数理解析研究所講究録
第 1665 巻 2009 年 37-43

Multiple zeta values of depth 3 at non-positive integers

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　佐々木　義卓 (Yoshitaka Sasaki)
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

1 Introduction

深さ k の多重ゼータ関数は

$$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}$$

で定義され, 各 s_i $(i=1,\ldots,k)$ は複素変数で, $\Re s_i\geq 1$ $(i=1,\ldots,k-1)$ のとき, $\Re s_k>1$ に対して絶対収束する. 特に, $(s_1,\ldots,s_k)=(m_1,\ldots,m_k)\in\mathbb{N}^k(m_k\geq 2)$ であるとき, $\zeta_k(m_1,\ldots,m_k)$ を多重ゼータ値と呼ぶ. 多重ゼータ値 $\zeta_k(m_1,\ldots,m_k)$ に対して, $m_1+\cdots+m_k$ をその多重ゼータ値の "重さ" と呼び, m_i の個数 k を "深さ" と呼ぶ. ここでは多重ゼータ値での用語を応用して, 多重ゼータ関数 $\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)$ に対して "形式的に" 変数 $(s_1,\ldots,s_k)$ の個数を多重ゼータ関数の "深さ" と呼ぶことにする (ζ_k の添え字 k を深さとしてもよい). 形式的とは, 例えば $\zeta_2(s_1,s_2+s_3)$ の変数は s_1,s_2,s_3 の 3 個であるが, 深さは "2"(s_1 と s_2+s_3) と定める.

多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値について議論するには, 多重ゼータ関数の解析接続を考えなくてはならない. Atkinson は, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}(=\zeta_1(s))$ の critical line($\Re s=1/2$) における 2 乗平均の明示式 (正確には残余項の明示式) を得るために, 分解

$$\zeta(u)\zeta(v)=\zeta(u+v)+\zeta_2(u,v)+\zeta_2(v,u)$$

において, 2 重ゼータ関数の解析接続を行っている ([3]). 一般の多重ゼータ関数の解析接続は, Zhao [8], 秋山–江上–谷川 [1], 松本 [5] により, それぞれ独立に与えられている. その他, 多重ゼータ関数の解析接続に関する話は, 松本 [6] を参照されたい. ここでは秋山-江上-谷川による, Euler–Maclaurin の和公式を用いた解析接続法を用いる. 事実として, 多重ゼータ関数は, 有理型関数として $\mathbb{C}^k$ 全体へ解析接続できる. そのとき, 特異点は

$$s_k=1,\quad s_{k-1}+s_k=2,1,0,-2,-4,\ldots$$

および

$$\sum_{i=1}^{j} s_{k-i+1} \in \mathbb{Z}_{\le j}(:= \{m \in \mathbb{Z} | m \le j\})\ (j = 3, 4, \ldots, k).$$

といったところにあることが知られている (上のいずれかの条件をみたせば, その様な点は特異点であることを意味する). ここで, 上記の最後の条件に注目すると, 非正整数点 $(s_1, \ldots, s_k) = (-r_1, \ldots, -r_k) \in \mathbb{Z}_{\le 0}^k$ は, 多重ゼータ関数の特異点である. しかし, 各非正整数点 $(-r_1, \ldots, -r_k)$ は**不確定特異点**でることが知られている ([1]). 不確定特異点とは, 大雑把に言うと, 形式的に多重ゼータ関数を正則関数の商 $\zeta_k = f/g$ とみたとき, 非正整数点が f, g の共通零点になっているということである. したがって, 非正整数点での特殊値は, 近づけ方によって異なることになる. 今日まで, 次の 3 通りの近づけ方による特殊値が研究されている ([1, 2]):

$$\zeta_k(-r_1, \ldots, -r_k) = \lim_{s_1 \to -r_1} \cdots \lim_{s_k \to -r_k} \zeta_k(s_1, \ldots, s_k),$$

$$\zeta_k^R(-r_1, \ldots, -r_k) = \lim_{s_k \to -r_k} \cdots \lim_{s_1 \to -r_1} \zeta_k(s_1, \ldots, s_k),$$

$$\zeta_k^C(-r_1, \ldots, -r_k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \zeta_k(-r_1 + \varepsilon, \ldots, -r_k + \varepsilon),$$

それぞれ, **regular value, reverse value, central value** と呼ばれている.

本稿の目標は, regular value, reverse value のような近づけ方 (変数を 1 つ 1 つ順々に近づける方法) は, ほかにも (k 変数のときは, $k!$ 通り) 考えられ, そうして得られた特殊値間の関係を見ることである.

2 解析接続

任意の複素数 s および 整数 $q(\ge -1)$ に対して

$$(s)_q^{\pm} := \begin{cases} s(s+1)\cdots(s+q-1) & \text{if } q = 1, 2, \ldots, \\ \pm 1 & \text{if } q = 0, \\ 1/(s-1) & \text{if } q = -1, \end{cases} \tag{2.1}$$

$a_q := B_{q+1}/(q+1)!$ とおく. ここで B_n は, 関–Bernoulli 数. 上式を用いて,

$$\phi_l(m, s) = \frac{(s)_{l+1}^{\pm}}{(l+1)!} \int_m^\infty \tilde{B}_{l+1}(x) x^{-s-l-2}\, dx,$$

とおく. ここで, $\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x])$ は周期的 Bernoulli 多項式. $\phi_l(m, s) = O(m^{-\Re s - l - 1})$ が成り立つことは容易に分かる. 以上の準備の下, 次が成り立つ.

Lemma 2.1 (regular-type, 秋山–江上–谷川 [1]) $\Re s_i > 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ および任意の正整数 l に対して,

$$\zeta_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k) = \sum_{q=-1}^{l} (s_k)_q^+ a_q \zeta_{k-1}(s_1, \ldots, s_{k-2}, s_{k-1} + s_k + q) - \sum_{0<n_1<\cdots<n_{k-1}} \frac{\phi_l(n_{k-1}, s_k)}{n_1^{s_1} \cdots n_{k-1}^{s_{k-1}}}, \tag{2.2}$$

が成り立つ. ここで, 最後の級数は

$$l > -\Re s_{k-1} - \Re s_k + k - 2 - \sum_{\substack{1 \le i \le k-2, \\ \Re s_i \le 0}} \Re s_i$$

を満たすとき, 絶対収束する.

Lemma 2.2 (reverse-type, 秋山–谷川 [2]) $\Re s_i > 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ および任意の正整数 l に対して,

$$\begin{aligned} \zeta_k(s_1, s_2, \ldots, s_k) = &- \sum_{q=-1}^{l} (s_1)_q^- a_q \zeta_{k-1}(s_1 + s_2 + q, s_3, \ldots, s_k) \\ &+ \zeta(s_1)\zeta_{k-1}(s_2, \ldots, s_k) \\ &+ \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j \zeta_{k-j}(s_{j+1}, \ldots, s_{k-1}, s_k) \Phi_j^l(s_1, \ldots, s_j) \\ &+ (-1)^k \Phi_k^l(s_1, \ldots, s_k), \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ. ここで

$$\Phi_m^l(s_1, \ldots, s_m) := \sum_{n_m \le \cdots \le n_2} \frac{\phi_l(n_2, s_1)}{n_m^{s_m} \cdots n_2^{s_2}} \qquad (2 \le m \le k)$$

であり, $\Phi_m^l(s_1, \ldots, s_m)$ は

$$l > -\Re s_1 - \Re s_2 + m - 2 - \sum_{\substack{3 \le i \le m, \\ \Re s_i < 0}} \Re s_i.$$

を満たすとき絶対収束する. ただし, 上の不等式中の和は, $m = 2$ のとき空和とする.

Lemma 2.1 および Lemma 2.2 より, l を適当に大きくとることで, 帰納的に多重ゼータ関数を $\mathbb{C}^k$ 全体へ有理型関数として解析接続することが出来る.

Lemma 2.1, Lemma 2.2 の特徴的な部分は, 深さ k の多重ゼータ関数が, 深さ $k-1$ の多重ゼータ関数の和で書けるという点である. したがって, 結局, 多重ゼータ関数は, Riemann ゼータ関数によって議論されることになる.

3 負の整数点での特殊値に関する公式等

次の表記法を導入する. $\{i_1,\dots,i_k\}=\{1,\dots,k\}$ に対して,

$$\zeta_k(\overset{i_1}{-r_1},\dots,\overset{i_k}{-r_k}) := \lim_{\substack{s_j\to -r_j\\ i_j=k}} \cdots \lim_{\substack{s_j\to -r_j\\ i_j=1}} \zeta_k(s_1,\dots,s_k)$$

とする. 多少理解し難い表記法であるかもしれないが, 簡単に言うと, 変数の上に書いた数字は, その変数を何番目に近づけたかを意味している. 例えば, regular value と reverse value は

$$\zeta_k(\overset{k}{-r_1},\dots,\overset{2}{-r_{k-1}},\overset{1}{-r_k}) = \lim_{s_1\to -r_1}\cdots \lim_{s_{k-1}\to -r_{k-1}} \lim_{s_k\to -r_k} \zeta_k(s_1,\dots,s_k)$$

$$\zeta_k(\overset{1}{-r_1},\overset{2}{-r_2},\dots,\overset{k}{-r_k}) = \lim_{s_k\to -r_k}\cdots \lim_{s_2\to -r_2} \lim_{s_1\to -r_1} \zeta_k(s_1,\dots,s_k)$$

と書ける.

Lemma 2.1, Lemma 2.2 より, 深さ 2 の負の整数点での特殊値は,

$$\zeta_2(\overset{2}{-r_1},\overset{1}{-r_2}) = \sum_{q=-1}^{r_2} (-r_2)_q^+ a_q \zeta(-r_1-r_2+q),$$

$$\zeta_2(\overset{1}{-r_1},\overset{2}{-r_2}) = -\sum_{q=-1}^{r_1} (-r_1)_q^- a_q \zeta(-r_1-r_2+q) + \zeta(-r_1)\zeta(-r_2),$$

で与えられる. 深さ 2 のときは, 上記の 2 通りしかないことに注意. さらに, この 2 つの特殊値間には,

$$\zeta_2(\overset{1}{-r_1},\overset{2}{-r_2}) = \zeta_2(\overset{2}{-r_1},\overset{1}{-r_2}) + (-1)^{\mu} r_1! r_2! a_{r_1+r_2+1} \tag{3.1}$$

なる関係式がある. ここで, $\mu=r_1$ もしくは r_2 である (どちらでも正しい).

Theorem 3.1 任意の非負整数 r_i $(i=1,2,3)$ に対して,

$$\zeta_3(\overset{2}{-r_1},\overset{3}{-r_2},\overset{1}{-r_3}) = \sum_{q=-1}^{r_3} (-r_3)_q^+ a_q \zeta_2(\overset{1}{-r_1}, -r_2 \overset{2}{-} r_3 + q),$$

$$\zeta_3(\overset{1}{-r_1},\overset{3}{-r_2},\overset{2}{-r_3}) = -\sum_{q=-1}^{r_1} (-r_1)_q^- a_q \zeta_2(-r_1 \overset{2}{-} r_2 + q, \overset{1}{-r_3}) + \zeta(-r_1)\zeta_2(\overset{2}{-r_2},\overset{1}{-r_3}),$$

を得る.

深さ 2 の regular value と reverse value をつなぐ公式 (3.1) を用いると, 次を得る.

Corollary 3.2 任意の非負整数 r_i $(i = 1, 2, 3)$ に対して,

$$\zeta_3(\overset{2}{-r_1}, \overset{3}{-r_2}, \overset{1}{-r_3}) = \zeta_3(\overset{1}{-r_1}, \overset{3}{-r_2}, \overset{2}{-r_3})$$

を得る.

$Z_3(= Z_3(-r_1, -r_2, -r_3)) := \zeta_3(\overset{2}{-r_1}, \overset{3}{-r_2}, \overset{1}{-r_3})$ とおく.

Proposition 3.3 任意の非負整数 r_i $(i = 1, 2, 3)$ に対して,

$$\zeta_3(\overset{3}{-r_1}, \overset{2}{-r_2}, \overset{1}{-r_3}) = Z_3 - K_1(r_1, r_2, r_3),$$
$$\zeta_3(\overset{1}{-r_1}, \overset{2}{-r_2}, \overset{3}{-r_3}) = Z_3 - K_3(r_1, r_2, r_3),$$

ここで

$$K_i(r_1, r_2, r_3) = (-1)^{r_i} r_i! \sum_{q=-1}^{r_i} (-r_i)_q^{\pm} a_q a_{R_3+1-q} (r_i + r_2 - q)!,$$

$R_3 = \sum_{j=1}^{3} r_j$. 符号は $i = 1$ のとき $+$, $i = 3$ のとき $-$ ととる.

Proposition 3.4 任意の非負整数 r_i $(i = 1, 2, 3)$ に対して,

$$\zeta_3(\overset{3}{-r_1}, \overset{1}{-r_2}, \overset{2}{-r_3}) = Z_3 - K_1(r_1, r_2, r_3) + (-1)^{r_3} r_2! r_3! \zeta(-r_1) a_{r_2+r_3+1},$$
$$\zeta_3(\overset{2}{-r_1}, \overset{1}{-r_2}, \overset{3}{-r_3}) = Z_3 - K_3(r_1, r_2, r_3) (= \zeta_3(\overset{1}{-r_1}, \overset{2}{-r_2}, \overset{3}{-r_3}))$$

以上のことから, 深さ 3 の場合, Z_3 **が, 他の特殊値とをつなぐもの**であるといえる. また, つぎのような公式も成り立つ.

Theorem 3.5 $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群とする. $r_1 \equiv 0 \pmod 2$ もしくは $r_2 + r_3 \equiv 1 \pmod 2$ であるとき, 次が成り立つ.

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \mathrm{sgn}(\sigma) \zeta_3(\overset{\sigma(1)}{-r_1}, \overset{\sigma(2)}{-r_2}, \overset{\sigma(3)}{-r_3}) = 0,$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ の符号.

最後に, Corollary 3.2 および Proposition 3.4 の第 2 公式の拡張を述べる.

THEOREM 3.6 k を 3 以上の奇数とする．そのとき，任意の非負整数 r_i $(i=1,\dots,k)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\zeta_k(\overset{1}{-r_1},\overset{3}{-r_2},\dots,\overset{k}{-r_{(k+1)/2}},\dots,\overset{4}{-r_{k-1}},\overset{2}{-r_k})\\
&\qquad=\zeta_k(\overset{\sigma(1)}{-r_1},\overset{\sigma(3)}{-r_2},\dots,\overset{\sigma(k)}{-r_{(k+1)/2}},\dots,\overset{\sigma(4)}{-r_{k-1}},\overset{\sigma(2)}{-r_k})
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\sigma\in\mathfrak{S}_k$ は

$$\sigma=(l_1\ l_1+1)(l_2\ l_2+1)\cdots(l_n\ l_n+1)$$

なる互換の積で表され，かつ各 l_j は $0<l_j<k$ を満たす奇数．$n\leq(k-1)/2$.

THEOREM 3.7 k は 3 以上の整数とする．そのとき，任意の非負整数 r_i $(i=1,\dots,k)$ に対して，

$$\zeta_k(\overset{1}{-r_1},\overset{2}{-r_2},\dots,\overset{k}{-r_k})=\zeta_k(\overset{\sigma(1)}{-r_1},\overset{\sigma(2)}{-r_2},\dots,\overset{\sigma(k)}{-r_k})$$

が成り立つ．ここで，$\sigma\in\mathfrak{S}_k$ は $\sigma(k)=k$ を満たすもの．

この節は，筆者による論文 [7] をまとめたものである．詳しくは，そちらを参照されたい．

4 小森氏の結果

名古屋大学の小森靖氏は，非常に一般的な多重ゼータ関数の積分表示を与えている ([4]). [4] では，多重ゼータ関数の負の整数点での特殊値に関する議論も扱っている．小森氏の場合，本稿のように深さ 3 に限らず一般の深さ k で，しかもすべての近づけ方による特殊値も与えているが，具体的にその値を計算することは難しいようである．

Riemann ゼータ関数の負の整数点での特殊値と関–Bernoulli 数が何故に関係するかを簡単に説明すると，Riemann ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)}\int_C\frac{z^{s-1}}{e^z-1}\,dz$$

(積分路 C は実軸上 ∞ から 0 に向かってきて，0 の周りで一周して ∞ に帰っていくもの) は，その被積分関数がまさに関–Bernoulli 数の母関数であって，留数定理を用いて積分を計算することで，Riemann ゼータ関数の負の整数点での特殊値と関–Bernoulli 数が結びつくわけである．小森氏の積分表示は，この拡張であり，多重ゼータ関数の積分表示の被積分関数を原点の周りで Taylor 展開したときの係数を **"generalized multiple Bernoulli number"** と定義し，これを用いて，多重ゼータ関数の負の整数点の特殊値を与えている．

5 今後の期待

本稿では, 近づけ方の妥当性については何も議論していない. もちろん, そのような議論はされて当然だと思われる. そこで, ある非正整数点でブローアップしてみると, その非正整数点は例外集合 (2 変数の時は例外曲線) というものに対応し, これまで議論されてきた負の整数点での特殊値は, その例外集合上の値ととられることが出来る (と思われる. 実際, 2 変数の時はそのようになっている). また, 不確定特異点である非正整数点は, 1 回のブローアップでは特異点解消されず, さらにブローアップする必要がある. そのときの configuration にも興味がある. 今後の期待として, この方向での議論があげられる.

謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である川田浩一先生に感謝申し上げます. また, 本研究において松本耕二先生, 谷川好男先生, 小森靖先生から多くのご助言を頂きました. ここに深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107–116.

[2] S. Akiyama and Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, Ramanujan J. **5** (2001), 327–351.

[3] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math. **81** (1949), 353–376.

[4] Y. Komori, An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta function and generalized multiple Bernoulli numbers. preprint.

[5] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, J. Number Theory, **101** (2003), 223–243.

[6] 松本 耕二, 多重ゼータ関数の解析的理論とその応用, 数学, **59** (2007), 24–45.

[7] Y. Sasaki, Multiple zeta values of depth 3 at non-positive integers, preprint.

[8] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta-functions, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.