tilde{c}_{40}$	*	*	*	*
$\varphi_u$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}c_{12}$	$\frac{1}{6}\tilde{c}_{40}$	*	*	*	*	*	*	*	*
$\varphi_v$	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*
$u\varphi_v$	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$	0	*	*	*	*	0
$v\varphi_v$	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$	0	*	*	*	*
$u^2\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$	0	0
$uv\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$	0
$v^2\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	0	$c_{12}$	$\frac{1}{2}c_{03}$
$u^3\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0	0
$u^2v\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0	0
$uv^2\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$	0
$v^3\varphi_v$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tilde{\kappa}_2$

ここで、 $\tilde{c}_{40} = (\tilde{\kappa}_2 c_{40} - 3c_{21}^2) / \tilde{\kappa}_2$  である。  $c \neq 0$  であるとき、 枠で囲んだ係数はすべて 0 ではなく、 行列の階数は最大階数となり条件 (2.1) を満たす。  $c = 0$  は原点が主方向  $v_2$  に関する劣放物点であることと同値であるから、 補題の主張が言える。 したがって、 次の定理が得られる。

**定理 2.2.** 点  $p = g(u_0, v_0)$  を曲面  $M$  の正則点とする。  $t_0 = 1/\kappa_i$  のとき、 次が成り立つ。

- (1) 点  $p$  が曲面  $M$  の峰点でも臍点でもないとき、 平行曲面  $\tilde{M}$  は対応する点でカスプ状曲面と局所微分同相である。
- (2) 点  $p$  が曲面  $M$  の 1 次の峰点であるとき、 もう一方の主方向に関する劣放物点でなければ、 平行曲面  $\tilde{M}$  は対応する点でツバメの尾と局所微分同相である。
- (3) 点  $p$  が曲面  $M$  の 2 次の峰点であるとき、 峰線が点  $p$  で正則であれば、 平行曲面  $\tilde{M}$  は対応する点で蝶々の切り口と局所微分同相である。
- (4) 点  $p$  が曲面  $M$  の楕円の臍点か直角臍点ではない双曲的臍点であるとき、 平行曲面  $\tilde{M}$  は対応する点で  $D_4$  特異点と切り口と局所微分同相である。

### 3 終わりに

もともとは、 平行曲面の特異点を関数

$$\Phi(u, v, x, y, z, t) = \langle (x, y, z) - g(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle - t$$

を用いて解析しようと考えていた。 この関数を用いても、 初期曲面の放物点を除いて距離二乗関数と同じ結果が得られる。 放物点では、 この関数の判別集合は平行曲面ではない別の曲面も定義しているが、 微分幾何学的に興味深い対象であると考えている。 また、 初期曲面が特異点を持つ場合も同様の手法を用いて解析が可能であり、 対応する微分幾何学的概念を考察中である。

今回紹介した定理 2.2 では、 (2) にあるように、 初期曲面上の点が 1 次の峰点で、 もう一方の主方向に関する劣放物点であるときは、 距離二乗関数  $\tilde{\Phi}$  は  $\mathcal{K}$  普遍開折にはならないので、 対応する平行曲面の特異点の分類ができない。 しかし、 泉屋氏、 佐治氏、 高橋氏らによる波面の特異点の判定法 [7] を用いることで、 このような場合では、 初期曲面の峰線ともう一方の主方向に関する劣放物線が峰点で接していないとき、 対応する平行曲面の特異点がカスプ的くちびるか、 カスプ的くちばしであるという結果を得た。

### 参考文献

- [1] J. W. Bruce, D. L. Fidal, On binary differential equations and umbilics, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 111A, pp 147-168, 1989.
- [2] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and F. Tari, Families of surface: focal sets, ridges and umbilics, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 125, pp 243-268, 1999.
- [3] J. W. Bruce, T. C. Wilkinson Folding maps and focal sets, Proceedings of Warwick Symposium on Singularities, Springer Lecture Notes in Math., vol 1462, pp 63-72, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1991.
- [4] G. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, IV, Note 7, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

- [5] C. Gutierrez, J. Sotomayor, Structural stable configurations of lines of principal curvature, *Asterisque*, Vol. 98-99, pp 195-215, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [6] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 共立出版, 2002.
- [7] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space, preprint.
- [8] I. R. Porteous, The normal singularities of submanifold, *J. Diff. Geom.*, Vol. 5, pp 543-564, 1971.
- [9] I. R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.