数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 45-56

Kannan の不動点定理の一般化

中西壮人 (Masato Nakanishi) & 鈴木智成 (Tomonari Suzuki)
九州工業大学 (Kyushu Institute of Technology)

1. 序

完備距離空間における不動点定理の中で最も有用でかつ最も有名な定理は Banach の縮小原理である.

定理 1 (Banach [1]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の**縮小写像**する. すなわち, $r \in [0,1)$ が存在して, 全ての $x, y \in X$ について

$$d(Tx, Ty) \leq r\, d(x, y)$$

を満たすとする. このとき, T は不動点を唯一つ持つ.

Kannan は 1969 年に次の定理を証明している.

定理 2 (Kannan [4]). (X, d) を完備距離空間とし, T を X 上の **Kannan 写像**とする. すなわち $\alpha \in [0, 1/2)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, Tx) + \alpha\, d(y, Ty)$$

を満たすとする. このとき, T は不動点を唯一つ持つ.

Subrahmanyam [8] は定理 2 が空間の距離完備性を特徴付けることを示した. すなわち, 距離空間 X が完備であることと, X 上のどんな Kannan 写像も不動点を持つことは同値である. 一方で, 定理 1 は距離完備性を特徴付けないことが知られている (Connell [2]). つまり, 定理 1 と定理 2 は非常によく似た重要な定理であるが, 定理 1 が応用上重要なのに対して, 定理 2 は理論上重要な定理である.

本稿では, 最近の論文 [3] の解説と論文 [7] の紹介を行う. これらの論文では, Kannan 写像の特徴を調べるために, 定理 2 に関する「定数付き不動点定理」を証明している. 定数付き不動点定理に関しては [5, 9–13] 等も参照のこと.

MSC (2000). 54H25
キーワード. Kannan 写像, 不動点

2. 不動点定理

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする. $\sharp A$ で集合 A の濃度を表す.

この節では不動点定理を証明する.

補助定理 3 ([6, 9]). (X,d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. $x,y \in X$, $r \in [0,1)$ そして $d(Tx,T^2x) \le r\,d(x,Tx)$ を仮定する. このとき

$$(1+r)^{-1}\,d(x,Tx) \le d(x,y), \quad \text{または} \quad (1+r)^{-1}\,d(Tx,T^2x) \le d(Tx,y)$$

が成り立つ.

証明. もし結論が成り立たないとすると, すなわち

$$(1+r)^{-1}\,d(x,Tx) > d(x,y) \quad \text{かつ} \quad (1+r)^{-1}\,d(Tx,T^2x) > d(Tx,y)$$

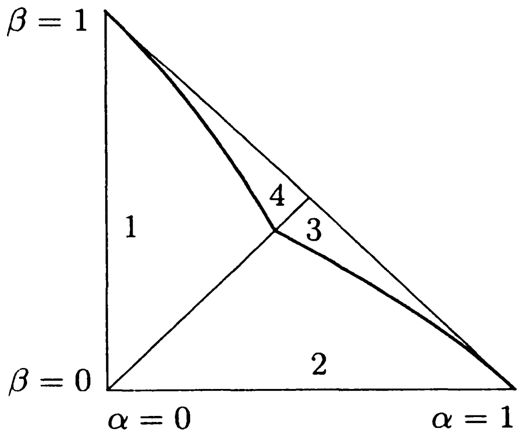
を仮定すると

$$\begin{aligned} d(x,Tx) &\le d(x,y) + d(y,Tx) < (1+r)^{-1}\big(d(x,Tx) + d(Tx,T^2x)\big) \\ &\le (1+r)^{-1}\big(d(x,Tx) + r\,d(x,Tx)\big) = d(x,Tx) \end{aligned}$$

となり, 矛盾する. □

Δ と Δ_j $(j = 1,\cdots,4)$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(\alpha,\beta) :\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \alpha+\beta < 1\}, \\ \Delta_1 &= \{(\alpha,\beta) \in \Delta :\ \alpha \le \beta,\ \alpha+\beta+\alpha^2 < 1\}, \\ \Delta_2 &= \{(\alpha,\beta) \in \Delta :\ \alpha \ge \beta,\ \alpha+\beta+\beta^2 < 1\}, \\ \Delta_3 &= \{(\alpha,\beta) \in \Delta :\ \alpha \ge \beta,\ \alpha+\beta+\beta^2 \ge 1\}, \\ \Delta_4 &= \{(\alpha,\beta) \in \Delta :\ \alpha \le \beta,\ \alpha+\beta+\alpha^2 \ge 1\}. \end{aligned}$$



定理 4 ([3]). Δ から $(1/2,1]$ への非増加関数 ψ を

$$\psi(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_1\\ 1 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_2\\ 1-\beta & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_3\\ (1-\beta)/(1-\beta+\alpha) & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_4\end{cases} \tag{1}$$

で定める. (X,d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. 以下を満たす $(\alpha,\beta)\in\Delta$ が存在すると仮定する: 全ての $x,y\in X$ に対して

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx)\le d(x,y)$$

ならば

$$d(Tx,Ty)\le\alpha\,d(x,Tx)+\beta\,d(y,Ty)$$

が成り立つ. このとき, T は唯一の不動点 z を持つ. さらに, $\lim_n T^n x=z$ が全ての $x\in X$ に対して成り立つ.

注意. T に関する仮定を論理式を用いて表すと以下になる:

$$\exists(\alpha,\beta)\in\Delta,\ \forall x,y\in X,\ \Big(\psi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx)\le d(x,y)$$
$$\Longrightarrow\ d(Tx,Ty)\le\alpha\,d(x,Tx)+\beta\,d(y,Ty)\Big)$$

また, ψ は次のように書くことができる:

$$\psi(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha+\beta+\min\{\alpha,\beta\}^2<1\\ (1-\beta)/\big(1-\beta+\min\{\alpha,\beta\}\big) & \text{if } \alpha+\beta+\min\{\alpha,\beta\}^2\ge 1\end{cases}$$

証明. q,r を以下のようにおく:

$$q:=\frac{\beta}{1-\alpha}\in[0,1),\qquad r:=\frac{\alpha}{1-\beta}\in[0,1). \tag{2}$$

$\psi(\alpha,\beta)\le 1$ なので, $\psi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx)\le d(x,Tx)$ である. 仮定より,

$$d(Tx,T^2x)\le\alpha\,d(x,Tx)+\beta\,d(Tx,T^2x)$$

が成り立つ. したがって

$$d(Tx,T^2x)\le r\,d(x,Tx) \tag{3}$$

が全ての $x\in X$ に対して成り立つ. また

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(Tx,T^2x)\le d(Tx,T^2x)\le r\,d(x,Tx)\le d(Tx,x)$$

と仮定より,

$$d(T^2x,Tx)\le\alpha\,d(Tx,T^2x)+\beta\,d(x,Tx)$$

すなわち

$$d(Tx, T^2x) \leq q\, d(x, Tx) \tag{4}$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つ.

$u \in X$ を任意にとり, $u_n = T^n u$ と定める. (3) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, d(u, Tu) < \infty$$

を得る. この式から, $\{u_n\}$ はコーシー列であることが分かる. X は完備なので, $\{u_n\}$ はある点 $z \in X$ に収束する.

次に,

$$d(z, Tx) \leq \beta\, d(x, Tx) \qquad \forall x \in X \setminus \{z\} \tag{5}$$

を示す. $\{u_n\}$ は z に収束するので, $\nu_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq \nu_1$ のとき $d(u_n, z) \leq (1/3)\, d(x, z)$ を満たす. $n \geq \nu_1$ のとき,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta)\, d(u_n, Tu_n) &\leq d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, z) + d(u_{n+1}, z) \\ &\leq (2/3)\, d(x, z) = d(x, z) - (1/3)\, d(x, z) \\ &\leq d(x, z) - d(u_n, z) \leq d(u_n, x) \end{aligned}$$

である. 仮定より,

$$\begin{aligned} d(z, Tx) &= \lim_{n \to \infty} d(u_{n+1}, Tx) = \lim_{n \to \infty} d(Tu_n, Tx) \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \big(\alpha\, d(u_n, Tu_n) + \beta\, d(x, Tx)\big) = \beta\, d(x, Tx) \end{aligned}$$

を得る. つまり (5) が示された. また, (5) より,

$$d(x, Tx) \leq d(x, z) + d(z, Tx) \leq d(x, z) + \beta\, d(x, Tx)$$

がいえるので,

$$(1 - \beta)\, d(x, Tx) \leq d(x, z) \qquad \forall x \in X \setminus \{z\} \tag{6}$$

も成り立つ.

次に z が T の不動点であることを証明する. $(\alpha, \beta) \in \Delta_1$ の場合, 背理法を用いて証明する. $Tz \neq z$ と仮定すると, $\nu_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq \nu_2$ のとき $d(u_n, z) \leq (1 - r)\, d(z, Tz)$ を満たす. (3) より, $n \geq \nu_2$ のとき

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta)\, d(Tz, T^2z) &= d(Tz, T^2z) \leq r\, d(z, Tz) \\ &= d(z, Tz) - (1 - r)\, d(z, Tz) \\ &\leq d(z, Tz) - d(u_n, z) \leq d(Tz, u_n) \end{aligned}$$

である．仮定より，

$$
\begin{aligned}
d(T^2z,z) &= \lim_{n\to\infty} d(T^2z,Tu_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \bigl(\alpha\, d(Tz,T^2z) + \beta\, d(u_n,Tu_n)\bigr) = \alpha\, d(Tz,T^2z)
\end{aligned}
$$

を得る．この式と (3), $\alpha+\beta+\alpha^2<1$ より

$$
\begin{aligned}
d(z,Tz) &\leq d(z,T^2z) + d(Tz,T^2z) \leq (1+\alpha)\, d(Tz,T^2z) \\
&\leq (1+\alpha)\, r\, d(z,Tz) = \frac{\alpha+\alpha^2}{1-\beta}\, d(z,Tz) \\
&< d(z,Tz)
\end{aligned}
$$

となり，矛盾する．よって，$Tz=z$ である．

$(\alpha,\beta)\in\Delta_2$ の場合も背理法を用いて証明する．$Tz\neq z$ と仮定すると，(4), (5), $\alpha+\beta+\beta^2<1$ より

$$
\begin{aligned}
d(z,Tz) &\leq d(z,T^2z) + d(Tz,T^2z) \leq (1+\beta)\, d(Tz,T^2z) \\
&\leq (1+\beta)\, q\, d(z,Tz) = \frac{\beta+\beta^2}{1-\alpha}\, d(z,Tz) \\
&< d(z,Tz)
\end{aligned}
$$

となり，矛盾する．よって，$Tz=z$ である．

$(\alpha,\beta)\in\Delta_3$ の場合，さらに次の 2 つの場合に分ける．

- $\sharp\{n\in\mathbb{N}: u_n=z\}\geq 2$ の場合
- $\sharp\{n\in\mathbb{N}: u_n=z\}< 2$ の場合

前者の場合，$\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$ が存在して $u_\kappa=u_{\kappa+\lambda}=z$ を満たす．$\{u_n\}$ の定義より，全ての $j\in\mathbb{N}$ に対して

$$
u_{\kappa+j\lambda}=z \quad \text{かつ} \quad u_{\kappa+j\lambda+1}=Tz
$$

である．もし $Tz\neq z$ を仮定すると，$\{u_n\}$ はコーシー列ではない．これは矛盾するので，$Tz=z$ がいえる．後者の場合，$\nu_3\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq\nu_3$ のとき $u_n\neq z$ を満たす．(6) より，$n\geq\nu_3$ のとき，$\psi(\alpha,\beta)\, d(u_n,Tu_n)\leq d(u_n,z)$ である．仮定より

$$
\begin{aligned}
d(z,Tz) &= \lim_{n\to\infty} d(Tu_n,Tz) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \bigl(\alpha\, d(u_n,Tu_n) + \beta\, d(z,Tz)\bigr) = \beta\, d(z,Tz)
\end{aligned}
$$

がいえる．$\beta<1$ より $Tz=z$ である．

$(\alpha,\beta)\in\Delta_4$ の場合，$\psi(\alpha,\beta)=(1+r)^{-1}$ に注意する．補助定理 3 より，どんな $n\in\mathbb{N}$ に対しても

$$
\psi(\alpha,\beta)\, d(u_n,Tu_n)\leq d(u_n,z) \quad \text{もしくは} \quad \psi(\alpha,\beta)\, d(Tu_n,T^2u_n)\leq d(Tu_n,z)
$$

が成り立つ. すなわち,

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(u_{n_j},Tu_{n_j}) \le d(u_{n_j},z)$$

を満たす $\{n\}$ の部分列 $\{n_j\}$ をとることができる. 仮定より

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &= \lim_{j\to\infty} d(Tu_{n_j},Tz) \\ &\le \lim_{j\to\infty} \big(\alpha\, d(u_{n_j},Tu_{n_j}) + \beta\, d(z,Tz)\big) = \beta\, d(z,Tz) \end{aligned}$$

を得る. $\beta < 1$ より $Tz = z$ である. 全ての場合において $Tz = z$ が成り立つことが証明された.

もし z と別の不動点 v が存在すると仮定すると, (5) より

$$0 < d(z,v) = d(z,Tv) \le \beta\, d(v,Tv) = \beta\, d(v,v) = 0$$

となり矛盾する. よって z は唯一の不動点である. $u \in X$ は任意であるから, 全ての $x \in X$ に対して $\lim_n T^n x = z$ が成り立つ. □

3. 最良定数

この節では, $\psi(\alpha,\beta)$ が全ての $(\alpha,\beta) \in \Delta$ において最良定数になっていることを示す. その証明では, 次の補助定理が幾度か用いられる.

補助定理 5. $a, A, b, B \in \mathbb{R}$ は $a \le A$, $b \le B$ を満たしているとする. このとき $a\,B + A\,b \le a\,b + A\,B$ が成り立つ.

証明. $(a\,b + A\,B) - (a\,B + A\,b) = (A - a)\,(B - b) \ge 0$. □

定理 6 ([3]). 関数 ψ を (1) で定める. 任意の $(\alpha,\beta) \in \Delta$ に対して, 完備距離空間 (X,d) と X 上の不動点を持たない写像 T が存在して, 以下を満たす: 全ての $x, y \in X$ に対して,

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx) < d(x,y)$$

ならば

$$d(Tx,Ty) \le \alpha\, d(x,Tx) + \beta\, d(y,Ty)$$

が成り立つ.

証明. q と r を (2) で定める.

まず $(\alpha,\beta) \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ の場合, $X = \{-1, 1\}$ とする. ただし, 距離は通常の距離である. 写像 T を $Tx = -x$ で定める. 明らかに T は不動点を持たない. また, 全ての $x, y \in X$ に対して

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx) = 2 \ge d(x,y)$$

が成り立つ.

$(\alpha,\beta)\in\Delta_3$ の場合,

$$p := \frac{\beta}{1-\beta} \in (0,1)$$

とすると, $\psi(\alpha,\beta)\,(1+p)=1$ である. 数列 $\{x_n\}$ を $x_n=(1-q)\,(-p)^n$ で定め,

$$X=\{0,1\}\cup\bigl\{x_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\bigr\}$$

とする. X 上の写像 T を $T0=1$, $T1=x_0$, $Tx_n=x_{n+1}$ で定める. 明らかに T は不動点を持たない. このとき,

$$d(T1,T0)=q=\alpha\,d(1,T1)+\beta\,d(0,T0)\le\alpha\,d(0,T0)+\beta\,d(1,T1)$$

が成り立つ. $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$\psi(\alpha,\beta)\,d(0,T0)>\psi(\alpha,\beta)\,d(x_n,Tx_n)=(1-q)\,p^n=d(0,x_n)$$

が成り立つ. $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}
&d(Tx_n,T1)-\bigl(\alpha\,d(x_n,Tx_n)+\beta\,d(1,T1)\bigr)\\
&=(1-q)\left(1-(-p)^{n+1}-\frac{\alpha}{\beta}p^{n+1}-\frac{\beta^2}{1-\alpha-\beta}\right)\\
&\le(1-q)\left(1-\frac{\beta^2}{1-\alpha-\beta}\right)+(1-q)\,p^{n+1}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\le 0
\end{aligned}$$

なので

$$d(Tx_n,T1)\le\alpha\,d(x_n,Tx_n)+\beta\,d(1,T1)\le\alpha\,d(1,T1)+\beta\,d(x_n,Tx_n)$$

が成り立つ. $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m<n$ のとき,

$$\begin{aligned}
&d(Tx_n,Tx_m)-\bigl(\alpha\,d(x_n,Tx_n)+\beta\,d(x_m,Tx_m)\bigr)\\
&=(1-q)\left(\bigl|(-p)^{n+1}-(-p)^{m+1}\bigr|-\frac{\alpha}{\beta}p^{n+1}-p^{m+1}\right)\\
&\le(1-q)\left(p^{n+1}+p^{m+1}-\frac{\alpha}{\beta}p^{n+1}-p^{m+1}\right)\le 0
\end{aligned}$$

なので

$$d(Tx_n,Tx_m)\le\alpha\,d(x_n,Tx_n)+\beta\,d(x_m,Tx_m)\le\alpha\,d(x_m,Tx_m)+\beta\,d(x_n,Tx_n)$$

が成り立つ.

$(\alpha,\beta)\in\Delta_4$ の場合, $\psi(\alpha,\beta)\,(1+r)=1$ である.

$$0\le\alpha+\beta+\alpha^2-1+(\beta-\alpha)\,(1-\alpha-\beta)=2\,\alpha^2-(1-\beta)^2$$

より, $2\,r^2\ge1$ である. よって, $r\ge 2^{-1/2}>1/2$ が成り立つ. $\{e_n\}$ を ℓ_∞ の通常の基底とし, ℓ_∞ の閉部分集合 X を

$$X=\{0,e_1\}\cup\bigl\{x_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\bigr\}$$

で定める. ただし,

$$x_n = (1-r)\,r^n\,e_{n+1} - (1-r)\,r^n\,e_{n+2}$$

とする. $m < n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$d(x_m, x_n) = \begin{cases} (1-r^2)\,r^m & \text{if } m+1 = n \\ (1-r)\,r^m & \text{if } m+1 < n \end{cases}$$

である. X 上の写像 T を $T0 = e_1$, $Te_1 = x_0$, $Tx_n = x_{n+1}$ で定める. 明らかに T は不動点を持たない. また

$$d(T0, Te_1) = r = \alpha\, d(0, T0) + \beta\, d(e_1, Te_1) \le \alpha\, d(e_1, Te_1) + \beta\, d(0, T0)$$

が成り立つ. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\psi(\alpha,\beta)\, d(0, T0) > \psi(\alpha,\beta)\, d(x_n, Tx_n) = (1-r)\,r^n = d(0, x_n)$$

が成り立つ.

$$d(Te_1, Tx_0) - \big(\alpha\, d(e_1, Te_1) + \beta\, d(x_0, Tx_0)\big) = (1-\beta)\,(1-2\,r^2) \le 0$$

なので

$$d(Te_1, Tx_0) \le \alpha\, d(e_1, Te_1) + \beta\, d(x_0, Tx_0) \le \alpha\, d(x_0, Tx_0) + \beta\, d(e_1, Te_1)$$

が成り立つ. $\alpha + \beta + \alpha^2 \ge 1$ なので, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} d(Te_1, Tx_n) &= 1 - r \le \alpha r = \alpha\, d(e_1, Te_1) \\ &< \alpha\, d(e_1, Te_1) + \beta\, d(x_n, Tx_n) \le \alpha\, d(x_n, Tx_n) + \beta\, d(e_1, Te_1) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tx_{n+1}) &= (1-r^2)\,r^{n+1} = \alpha\, d(x_n, Tx_n) + \beta\, d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ &\le \alpha\, d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) + \beta\, d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

が成り立つ. $m+1 < n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\psi(\alpha,\beta)\, d(x_m, Tx_m) = (1-r)\,r^m = d(x_m, x_n)$$

と

$$\begin{aligned} & d(Tx_n, Tx_m) - \big(\alpha\, d(x_n, Tx_n) + \beta\, d(x_m, Tx_m)\big) \\ & < d(Tx_n, Tx_m) - \beta\, d(x_m, Tx_m) = r^{m+1}\,(1-r) - \beta\, r^m\,(1-r^2) \\ & = r^m\,(1-r)\,(\alpha - \beta) \le 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. □

次に, $\psi(\alpha,\beta)$ を最良定数と呼ぶ理由を述べる. $s \in [0,\infty)$ に対して, 条件 $C(s,\leq)$, $C(s,<)$ を以下で定義する.

$$C(s,\leq) := 「\ \forall x,y \in X, \Big(s\,d(x,Tx) \leq d(x,y) \ \Rightarrow \ d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,Tx) + \beta\, d(y,Ty)\Big)\ 」$$

$$C(s,<) := 「\ \forall x,y \in X, \Big(s\,d(x,Tx) < d(x,y) \ \Rightarrow \ d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,Tx) + \beta\, d(y,Ty)\Big)\ 」$$

条件の強弱を「(強い条件) $\geq$ (弱い条件)」という風に表す. ただし, ここでの強弱は同値な場合を含むとする.

命題 7. 以下が成り立つ.

(i) $C(s_1,\leq) \ \geq \ C(s_2,\leq)$ if $s_1 \leq s_2$
(ii) $C(s_1,<) \ \geq \ C(s_2,<)$ if $s_1 \leq s_2$
(iii) $C(s_1,<) \ \geq \ C(s_2,\leq)$ if $s_1 < s_2$
(iv) $C(s,\leq) \ \geq \ C(s,<)$

証明. (i) の場合のみ示す. 他の場合も全く同様に示せる. $C(s_1,\leq)$ を仮定する. $s_2\,d(x,Tx) \leq d(x,y)$ のとき,

$$s_1\,d(x,Tx) \leq s_2\,d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

が成り立つ. よって $C(s_1,\leq)$ より, $d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,Tx) + \beta\, d(y,Ty)$ が成り立つ. すなわち, $C(s_2,\leq)$ が証明された. この証明の構造を簡潔に述べると, $C(s_1,\leq)$ と $C(s_2,\leq)$ の結論部分は同じであり, 仮定の部分は $C(s_1,\leq)$ のが弱い. したがって, $C(s_1,\leq)$ のが強い. □

$(\alpha,\beta) \in \Delta$ を固定する. 定理 4 より, 条件 $C(\psi(\alpha,\beta),\leq)$ を満たせば不動点の存在が保証される. 一方, 定理 6 より, 条件 $C(\psi(\alpha,\beta),<)$ を満たしても不動点の存在は保証されない. 命題 7 より, 条件の集合

$$\{C(s,\leq)\} \cup \{C(s,<)\}$$

の中で $C(\psi(\alpha,\beta),\leq)$ の次に弱い条件は $C(\psi(\alpha,\beta),<)$ である. すなわち, 不動点を持つことを保証する最弱な条件が $C(\psi(\alpha,\beta),\leq)$ であることが分かる. 仮定の弱い定理は良い定理であるので, 我々は $\psi(\alpha,\beta)$ を最良定数と呼んでいる.

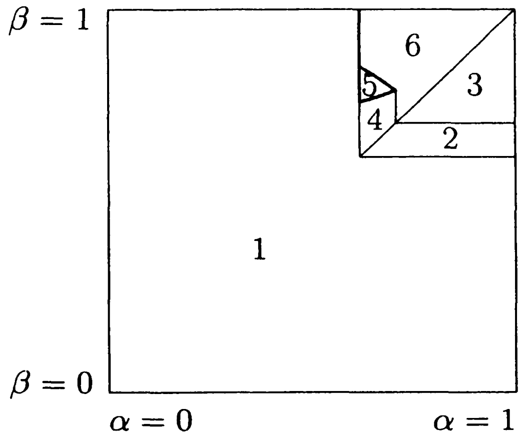
α, β が小さい程, 条件「$d(Tx,Ty) \leq \alpha\, d(x,Tx) + \beta\, d(y,Ty)$」は強い条件になる. しかし, 強さの程度は分からない. $\psi(\alpha,\beta)$ はこの条件の強さの程度を示す 1 つの指標になる.

4. もう一つの不動点定理と最良定数

この節では, 論文 [7] において証明されている 2 つの定理について紹介する. なお, これらの定理の証明は省く.

Δ と Δ_j $(j=1,\cdots,6)$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
&\Delta = [0,1)^2,\\
&\Delta_1 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha+\alpha^2<1 \ or\ \beta+\beta^2<1\},\\
&\Delta_2 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha\ge\beta,\ (\sqrt{5}-1)/2\le\beta\le 1/\sqrt{2}\},\\
&\Delta_3 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha\ge\beta,\ 1/\sqrt{2}\le\beta<1\},\\
&\Delta_4 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha\le\beta,\ (\sqrt{5}-1)/2\le\alpha\le 1/\sqrt{2},\ \beta\le\alpha^2-\alpha+1\},\\
&\Delta_5 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ (\sqrt{5}-1)/2\le\alpha\le 1/\sqrt{2},\\
&\qquad\qquad \alpha^2-\alpha+1\le\beta\le 1-(\alpha^3/(1+\alpha))\},\\
&\Delta_6 = \{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha\le\beta,\ (\sqrt{5}-1)/2\le\alpha\le 1/\sqrt{2},\ 1-(\alpha^3/(1+\alpha))\le\beta\}\\
&\qquad \cup\{(\alpha,\beta)\in\Delta:\ \alpha\le\beta,\ 1/\sqrt{2}\le\alpha<1\}.
\end{aligned}$$



定理 8 ([7]). Δ から $(1/2,1]$ への非増加関数 φ を

$$\varphi(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_1\\ (1-\beta)/\beta^2 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_2\\ 1/(1+\beta) & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_3\\ (1-\alpha)/\alpha^2 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_4\\ (1-\beta)/\alpha^3 & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_5\\ 1/(1+\alpha) & \text{if } (\alpha,\beta)\in\Delta_6\end{cases} \tag{7}$$

で定める. (X,d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. 以下を満たす $(\alpha,\beta)\in\Delta$ が存在すると仮定する: 全ての $x,y\in X$ に対して

$$\varphi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx)\leq d(x,y)$$

ならば

$$d(Tx,Ty)\leq\max\{\alpha\,d(x,Tx),\beta\,d(y,Ty)\}$$

が成り立つ. このとき, T は唯一の不動点 z を持つ. さらに, $\lim_n T^n x=z$ が全ての $x\in X$ に対して成り立つ.

また, 任意の $(\alpha,\beta)\in\Delta$ に対して $\varphi(\alpha,\beta)$ が最良定数になっていることを, 次の定理は示している.

定理 9 ([7]). 関数 φ を (7) で定める. 任意の $(\alpha,\beta)\in\Delta$ に対して, 完備距離空間 (X,d) と X 上の不動点を持たない写像 T が存在して, 以下を満たす: 全ての $x,y\in X$ に対して,

$$\varphi(\alpha,\beta)\,d(x,Tx)<d(x,y)$$

ならば

$$d(Tx,Ty)\leq\max\{\alpha\,d(x,Tx),\beta\,d(y,Ty)\}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[2] E. H. Connell, *Properties of fixed point spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **10** (1959), 974–979. MR0110093

[3] Y. Enjouji, M. Nakanishi and T. Suzuki, *A generalization of Kannan's fixed point theorem*, Fixed Point Theory Appl., **2009** (2009), Article ID 192872, 1–10.

[4] R. Kannan, *Some results on fixed points – II*, Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 405–408. MR0257838

[5] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces*, Nonlinear Anal., **69** (2008), 2942–2949. MR2452105

[6] ———, *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory Appl., **2008** (2008), Article ID 649749, 1–8. MR2395313

[7] M. Nakanishi and T. Suzuki, *An observation on Kannan mappings*, submitted.

[8] P. V. Subrahmanyam, *Completeness and fixed-points*, Monatsh. Math., **80** (1975), 325–330. MR0391065

[9] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1861–1869. MR2373618

[10] ———, *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 1088–1095. MR2390912

[11] ———, *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 5313–5317.

[12] T. Suzuki and M. Kikkawa, *Some remarks on a recent generalization of the Banach contraction principle*, in Proceedings of the Eighth International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (S. Dhompongsa, K. Goebel, W. A. Kirk, S. Plubtieng, B. Sims, and S. Suantai Eds.), pp. 151–161, Yokohama Publishers (2008).

[13] T. Suzuki and C. Vetro, *Three existence theorems for weak contractions of Matkowski type*, to appear in Int. J. Math. Stat.