数理解析研究所講究録
第1665巻 2009年 100-104

The joint universality and the generalized self-similarity for Dirichlet L-functions

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　中村隆

1 Intoduction

Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ に対して，$\sigma>1$ では

$$\zeta(\sigma)^{-1}\leq|\zeta(s)|\leq\zeta(\sigma)$$

となる．しかし $\sigma\leq 1$ ではこのような簡単な評価はできず，実は次の定理が成り立つ．

Theorem A (H. Bohr and R. Courant). 任意に固定した $1/2<\sigma<1$ に対し，$\{\zeta(\sigma+it):t\in\mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

この結果の拡張が，zeta 関数の普遍性と呼ばれるものである．meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T^{\tau}\{\ldots\}:=T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau\in[0,T]:\ldots\}$, ... の部分には τ が満たす条件が書かれる．領域 D を $D:=\{s\in\mathbb{C}:1/2<\Re(s)<1\}$ と定義し，K と $K_1,\ldots,K_m$ を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem B (S.M.Voronin). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T^{\tau}\left\{\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，おおまかに言えば，零点を持たない任意の正則関数は zeta 関数の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．$\log\zeta(s)$ の普遍性により $\zeta(s)$ の普遍性を証明するので $f(s)$ が零点を持たないという仮定が必要になる．また $f(s)$ が零点を持たないという仮定を外した場合，上記の定理は零点密度定理

$$N(\sigma,T)=O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)}\right),\qquad 1/2<\sigma<1 \tag{1.1}$$

に矛盾することが知られている（よって $f(s)$ は零点を持ってはならない）．

次の定理は同時普遍性定理（joint universality theorem）と呼ばれるものである．

The author is supported by JSPS Research Fellowship for Young Scientist (JSPS Research Fellow DC2).

Theorem C (B. Bagchi (S. M. Voronin)). $f_l(s)$ を K_l 上で連続で零点を持たず，K_l の内部で正則な関数とする．$\chi_1, \ldots, \chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^\tau \Big\{ \sup_{1\le l\le m} \sup_{s\in K_l} \big| L(s+i\tau, \chi_l) - f_l(s) \big| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

この定理は，零点を持たない任意の正則関数の組は，非同値な Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．この定理の一般化等については [3] と第 4 章を参照して頂きたい．

普遍性は次の定理からわかるように，Riemann 予想と密接に関連している．

Theorem D (Bagchi). *Riemann* 予想が正しい．$\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$, K に対し，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^\tau \Big\{ \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - L(s,\chi)| < \varepsilon \Big\} > 0. \tag{1.2}$$

証明の方針を簡単に述べておく．Riemann 予想が正しいならば Theorem B により (1.2) を得る．Riemann 予想が誤りならば，Rouché の定理と零点密度定理 (1.1) により (1.2) の左辺 $= 0$ を得る．

[3, Theorem 8.3] にはこれより精密な形の定理がある．即ち $\theta < \Re(s) < 1$ において $\zeta(s)$ が零点をもたないことと，$\theta < \Re(s) < 1$ に含まれる任意の閉円盤で $\zeta(s+i\tau)$ が普遍性の意味で $\zeta(s)$ を近似できることが同値，という定理がある．

2 主結果

以下に主結果を述べる．これらの定理は [3, Section 2] で論じられている $\tilde{S}$ class に拡張可能である．このことについては第 4 章で述べる．

Theorem 2.1. 殆ど全ての $\delta \in \mathbb{R}$，任意の $\varepsilon > 0$, K に対し，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^\tau \Big\{ \sup_{s\in K} \big| L(s+i\tau,\chi) - L(s+i\delta\tau,\chi) \big| < \varepsilon \Big\} > 0. \tag{2.1}$$

もし (2.1) が $\delta = 0$ であるとき証明されれば，Theorem D から Riemann 予想が正しいことになる．この定理は次の定理と三角不等式によりすぐに導かれる．

Theorem 2.2. $\delta_1 = 1$ とし，$f_1(s), f_2(s)$ と K_1, K_2 は *Theorem C* の条件を充たすとする．このとき殆ど全ての $\delta_2 \in \mathbb{R}$，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^\tau \Big\{ \sup_{1\le l\le 2} \sup_{s\in K_l} \big| L(s+i\delta_l\tau,\chi) - f_l(s) \big| < \varepsilon \Big\} > 0. \tag{2.2}$$

これは Theorem C の類似である．上の定理では殆ど全ての $\delta_2 \in \mathbb{R}$ とあるが，実は次の定理が成り立つ．

Theorem 2.3. $1 = d_1, d_2, \ldots, d_m$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的実数，$d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，$f_l(s)$ と K_l は *Theorem C* の条件を充たすとする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^\tau \Big\{ \sup_{1\le l\le m} \sup_{s\in K_l} \big| L(s + idd_l\tau, \chi) - f_l(s) \big| < \varepsilon \Big\} > 0. \tag{2.3}$$

つまり δ_2 が代数的実数であるとき，Theorem 2.2 は成立する．$1, d_1, d_2$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的実数であっても，$1, dd_1, dd_2$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立とは限らないことに注意する．例えば $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的実数であるが，$d^{-1} := \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とすれば $1, dd_1, dd_2$ は $\mathbb{Q}$ 上一次従属である．

さらに δ_2 が有理数であるときは，(2.2) を充たさない例が存在する．これは以下のようにして示される．χ は実 Dirichlet 指標，$K := K_1 = K_2$ を実軸上の一点集合，$d_2 = -1$ とする．このとき $|L(\sigma + i\tau, \chi) + i| < \varepsilon$ を充たす τ は，$|L(\sigma - i\tau, \chi) - i| < \varepsilon$ を充たさなくてはならない．よって (2.2) は成り立たない．

このようにパラメーター d を変えることにより，L 関数の挙動が大きく変化することは興味深いことである．これらの定理は確率論を使うなど非常に解析的であるが，Theorem 2.2 においては $1 = d_1, d_2, \ldots, d_m$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的実数という数論的な仮定が必要となることは注目すべきであると思われる．

3 証明の概略

この章では Theorems 2.3 と 2.2 の証明の概略について簡単に述べる．詳しい証明については [1] を参照して頂きたい．

普遍性の証明は２つの段階，極限定理と稠密性の証明に分けられる．次の命題と補題はそれぞれ Theorems 2.3 と 2.2 の極限定理の証明において重要な役割を果たす．

Proposition 3.1. p_n を n 番目の素数とし，$1 = d_1, d_2, \ldots, d_m$ を $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実代数的数とする．このとき $\{\log p_n^{d_l}\}_{n\in\mathbb{N}}^{1\le l\le m}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．

Proof. $\{\log p_n^{d_l}\}_{n\in\mathbb{N}}^{1\le l\le m}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立でないとする．このとき

$$\sum_{n=1}^{r} c_{1n} \log p_n + \sum_{n=1}^{r} c_{2n} \log p_n^{d_2} + \cdots + \sum_{n=1}^{r} c_{mn} \log p_n^{d_m} = 0; \qquad c_{ln} \in \mathbb{Q}$$

が成り立つ。この等式から

$$p_1^{c_{11}} \cdots p_r^{c_{1r}} = (p_1^{c_{21}} \cdots p_r^{c_{2r}})^{-d_2} \cdots (p_1^{c_{m1}} \cdots p_r^{c_{mr}})^{-d_m}. \tag{3.1}$$

を得る．(3.1) の左辺は代数的である．しかし (3.1) の右辺は $(c_{21}, \dots c_{2r}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mr}) \neq (0, \dots, 0)$ であるとき Baker の定理の系 [2, 第 4 章の系 3] により超越数となる．ある $2 \leq k \leq m$ に対して $c_{k1} = \cdots = c_{kr} = 0$ なるときは，低い次元と見做し Baker の定理の系 [2, 第 4 章の系 3] を用いて (3.1) の右辺は超越数になる．最後に $(c_{21}, \dots c_{2r}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mr}) = (0, \dots, 0)$ であるときは，素因数分解の一意性から $c_{11} = \cdots = c_{1n} = 0$ を得る． □

Lemma 3.2. 殆ど全ての $\delta_2 \in \mathbb{R}$ に対して $\{\log p_n\} \cup \{\log p_n^{\delta_2}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である．

Proof. $\{\log p_n\} \cup \{\log p_n^{\delta_2}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立でないとする．Proposition 3.1, と同様にして

$$p_1^{c_{11}} \cdots p_r^{c_{1r}} = (p_1^{c_{21}} \cdots p_r^{c_{2r}})^{-\delta_2}, \qquad c_{11}, \dots, c_{1r}, c_{21}, \dots, c_{2r} \in \mathbb{Q} \tag{3.2}$$

を得る．(3.2) の左辺は明らかに代数的数である．殆ど全ての実数は超越数であるから，$(c_{21}, \dots c_{2r}) \neq (0, \dots, 0)$ であるとき，殆ど全ての $\delta_2 \in \mathbb{R}$ に対して (3.2) の右辺は超越数である．よって (3.2) の右辺は零集合 $\delta_2 \in \mathbb{R}$ を除いて超越数である．代数的数の濃度は可算であり，その可算和集合の濃度もまた可算であるから，殆ど全ての $\delta_2 \in \mathbb{R}$ に対し，全ての $0 < q \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{1\}$ に対し q^{δ_2} は超越数となる．したがって Proposition 3.1 の証明と同様にして，この補題を得る． □

以上が極限定理に関するものである．次に稠密性に関する補題を述べる．D 上で定義された解析関数全体を $H(D)$ と書き，$H^m(D) := H(D) \times \cdots \times H(D)$ と定義する．次の補題で $m = 1$ であるものは普遍性の証明に頻繁に使われているものである（例えば [3, Theorem 5.7]）．これを各成分に適用することにより次の補題が証明される．

Lemma 3.3. $\{\underline{f_n}\}$ を次の 3 条件を充たす $H^m(D)$ で定義された関数列とする．
(*a*) $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ 上で定義された複素測度 μ_l のサポートが D に含まれ，$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{C}} f_{ln} d\mu_l \right| < \infty$ であるならば，全ての $1 \leq l \leq m$, $r \in \mathbb{N}_0$ に対し $\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu_l = 0$ となる．
(*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \underline{f_n}$ が $H^m(D)$ で収束する．
(*c*) 任意のコンパクト集合 $K \subseteq D$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{1 \leq l \leq m} \sup_{s \in K} |f_{l,n}(s)|^2 < \infty$.
このとき収束する級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{1n} f_{1n}, \dots, a_{mn} f_{mn})$, $|a_{ln}| = 1$, $1 \leq l \leq m$, $n \in \mathbb{N}_0$ の集合は $H^m(D)$ で稠密である．

4 一般化

この章では [3, Section 2] で論じられている $\tilde{S}$ class について簡単にまとめ，主結果の $\tilde{S}$ class への一般化について述べる．次の五つの条件を充たす Dirichlet 級数

$$\mathcal{L}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

全体を $\tilde{S}$ class という．これは Selberg class $\mathcal{S}$ に似たものである．Selberg class の定義等，$\tilde{S}$ class との比較については [3, Section 6 and Notations] を参照して頂きたい．

(i) Ramanujan hypothesis. $a(n) = O(n^{\varepsilon})$, $\forall\varepsilon > 0$ が成り立つ.

(ii) Analytic continuation. $\mathcal{L}(s)$ は $s = 1$ における極を除いて半平面 $\sigma > \sigma_{\mathcal{L}}$, ただし $\sigma_{\mathcal{L}} < 1$ に解析接続される.

(iii) Finite order. 任意に固定された $\sigma > \sigma_{\mathcal{L}}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\mathcal{L}(\sigma + it) = O(|t|^{\mu_{\mathcal{L}}+\varepsilon})$, $t \to \infty$ なる正の定数 $\mu_{\mathcal{L}}$ が存在する.

(iv) Polynomial Euler product. 自然数 n が存在し, かつ全ての素数 p に対して $\mathcal{L}(s) = \prod_p \prod_{r=1}^{n}(1 - \alpha_r(p)p^{-s})^{-1}$ なる $\alpha_r(p)$ が存在する.

(v) Prime mean-square. $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とする. 次を充たす正の定数 κ が存在する. $\lim_{x\to\infty} \pi(x)^{-1} \sum_{p\le x} |a(p)| = \kappa$.

$\tilde{\mathcal{S}}$ class は Reimann zeta 関数, Dirichlet L 関数, new form に付随する L 関数等を含む. 全ての固定された $\sigma > \sigma_1$ に対し

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\mathcal{L}(\sigma + it)|^2 dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}}$$

が成り立つような σ_1 の下限を σ_{m} と書くことにする. このとき次の定理が成り立つ.

Theorem E ([3, Theorem 5.14]). $\mathcal{L}(s)$ を $\tilde{\mathcal{S}}$ の元とし, $\mathcal{K}$ を帯領域 $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_{\mathrm{m}} < \sigma < 1\}$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とし, $f(s)$ を $\mathcal{K}$ 上で連続で零点を持たず, $\mathcal{K}$ の内部で正則な関数とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^t \left\{ \sup_{s\in\mathcal{K}} |\mathcal{L}(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

$\tilde{\mathcal{S}}$ class についても Theorem D の拡張である [3, Theorem 8.4] が成り立つ. ただし零点密度定理 (1.1) に対応するものが必要になるため $\mathcal{L}(s)$ は $\mathcal{S}$ にも属さなくてはならない.

最後に Theorem 2.1 の $\tilde{\mathcal{S}}$ class の拡張を述べる. 他の主結果も同様に $\tilde{\mathcal{S}}$ class のに拡張できることを注意しておく.

Theorem 4.1. $\mathcal{L}(s)$ を $\tilde{\mathcal{S}}$ の元とする. $\mathcal{K}$ を *Theorem E* と同じものとする. このとき殆ど全ての $\delta \in \mathbb{R}$, 任意の $\varepsilon > 0$, $\mathcal{K}$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T^t \left\{ \sup_{s\in\mathcal{K}} |\mathcal{L}(s + i\tau) - \mathcal{L}(s + i\delta\tau)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

参考文献

[1] T. Nakamura, "The joint universality and the generalized self-similarity for Dirichlet L-functions," *preprint*.

[2] 塩川宇賢, 無理数と超越数, 森北出版, 1999.

[3] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.