数理解析研究所講究録
第 1665 巻 2009 年 29-36

THE GROWTH OF VARIOUS ZETA FUNCTIONS AND TAYLOR COEFFICIENTS

HIDEAKI ISHIKAWA

1. On a behavior of Laurent coefficients of $\zeta(s)$

オイラー定数 γ とは

$$\gamma := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}-\log N\right)=0.57721566\ldots$$

なる極限値で定義される数である。この一般化として、

$$\gamma(n) := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{\log^{n} m}{m}-\frac{\log^{n+1} N}{n+1}\right)$$

によって定義される数 $\gamma(n)$ を考え、これを一般オイラー定数と呼ぶ。ここでは $\log^0 1 = 1$ と考えることにする。特に $n=0$ の場合が、先ほどのオイラー定数である（$\gamma(0)=\gamma$)。リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s=1$ におけるローラン展開の係数に $\gamma(n)$ は次のような形で現れることが知られている：

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\gamma(n)}{n!}(s-1)^{n}.$$

最初のいくつかの近似値は以下のようである：

$\gamma(n)$	The value
$n=0$	$0.57721566\ldots$
$n=1$	$-0.07281584\ldots$
$n=2$	$-0.00969036\ldots$
$n=3$	$0.00232537\ldots$
$n=4$	$0.00079332\ldots$
$n=5$	$-0.00023876\ldots$
$n=6$	$-0.00052728\ldots$
$n=7$	$-0.00035212\ldots$
$n=8$	$-0.00003439\ldots$

この $\gamma(n)$ の研究は古くから行われていて、たくさんの結果があるのだが、本稿では、$n\to\infty$ としたときの値の変化の状況に焦点を絞って話を進めていく。その不規則な値の変化は、それだけで、興味をそそる（と思う)。考えられる素朴な問題設定として、$n\to\infty$ としたとき、大きさ $|\gamma(n)|$ は、どのような変動をするのか？$\gamma(n)$ の符号はどのように

変化するのか？などが考えられる。また、この数の変化の状況を正確に記述できた暁にはどんな応用があるのだろうか。

例えば1955年の W.E.Briggs [1] の仕事では、大きさの評価について、以下の結果が述べられている：（上からの評価）$|\gamma(n)| < \exp(\varepsilon\, n \log n)$ for all $n > n_0$、（下からの評価）$|\gamma(n)| > \exp(-\varepsilon n \log n)$ for infinitely many n、が述べられている。ここで、ε は任意に小さい正の定数とし、以後も同じ用法とする。1962年 Mitrović[5] は $\gamma(2n) < 0$ となる n が無限に存在する、同様に $\gamma(2n) > 0$, となる n も無限に存在、$\gamma(2n+1) < 0$ なる n も無限に存在、 $\gamma(2n+1) > 0$ なる n も無限に存在するという結果を証明している。これらは、当時としては、最良の結果だったのだが、$\gamma(n)$ の挙動の真の姿を感じるにはほど遠いと言わざるを得ない。1980年代になり、これら従来の仕事を大幅に改良する結果が松岡氏により証明される。まずは、一連の仕事の基点とも言うべき次の結果を見ていこう：

1989, Y.Matsuoka [3], An asymptotic formula: There exists an n_0 such that for all $n > n_0$

$$\gamma(n) = \left\{ \cos\bigl(F(n)\bigr) + E(n) \right\} \times \exp\Bigl(n \log\log n + o(n)\Bigr)$$

where $F(n)$ and $E(n)$ are real valued functions satisfying

$$\begin{aligned} F(n) &= -\frac{1}{2}\pi\frac{n}{\log n} + O\left(\frac{n\log\log n}{\log^2 n}\right), \\ E(n) &= O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right). \end{aligned}$$

Remark 1. ここでは漸近式の形で述べているが、実際は漸近展開まで証明されている。厳密に記述するのは複雑なので、ここでは省略し、上述の形で紹介した。

この式を見てみると、$F(n)$ の値によって cos が 0 に近くなった時に、誤差項との大きさが逆転する状況が起こる。この式を有効にするためには、主要項と誤差項の大きさが逆転する頻度について述べなくてはならない。そこで、この結果を土台におきながら、松岡氏は $F(n)$ の状況を精査し、次を得る：

1985, Y.Matsuoka [4], The "local" asymptotic formula: If v is sufficiently large and $c > 0$, then for all integers n with $|n - v| < c \log v$

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \left\{\cos\left(F(v) - \frac{\pi}{2}\frac{n-v}{\log v}\right) + O\left(\frac{\log\log v}{\log v}\right)\right\} \\ &\quad \times \exp\Bigl(n\log\log n + o(n)\Bigr). \end{aligned}$$

この短区間の漸近式は強力で、松岡氏はこの結果をもとに、様々な結果を証明しているので、その一部を紹介しよう。まずは符号の問題について、

$$\#\{n \le N \mid \gamma(n) > 0\} = \frac{1}{2}N + o(N),$$

$$\#\{n \leq N \mid \gamma(n) < 0\} = \frac{1}{2}N + o(N).$$

なる結果や、同じ符合が続く長さについての結果として：Let $\epsilon > 0$ be arbitrarily small. There exist infinitely many n such that

$$\gamma(n), \quad \gamma(n+1), \quad \gamma(n+2), \quad \ldots, \gamma(n+y)$$

have positive sign, where $y = [(2-\epsilon)\log n]$. If $y = [(2+\epsilon)\log n]$, then there exist only finitely many n with the property. Similar result for negative sign holds, also 、という結果を証明している。また大きさの問題については、（上からの評価）　$|\gamma(n)| \leq \exp\bigl(n \log\log n + \epsilon n\bigr)$　for all $n > n_0$、（下からの評価）　$|\gamma(n)| \geq \exp\bigl(n \log\log n - \epsilon n\bigr)$　for infinitely many n なる結果を証明している。これらは、従来の結果をはるかに凌いだものであることは、先に紹介した結果と比べてもらえば一目瞭然である。

これらは $\gamma(n)$ そのものに対する結果であるが、$\gamma(n)$ の挙動から得られる応用についても述べている。そのひとつに、$|s| \to \infty$ とした際の $|\zeta(s)|$ の増大速度に関する結果で「$(s-1)\zeta(s)$ は exponential type でない」というものがある。ここで用いた“ exponential type”という言葉は整関数を分類する用語であり、このことについては次の章で説明する。私は、この結果に興味をもち、単純に、次のようなことを考えてみた。リーマンゼータ関数以外のゼータ関数は exponential type なのか、否か？。本発表（本稿）では、以下の二点：

①リーマンゼータ関数においてなされた松岡氏の二種類の漸近式の証明方法を検討し、どのくらい広い範囲のクラスのゼータ関数に対して同様の漸近式が証明できるかどうか考えること。

②得られた漸近式をもとに、対象とするゼータ関数を整関数の分類の理論から眺め、exponential type なのか否かを判定すること。

を中心に話を進めていく。得られた結果については、第 3 章で述べる。

2. 整関数の分類と $(s-1)\zeta(s)$

この章では、整関数の分類の理論における基本的な事柄を復習する。整関数 $f(z)$ の原点中心のテーラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

とする。このとき $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ を用いて $f(z)$ の位数 ρ を次の極限

$$\rho := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

で定義する。特に定数関数の ρ は 0 と定義しよう。次に、位数 ρ が有限で、かつ 0 でないとき、我々はその $f(z)$ をさらに細分するための目安

となる量 τ を

$$\tau := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}$$

なる極限で定義する。このとき、$f(z)$ は growth (ρ, τ) である、と言う事にする。指数関数 e^z は growth $(1,1)$。これはその定義からすぐにわかるであろう。もし $f(z)$ が growth $(1,\tau)$ で τ が有限値のとき、「$f(z)$ は exponential type である」と呼ぶことにする。また $f(z)$ が growth $(1,\tau)$ で τ が有限値でないときに、「$f(z)$ は exponential type でない」と呼ぶことにする。

a_n と ρ と τ の間には密接な関係がある。次の関係式はよく知られた基本的な公式である：

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\log|a_n|}, \qquad \tau\rho = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{1-\rho} |n! a_n|^{\rho/n}$$

この関係式は原点中心のテーラー展開の係数 $a(n)$ を用いて述べたが、原点以外の点 z_0 での展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(z-z_0)^n$ をした際の係数 $a'(n)$ の場合でも、単純に a_n を a_n' にとりかえて上述の関係式は成立する。

ここで松岡氏の行った $(s-1)\zeta(s)$ の τ の計算方法をスケッチしてみる。前述の公式により $\tau\rho = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{1-\rho} |\gamma(n)|^{\rho/n}$ である。今 $\rho = 1$ なので（もちろん、このことも計算して出しておく必要があるが、今は省略），$\tau = \limsup_{n\to\infty} |\gamma(n)|^{1/n}$ という計算をすればよいことになる。τ が有限値でないことがいえれば、exponential type でないことを示したことになるのだった。ここで、松岡氏の結果、$|\gamma(n)| \geq \exp\big(n\log\log n - \epsilon n\big)$ となる n が無限に存在する、を用いると、

$$\begin{aligned} |\gamma(n)|^{1/n} &\geq \Big\{\exp\big(n\log\log n - \epsilon n\big)\Big\}^{1/n} \\ &= \exp\big(\log\log n - \epsilon\big) \end{aligned}$$

for infinitely many n. となり、これは $\tau = \infty$ を意味する。よって「$(s-1)\zeta(s)$ は exponential type でない」が言えた。

ここで、読者は、τ を決めるのに、そのような回りくどいことをせずとも、もっと直接的に計算できるのではないか？、と思うかもしれない。実際、そのことについても松岡氏はちゃんと言及している。領域 $1/2 \leq \sigma$ においては、

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx$$

なる表示式を用いて、この領域内の円弧 $|s| = r$ 上では、$|(s-1)\zeta(s)| \ll r^2$ であることがいえる。一方領域 $\sigma \leq 1/2$ においては関数等式を用いた表示

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \quad \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

により、この領域内での円弧 $|s| = r$ 上では $|(s-1)\zeta(s)| \ll e^{r\log r + cr}$、また、この領域内の点列 $s = -r_n = -(2n+1)$ においては $|(s-1)\zeta(s)| \geq$

$e^{r_n \log r_n - c' r_n}$ となる。ここで c, c' はある定数とする。これらより、τ は有限値でないことがいえる。このような方法のほうが、直接的である。よって、この時点での状況の理解としては、$(s-1)\zeta(s)$ の τ の計算手段について、直接的な計算もあるのだが、テーラー係数の観点からの計算も可能になった、ということである。

次の章では、ディリクレ級数で定義されるあるクラスのゼータ関数を考え、松岡氏が行った $\zeta(s)$ のローラン係数についての二種の漸近式の結果の類似を紹介する。そして、τ の計算をテーラー係数の観点から行い、「対象としているゼータ関数が exponential type でない」ことが証明できたので報告する。

3. The behavior of Laurent (or Taylor) coefficients on various zeta functions

We consider

$$Z_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{\lambda_n^s}, \qquad Z_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_2(n)}{\mu_n^s},$$

where $f_1(n),\ f_2(n) \in \mathbb{C}$ and $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$, $1 \le \mu_1 < \mu_2 < \cdots \to \infty$.

$$\Delta(s) := \prod_{\nu=1}^{N} \Gamma(\alpha_\nu s + \beta_\nu), \qquad \text{where } \alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{R} \text{ with } \alpha_\nu > 0.$$

The Dirichlet series $Z_1(s)$ belongs to the class $\mathcal{D}$, if the following conditions (i)-(v) hold:

(i) $Z_1(s)$ and $Z_2(s)$ have abscissas of absolute convergence σ_1 and σ_2, respectively.

(ii) $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ admit a meromorphic continuation to $\mathbb{C}$.

(iii) For a domain $\sigma \le \sigma_1$, $\quad Z_1(\sigma + ti) = O(1+|t|)^{-K_1\sigma + K_2}$, where $K_1, K_2 > 0$ and $-K_1\sigma + K_2 > 0$.

(iv) The functional equation,

$$Z_1(s)\Delta(s) = GK^s \Delta(m-s) Z_2(m-s)$$

holds with some constants $K, m \in \mathbb{R}$ and $G \in \mathbb{C}$.

(v) The poles of $Z_1(s)$ and $Z_2(s)$ are only on the real axis.

Let $P_1 := \{\text{pole of } Z_1(s)\}$. Then P_1 is finite set. The Laurent expansion at $s = m$ (or Taylor expansion)

$$Z_1(s) = \sum_{n=j}^{\infty} A_m(n)(s-m)^n,$$

where $j \in \mathbb{Z}$. When $0 \leq n$, we set $C_m(n) := n!A_m(n)$.

Our purpose is to obtain an asymptotic formula of $C_m(n)$, when $Z_1(s) \in \mathcal{D}$ and to decide growth of $Z_1(s)$.

Theorem 1. *(2004, H,Ishikawa and J. Thuswaldner [2]) Assume that $Z_1(s)$ belongs to the class $\mathcal{D}$. If $P_1 = \{m\}$ or $P_1 = \emptyset$, then there exists an n_0 such that, for all $n > n_0$,*

$$\begin{aligned}
&(-1)^n C_m(n) = \\
&\quad Gf_2(1)\left\{\cos\Big(F(n) - \frac{\pi}{2}N + \sum_{\nu=1}^{N}(\alpha_\nu m + \beta_\nu)\pi\Big) + E(n)\right\} \\
&\quad \times \exp\Big(n \log\log n + Q(n)\Big)
\end{aligned}$$

holds. Here $Q(n)$, $F(n)$ are real valued C^∞-functions, $F(n)$ is monotonically decreasing. $E(n)$ is a complex valued function. These functions satisfy the following asymptotic relations:

$$\begin{aligned}
Q(n) &= n\log 2A - \frac{n\log\log n}{\log n} + \frac{1}{2A}\Big(-\log K\mu_1 + 2\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu \log\alpha_\nu \\
&\qquad -2A - 2A\log 2A\Big)\frac{n}{\log n} + O\Big(\frac{n(\log\log n)^2}{(\log n)^2}\Big), \\
F(n) &= -\frac{\pi}{2}\frac{n}{\log n} + O\Big(\frac{n\log\log n}{\log^2 n}\Big), \\
E(n) &= O\Big(\frac{1}{\log n}\Big),
\end{aligned}$$

where $A = \sum_{\nu=1}^{N}\alpha_\nu$. The number n_0 depends on the parameters K, α_ν, β_ν, K_1, K_2, m. μ_1.

Theorem 2. *(H.Ishikawa) Local asymptotic formula: If v is sufficiently large and $c > 0$, then for all integers n with $|n - v| < c\log v$*

$$\begin{aligned}
&(-1)^n C_m(n) \\
&= Gf_2(1)\left\{\cos\left(F(v) - \frac{\pi}{2}\frac{n-v}{\log v} + W\right) + O\left(\frac{\log\log v}{\log v}\right)\right\} \\
&\quad \times \exp\Big(n\log\log n + Q(n)\Big),
\end{aligned}$$

where W is a certain real valued constant.

Using this result, we have

Theorem 3. *(H.Ishikawa)* *The lower bound:*

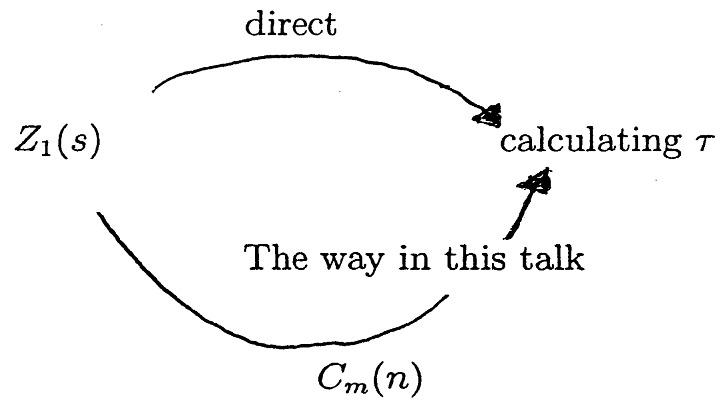
$$|C_m(n)| \geq \exp\Big(n \log\log n + n \log 2A - (1+\epsilon)\frac{n \log\log n}{\log n}\Big)$$

for infinitely many n.

Let δ be the least non negative integer such that $(s-m)^{\delta} Z_1(s)$ is an entire function. Using Theorem 3, we have

Corollary 1. *(H.Ishikawa)* *The growth:* *An entire function $(s-m)^{\delta} Z_1(s)$ is not exponential type.*

Hence, we have obtained two ways to calculate τ



4. After this ………

今回、$Z_1(s)$ のローラン（テーラー）係数 $C_m(n)$ の漸近公式を求め、その結果をもとに $|Z_1(s)|$ の増大速度に関する結果を紹介した。本稿で扱ったクラスのゼータ関数の場合、関数等式が満たされているため、直接的な方法で τ を計算することも可能である。よって、このままで $C_m(n)$ の研究が終わっては、まわりくどい τ 計算の証明を紹介したに過ぎなくなる。

自身としては、今回の結果は $C_m(n)$ の研究途上で得られた通過点のひとつとして考えている。整関数 $f(z)$ のテーラー係数の挙動、∞ 近くでの $|f(z)|$ の挙動、$f(z)$ のゼロ点の分布は密接に関係しており、様々な関係式が知られている。今回、$C_m(n)$ の観点から τ を計算可能なレベルまで $C_m(n)$ の挙動を明らかにしておいたのは無駄では無い（という立場です）。今回の結果を土台にし、ゼータ関数の増大速度の問題、ゼロ点の問題に幾らかの貢献ができればと思い、現在研究を進めています。

REFERENCES

[1] W. E. Briggs, Some constants associated with the Riemann zeta function, *Michigan Math. J.* **3** (1955/1956), 117–121.

[2] H. Ishikawa and J. Thuswaldner, On the asymptotic behavior of the Laurent coefficients of a class of zeta functions, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **74** (2004), p11 - 32.

[3] Y. Matsuoka, On the Power series Coefficients of the Riemann Zeta Function, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 49–58.

[4] Y. Matsuoka, Generalized Euler constants associated with the Riemann zeta function, Number theory and combinatorics, pp.279-295, 1985 by World scientific Publishing Co.

[5] D. Mitrović, The signs of some constants associated with the Riemann zeta function, *Michigan. Math. J.* **9** (1962), 395–397.

HACHINOHE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, HACHINOHE, AOMORI, 039-1192 JAPAN.