

ディリクレ級数に付随する関数の近似とスペクトル集合

神谷諭一 (Yuichi Kamiya)

この報告では、石川秀明氏との共同研究 [5] の一部を紹介したいと思う。

1 導入

H. Bohr によって、周期関数の自然な拡張として、概周期関数が導入された。その定義、理論の詳細については [3] を参照されたい。

関数 $\varphi(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ が Bohr の意味での概周期関数であるとき、 $\varphi(t)$ は有界かつ一様連続である。また、三角多項式の一様収束極限は Bohr の意味での概周期関数になることが知られている。この命題の逆が成立することを主張するのが次の Bohr の主定理である：

(I) 関数 $\varphi(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ が Bohr の意味での概周期関数であるならば、極限

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

が存在する。そこで $a_\varphi(\lambda)$ をこの極限で定義しよう。このとき

$$\Lambda_\varphi = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid a_\varphi(\lambda) \neq 0\}$$

で定義される集合 Λ_φ は可算集合である。

(II) 任意の正数 ε に対し、ある複素数列 $\{b(n)\}_{n=1}^N$ と可算集合 Λ_φ に属する有限集合 $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ が存在して

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \varphi(t) - \sum_{n=1}^N b(n) e^{i\lambda_n t} \right| < \varepsilon$$

となる。

ある程度のなめらかさをもつ周期関数はフーリエ級数で一様近似できる、という命題の自然な拡張としても Bohr の主定理をとらえられる。 $a_\varphi(\lambda)$ は、フーリエ変換の一種の拡張であり、 Λ_φ はその拡張されたフーリエ変換の台であるといえる。その台が可算集合であるため、フーリエ反転公式による積分

が離散和に減ぜられ、 $\varphi(t)$ は一種のフーリエ級数で表現できるかもしれないと感じる。それを実際に証明した Bohr の主定理は極めて重要であると思う。

もし、Bohr の概周期関数の拡張が何らかの形で導入されたなら、それが三角多項式で何らかの位相のもとで近似できるかを論じることは極めて重要な課題になるだろう。この課題のためには、まずフーリエ変換の拡張を導入し、そのフーリエ変換の台を考察する必要があるだろう。以下では Beurling [2] によるフーリエ変換の拡張を紹介する。

定義 (Beurling) φ は \mathbf{R} 上の可測関数で、任意の正数 u に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| e^{-u|t|} dt < \infty$$

を満たすものとする。この φ に対し $U_{\varphi}(u, v)$, $u > 0, v \in \mathbf{R}$, を

$$U_{\varphi}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-u|t| - itv} dt$$

で定義する。 \mathcal{O} は \mathbf{R} の开区間で、 \mathcal{O} に含まれる任意の v -閉区間上で $u \rightarrow +0$ のとき、 $U_{\varphi}(u, v)$ は一様に 0 に収束するものとする。このとき

$$S(\varphi) = \left(\bigcup_{\mathcal{O}} \{ \text{そういう } \mathcal{O} \} \right) \text{ の補集合}$$

と定義し、 $S(\varphi)$ を φ のスペクトル集合と呼ぶ。

スペクトル集合が求まる典型例として、リーマンゼータ関数を考察しよう。 $s = \sigma + it$ を複素変数とする。リーマンゼータ関数を $\zeta(s)$ で表す。 $\zeta(s)$ は、 $\sigma > 1$ なる半平面では

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

と絶対収束するディリクレ級数として表される。 $\zeta(s)$ は、垂直線 $\sigma = 1$ を超えて、全 s 平面に解析接続され、その特異点は $s = 1$ における一位の極 (留数は 1) のみである。

リーマンゼータ関数 $\zeta(\sigma + it)$ について、 σ を固定し t 変数の関数とみたとき、それを ζ_{σ} と記そう： $\zeta_{\sigma}(t) = \zeta(\sigma + it)$ 。 σ を $\sigma > 1$ に固定した場合、(1) に基づく簡単な計算から

$$S(\zeta_{\sigma}) = \{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$$

が得られる。

それでは、 σ を $\sigma < 1$ に固定した場合、 ζ_σ のスペクトル集合 $S(\zeta_\sigma)$ は何であろうか。オイラー・マクローリン公式にもとづく $\zeta(s)$ の次の表示は良く知られている：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2N^s} + \sum_{m=1}^{M-1} (s)_m \frac{B_{m+1}}{(m+1)!N^{s+m}} - \frac{(s)_M}{M!} \int_N^\infty \frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}} dx, \quad (2)$$

(ここで、 N, M は自然数、 $[x]$ はガウス記号、 B_m はベルヌーイ数、 $B_m(x)$ はベルヌーイ多項式、 $(s)_m$ は $(s)_m = s(s+1)\cdots(s+m-1)$ で定義される関数である。詳細については、例えば、[4] p.114を参照されたい。) [6]では、この表示(2)と Beurling のスペクトル集合の定義に基づき、 $0 < \sigma < 1$ の範囲で $S(\zeta_\sigma) = \mathbf{R}$ となることを証明した。

その後、[8]によって、 σ の範囲に関する制限 $0 < \sigma < 1$ を取り除き、 $\sigma < 1$ の範囲で $S(\zeta_\sigma) = \mathbf{R}$ が成立することがわかった。[8]では議論に変化が起こっている。Prüss [10] Prop.0.5によって、“ $\varphi \in L_{loc}^1$ によって生成される緩い超関数のシュワルツ・フーリエ変換の台と $S(\varphi)$ は一致する”ことが証明されていることを知り、超関数の立場から $S(\zeta_\sigma)$ を研究するようになったのである。これについては以前の報告[7]で報告させていただいたので、詳細についてはそちらを参照していただきたいが、大雑把なアイデアは説明したいと思う。

s は $\sigma > -M + 1$ なるよう固定する。何らかの方法で

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2N^s} + \sum_{m=1}^{M-1} (s)_m \frac{B_{m+1}}{(m+1)!N^{s+m}} + O\left(\frac{(1+|t|)^C}{N^\delta}\right) \quad (3)$$

(C, δ は正定数)を導く。誤差項 $O\left(\frac{(1+|t|)^C}{N^\delta}\right)$ に関して、通常、 C は大きく δ は小さいので、(3)は近似式としては悪いのであるが、超関数の議論に持ち込むと、やっかいな $(1+|t|)^C$ はテスト関数に押し付けることができ、 $\frac{1}{N^\delta}$ が $N \rightarrow \infty$ としたとき0に収束することのみ注目すればよいことになるのである。こうして、(2)のような完全な等式がなくとも、(3)のような近似がありさえすれば、その近似が成立する s の範囲について、スペクトル集合を決定できることがわかったのである。

さて、リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ に限らず、次のようなディリクレ級数の族を導入しよう：

(A1) $F(s)$ は $s = 1$ にのみ極を持ちうる \mathbf{C} 上の正則関数である。 $F(s)$ が $s = 1$ に位数 l の極を持つ場合は、 $s = 1$ の近傍で

$$F(s) = \frac{C_{-l}}{(s-1)^l} + \cdots + \frac{C_{-1}}{s-1} + \text{正則部分}$$

と表示しよう。 $\sigma > 1$ では $F(s)$ は絶対収束する Dirichlet 級数

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad a(n) \in \mathbf{C}$$

で表わされる。

(A2) b は $b < 0$ なる実数、 T は $T \geq 2$ なる実数とする。 b にのみ依存する正数 C_b が存在して

$$\sup_{x \geq b} |F(x + iT)| \leq C_b (1 + |T|)^{(\frac{1}{2} - b)L} \quad (4)$$

となる。

F_σ は $F_\sigma(t) = F(\sigma + it)$ で定義される関数としよう。 [8] では、上述の超関数を経由した議論によって、 $S(F_\sigma)$ がある制限された範囲 $\beta < \sigma < 1$ で決定できることを論じた。例えば、リーマンゼータ関数の二乗 $\zeta^2(s)$ に関して、 $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ の範囲で $S(\zeta_\sigma^2) = \mathbf{R}$ となる。仮に、全ての s について

$$F(s) = (\text{ディリクレ多項式}) + (\text{極からくる表示}) + O\left(\frac{(1 + |t|)^c}{N^\delta}\right) \quad (5)$$

というような近似が得られさえすれば、超関数の議論を経由して、 $\sigma < 1$ の範囲で $S(F_\sigma)$ を決定できるのであるが、 [8] の時点では (5) のような近似式が得られていなかったため、 $S(F_\sigma)$ が決定できる範囲が制限されていた。

今回の共同研究 [5] によって、仮定 (A1), (A2) を満たす $F(s)$ について、 (5) 型の近似を構成することができたので、スペクトル集合 $S(F_\sigma)$ が決定できる範囲の制限も取り除くことができた。結果を以下に紹介したい。

定理 $F(s)$ は仮定 (A1), (A2) を満たすとする。 F_σ は $F_\sigma(t) = F(\sigma + it)$ で定義される関数とする。 $F(s)$ が $s = 1$ に極をもつときは、 $\sigma < 1$ の範囲で $S(F_\sigma) = \mathbf{R}$ となる。 $F(s)$ が整関数のときは、 $\sigma \leq 1$ の範囲で $S(F_\sigma) = \{-\log n | n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } a(n) \neq 0\}$ が成立する。

2 リーマンゼータ関数の近似

前節の定理を証明するには、(5)のような近似式を構成すればよかった。そのような近似式を構成するアイデアを得るために、リーマンゼータ関数の場合を再考察することは十分有効であろう。ここでは、メルン・バーンズ積分による $\zeta(s)$ の表現を考察する。何をもってメルン・バーンズ積分となすかは、筆者の知識不足もあって説明できないので、詳しくは [9]などを参照されたい。

大雑把にいて、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^w \zeta(w) dw$$

のように、 $\frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)}$ を含む積分をメルン・バーンズ積分と呼ぶようである。さて、 $(0, \infty)$ 上の関数 $\psi_s(x)$ を

$$\psi_s(x) = \frac{1}{(x+1)^s}$$

で定義する。 s と w が $0 < \Re w < \sigma$ を満たすとき

$$\frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} = \int_0^\infty \psi_s(x) x^w \frac{dx}{x}, \quad (6)$$

つまり、左辺は $\psi_s(x)$ のメルン変換として表されることに注目しよう。(6)を証明するには、

$$\psi_s(x) = \frac{1}{(x+1)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(x+1)y} y^s \frac{dy}{y}, \quad \sigma > 0$$

を用いて、 $\int_0^\infty \psi_s(x) x^w \frac{dx}{x}$ を計算してゆけばよい。(6)にメルン反転公式を適用させて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^w \zeta(w) dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} \left(\frac{n}{N}\right)^{-w} dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_s\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{N} + 1\right)^s} \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。さて、 b は $b < 0$ なる実数、 T は $T \geq 2$ なる実数とすと、 b にのみ依存する正数 C_b が存在して

$$\sup_{x \geq b} |\zeta(x + iT)| \leq C_b(1 + |T|)^{\frac{1}{2}-b} \quad (8)$$

となることが知られている。一方、 $\frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)}$ は $|\Im w|$ について指数関数的に減少する。従って、(7)の最左辺の積分路を左にシフトすることができ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{N} + 1\right)^s} &= -\frac{N}{1-s} + \sum_{m=0}^{M-1} (s)_m \frac{(-1)^m \zeta(-m)}{m! N^m} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-M+\frac{1}{2}-i\infty}^{-M+\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^w \zeta(w) dw \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。(9)の両辺に $\frac{1}{N^s}$ をかけたのち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+N)^s} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \quad (10)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \sum_{m=0}^{M-1} (s)_m \frac{(-1)^m \zeta(-m)}{m! N^{m+s}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-M+\frac{1}{2}-i\infty}^{-M+\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^{w-s} \zeta(w) dw \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。

(11)は $\sigma > \frac{3}{2}$ のもとで導かれたが、解析接続によって、 $\sigma > -M + \frac{1}{2}$ なる半平面に属す s について成立することがわかる。(11)式の右辺第4項の垂直積分の絶対値は、ある正定数 D_t を用いて $D_t \frac{1}{N^{\sigma+M-\frac{1}{2}}}$ で押さえられる。従って、 $\sigma > -M + \frac{1}{2}$ なる s については、 N を十分大きくしたときの近似

$$\zeta(s) \doteq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \sum_{m=0}^{M-1} (s)_m \frac{(-1)^m \zeta(-m)}{m! N^{m+s}} \quad (12)$$

を得た。もちろん、この近似の t に関する依存度の考察は保留している。

3 Dirichlet 級数の族と近似

近似式 (12) を導くためにメルン・バーンズ積分を用いたが、その過程で $\zeta(s)$ の情報として用いたものは

- (i) $\zeta(s)$ の解析的性質 (解析接続, 極に関する情報, ディリクレ級数表示)
- (ii) $\zeta(s)$ の虚軸方向への増大が多項式オーダーであること ((8) 参照)
- (iii) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ とディリクレ級数表示したとき, ディリクレ係数が恒等的に 1 であること ((10) を導くのに必要)

である. 我々は, $\zeta(s)$ に限らず, (i), (ii) に対応する仮定 (A1), (A2) を満たす関数 $F(s)$ について, (5) のような近似式を構成したいのであった.

この課題について, まず, メルン・バーンズ積分を用いる方法を考えてみよう. (11) 式に $\frac{1}{N^s}$ をかけるところまでは, 全く同様にできて,

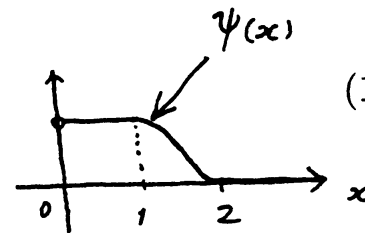
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(n+N)^s} = \operatorname{Res}_{w=1} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^{w-s} F(w) + \sum_{m=0}^{M-1} \binom{s}{m} \frac{(-1)^m F(-m)}{m! N^{m+s}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-M+\frac{1}{2}-i\infty}^{-M+\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)} N^{w-s} F(w) dw \quad (13)$$

を得る. この先で問題になることは, “ $a(n)$ が特殊な性質をもたない限り, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(n+N)^s}$ と $F(s)$ のつながりが切れてしまい, (10) に対応する等式が得られない” ということである. この原因は

$$\psi_s(x) = \frac{1}{(x+1)^s} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{メルン変換}} \\ \xleftarrow{\text{逆メルン変換}} \end{array} \frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)}$$

において, $\frac{\Gamma(w)\Gamma(s-w)}{\Gamma(s)}$ は $|\Im w|$ に関して急減少なので, その逆メルン変換である $\psi_s(x)$ は x に関してあまり急に減少しない, という (フーリエ変換に関してもよくみられる) 現象にあるといえよう. 従って, 我々は, 大筋としては, メルン・バーンズ積分に類似する積分のシフトによる近似を目指すものの, 基礎となる関数 $\psi(x)$ とそのメルン変換 $K_\psi(w)$ については, もっと適切なものを選ぶ必要がある. つまり, $\psi(x)$ については, コンパクト台をもつ急減少な関数を選択し, $K_\psi(w)$ については, あまり急には減少しないものを選択していこう.

M を自然数とし, $\psi(x)$ を $(0, \infty)$ 上の C^{M+1} 級関数で

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} \quad (14)$$


を満たすものとする. $\psi(x)$ のメルン変換 $K_\psi(w)$ を

$$K_\psi(w) = \int_0^\infty \psi(x) x^w \frac{dx}{x}, \quad \Re w > 0$$

で定義する.

補題 $K_\psi(w)$ について次が成立する.

- (i) $K_\psi(w)$ は $w = 0$ を除き, \mathbf{C} 上の正則関数に解析接続される. $w = 0$ では一位の極をもち, その留数は 1 である.
- (ii) $K_\psi(w)$ は帯領域 $-\alpha_0 \leq \Re w \leq -\beta_0$, $\alpha_0 > \beta_0 > 0$, に属す w について一様に

$$K_\psi(w) = O\left(\frac{1}{(1 + |\Im w|)^{M+1}}\right)$$

と評価できる.

(証明) (i) まずは $\Re w > 0$ で考える. 部分積分により

$$K_\psi(w) = - \int_1^2 \psi'(x) \frac{x^w}{w} dx \quad (15)$$

を得る. この表示によって, $w = 0$ 以外の $w \in \mathbf{C}$ への解析接続が得られるし, $w = 0$ では留数 1 の一位の極をもつこともわかる.

(ii) (15) にさらに部分積分を繰り返すことにより

$$K_\psi(w) = (-1)^{M+1} \int_1^2 \psi^{(M+1)}(x) \frac{x^{w+M}}{w(w+1)\cdots(w+M)} dx$$

を得る. 右辺の積分の絶対値を評価すると, $\Im w \neq 0$ なる w について

$$K_\psi(w) = O\left(\frac{2^{\Re w} + 1}{|\Im w|^{M+1}}\right) \quad (16)$$

を得るし、一方、 $K_\psi(w)$ の正則性により $-\alpha_0 \leq \Re w \leq -\beta_0$, $|\Im w| \leq 1$ なる w について

$$K_\psi(w) = O(1) \quad (17)$$

も得る。(16) と (17) により (ii) の評価を得る。□

ここから積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} K_\psi(w) N^w F(s+w) dw \quad (18)$$

を考察していこう。仮定 (A2) 内の評価に現れる L に対して、自然数 M を $M \geq L$ なるようにとる。この M に連動させて $(0, \infty)$ 上の C^{M+1} 級関数 $\psi(x)$ で (14) を満たすものをとる。 α は $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{M}{L}$ なるようにとる。 s は $\sigma > -\frac{M}{L} + \alpha$ なるものとする。このとき、(18) における積分路 $\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}$ を $\int_{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha-i\infty}^{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha+i\infty}$ へシフトすることができる。このシフトの正当性は慎重に確認しなければならないが、(4) や補題の (ii) を用いて

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha-i\infty}^{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha+i\infty} K_\psi(w) N^w F(s+w) dw \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| K_\psi\left(-\sigma - \frac{M}{L} + \alpha + iy\right) \right| N^{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha} \left| F\left(-\frac{M}{L} + \alpha + i(y+t)\right) \right| dy \\ & \ll \frac{1}{N^{\sigma+\frac{M}{L}-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|y|)^{M+1}} (1+|t|+|y|)^{(\frac{1}{2}+\frac{M}{L}-\alpha)L} dy \\ & \leq \frac{(1+|t|)^{(\frac{1}{2}+\frac{M}{L}-\alpha)L}}{N^{\sigma+\frac{M}{L}-\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|y|)^{1+(\alpha-\frac{1}{2})L}} dy \ll \frac{(1+|t|)^{(\frac{1}{2}+\frac{M}{L}-\alpha)L}}{N^{\sigma+\frac{M}{L}-\alpha}} \quad (19) \end{aligned}$$

という評価ができることから、シフトの正当性を推察できよう。いずれにせよ、積分路のシフトを実行して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} K_\psi(w) N^w F(s+w) dw &= F(s) + \operatorname{Res}_{w=1} K_\psi(w-s) N^{w-s} F(w) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha-i\infty}^{-\sigma-\frac{M}{L}+\alpha+i\infty} K_\psi(w) N^w F(s+w) dw \quad (20) \end{aligned}$$

を得る。(20) の左辺は F のディリクレ級数表示とメルン反転公式により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \psi(n/N)$ と表される (厳密には $\sigma > 1$ で Dirichlet 級数表示を用い

て、その後で解析接続により、 σ の範囲を $\sigma > -\frac{M}{L} + \alpha$ に拡張する). (20)の右辺第2項は

$$-\int_0^{\infty} \psi'(x) \sum_{h=0}^{l-1} C_{-(h+1)} \sum_{\substack{k+k'=h \\ k=0,1,2,\dots \\ k'=0,1,2,\dots}} \frac{(\log xN)^{k'}}{k!} \frac{(-1)^k (xN)^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} dx$$

に等しいことが証明できるし、(20)の右辺第3項は(19)により、 $\ll \frac{(1+|t|)^{(\frac{1}{2}+\frac{M}{L}-\alpha)L}}{N^{\sigma+\frac{M}{L}-\alpha}}$ と評価できる. 以上により次を得る.

命題 $F(s)$ は仮定(A1)と(A2)を満たすとする. 仮定(A2)内の評価に現れる L に対して、自然数 M を $M \geq L$ なるようにとる. この M に連動させて $(0, \infty)$ 上の C^{M+1} 級関数 $\psi(x)$ で(14)を満たすものをとる. α は $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{M}{L}$ なるようにとる. s は $\sigma > -\frac{M}{L} + \alpha$ なるものとする. このとき

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \psi(n/N) \\ &+ \int_0^{\infty} \psi'(x) \sum_{h=0}^{l-1} C_{-(h+1)} \sum_{\substack{k+k'=h \\ k=0,1,2,\dots \\ k'=0,1,2,\dots}} \frac{(\log xN)^{k'}}{k!} \frac{(-1)^k (xN)^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} dx \\ &+ O\left(\frac{(1+|t|)^{(\frac{1}{2}+\frac{M}{L}-\alpha)L}}{N^{\sigma+\frac{M}{L}-\alpha}}\right) \end{aligned}$$

が成立する. ただし、 $\sum_{h=0}^{l-1}$ は $l=0$ のとき、つまり $F(s)$ が整関数のときは0とみなす.

4 結論, 今後の課題など

前節の命題によって、仮定(A1), (A2)を満たす関数 $F(s)$ について、(5)のような $F(s)$ の近似を得ることができた. この近似と、[7]で紹介した超関数を経由する方法によって、Section 1の定理を証明することができる.

さて、仮定(A1), (A2)を満たす $F(s)$ のスペクトル集合を考察した理由は、Bohrの概周期関数の拡張として、ディリクレ級数が絶対収束しない領域、つまり $\sigma < 1$ における $F(s)$ が候補になるかもしれないという期待にもとづく. (実際、この期待を実現した一つの重要な研究として、Besicovitchの概周期

関数の理論がある. 詳しくは [1] を参照されたい.) そのように期待する限り, $\sigma < 1$ における $F(s)$ のスペクトル集合を研究しておくことは意義があると思う. 当初, $\sigma < 1$ において $\zeta(s)$ のスペクトル集合が \mathbf{R} になることがわかったときは, 若干の驚きを感じた (それが \mathbf{R} になるのは $\zeta(s)$ が $s = 1$ に極をもつことによるのであり, 今では当然のような気もする). $\sigma < 1$ において $\zeta(s)$ のスペクトル集合は \mathbf{R} になるのだけれど, この \mathbf{R} は, ディリクレ級数表示からくる離散集合 $\{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$ と極からくる連続集合 \mathbf{R} が混ざりあっているのかもしれないとも思う. Beurling のスペクトル集合の定義を細分化することは今後の課題であろう. 最終的な目標は, スペクトル集合の元を指数とするような三角多項式によって, もとの関数が復元できるかどうかを論じることであり, これは途方もなく難しい課題と思うけれど, いつの日か少しでも貢献できればいいなと思っている.

References

- [1] A. S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Dover, 1954.
- [2] A. Beurling, *Sur les spectres des fonctions*, in: *Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, Analyse harmonique, XV*, Nancy, 1947, pp.9–29.
- [3] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea Publishing Company, 1947.
- [4] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.
- [5] H. Ishikawa, Y. Kamiya, *Spectral sets of certain functions associated with Dirichlet series*. プレプリント
- [6] Y. Kamiya, *On spectrums of certain harmonic functions attached to the Riemann zeta-function*, *Acta Math. Hungar.* **105** (2004) 103–114.
- [7] 神谷諭一, あるクラスに属すゼータ関数のスペクトルについて, 解析的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所講究録 No.1511, 2006年8月.
- [8] Y. Kamiya, *An approach to spectral sets of certain zeta-functions*. *J. Math. Anal. Appl.* **329** (2007) 1303–1315.

- [9] K. Matsumoto, On the Analytic Continuation of Various Multiple Zeta-Functions, Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conf. Illinois, M. A. Bennett et al. (eds.) 2002.
- [10] J. Prüss, Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhäuser, 1993.

19-4 Nishinobo Daiwa-cho
Okazaki-city Aichi 444-0931
Japan
e-mail: kamiya-9@m3.catvmics.ne.jp