数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 89-92

L_2 関数で定まる数列空間 $\Lambda_2(f)$ の構造と線形性

本田あおい (九工大情報工), 岡崎悦明 (九工大情報工),
佐藤坦 (九大名誉教授)

1 はじめに

$1 \leq p < +\infty, f(\neq 0) \in L_p(\mathbf{R}, dx)$ とし, 数列空間 $\Lambda_p(f)$ を

$$\Lambda_p(f) := \left\{ \{a_k\} \in \mathbf{R}^\infty \;\middle|\; \Psi_p(\boldsymbol{a}; f) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-a_k) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

で定義する. また, f が絶対連続で $I_p(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^p dx < +\infty$ となるときに $I_p(f) < +\infty$ と表わすことにする. $\Lambda_p(f)$ は平行移動不変距離

$$d_p(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \Psi_p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, f)^{\frac{1}{p}}$$

により完備可分距離空間になるが線形空間になるとは限らない. $\Lambda_p(f), I_p(f)$ について次の結果が成り立つ.

定理 1 [2] 1. $\Lambda_p(f) \subset \ell_p$,
2. $I_p(f) < +\infty$ ならば $\ell_p = \Lambda_p(f)$,
3. $1 < p < +\infty$ のとき, $\ell_p = \Lambda_p(f)$ となる必要十分条件は $I_p(f) < +\infty$.

定理 1 の系として次が得られる.

系 2 $f, g(\neq 0) \in L_p$ に対して $I_p(f-g) < +\infty$ ならば $\Lambda_p(f) = \Lambda_p(g)$.

これらの事実を踏まえて $\Lambda_p(f)$ の構造を解析し, 新たな理論を構築することが本研究の目標である. 特に $p=2$ の場合にはフーリエ解析を用いることで, より精密な解析を行うことができる. 本稿では $p=2$ の場合に特化して $\Lambda_2(f)$ の構造と線形性に関して得られた結果について報告する.

本論に入る前に研究の動機について述べておこう. この研究は, 無限直積測度の平行移動準不変性に関連する Shepp の定理 [4] が出発点であった. $dQ = q(x)dx$ を $I\!R$ 上の確率測度で $q(x) > 0$ (a.e. dx) とすると Q の無限直積測度 Q^∞ は $I\!R^\infty$ 上の確率測度 $\mu := Q^\infty$ を定める. 平行移動 $\mu_{\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in I\!R^\infty$ に対して,

$$\mu_{\boldsymbol{a}}(A) = \mu(A - \boldsymbol{a})$$

と定める．この時 Kakutani の二分定理 [3] により $\mu \sim \mu_{\boldsymbol{a}}$ (互いに絶対連続) かまたは $\mu \perp \mu_{\boldsymbol{a}}$ (特異) のいずれか一方が成立する．ここで

$$E(\mu) := \{\boldsymbol{a} \in I\!R^{\infty} \mid \mu \sim \mu_{\boldsymbol{a}}\}$$

とおくと Kakutani の定理 [3] より

$$E(\mu) = \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sqrt{q(x-a_k)} - \sqrt{q(x)} \right|^2 dx < +\infty \right\}$$

が得られる．これについて Shepp による次の結果が知られている．

定理 3 [4]　1. $E(\mu) \subset \ell_2$,
2. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q'(x)^2}{q(x)} dx < +\infty$ ならば $\ell_2 \subset E(\mu)$ である,
3. $\ell_2 = E(\mu)$ となる必要十分条件は $I < +\infty$ である．

この Shepp の定理の本質を検討する中で数列空間 $\Lambda_p(f)$ の枠組みの着想に思い至ったものである．すなわち定理 3 で $f := \sqrt{q}$ とおくと $\Lambda_2(\sqrt{q}) = E(\mu), I_2(\sqrt{q}) = \frac{1}{4}I$ であり定理 3 は定理 1 の特別な場合となる．この事実に気づいたことが研究の出発点であった．

2　$\Lambda_2(f)$ の線形性

$\Lambda_2(f)$ は一般には線形空間になるとは限らない (Chatterji and Mandrekar [1]. また最近, 中村元氏 (松江高専) によって別の反例が示された)．そこで本節では $\Lambda_2(f)$ が線形となるための条件について考察する．さらに f で定まる関数 $\varphi_f(x)$ の増大度条件により $\Lambda_2(f)$ として色々な線形空間が実現できることを示す．

線形性に関して, 一般に $1 \leq p < +\infty$ の場合には次の定理が得られる．

定理 4 $1 \leq p < +\infty$, $f(\neq 0) \in L_p$ に対して, $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} [u_i, u_{i+1}] = I\!R$, $\inf_i (u_{i+1} - u_i) > 0$ なる $-\infty \leq \cdots < u_{-1} < u_0 < u_1 < \cdots < u_{i-1} < u_i < u_{i+1} < \cdots \leq +\infty$ が存在し, $f(x)$ は各区間 (u_i, u_{i+1}) で広義単調関数とする．このとき $\Lambda_p(f)$ は線形空間である．

特に $p = 2$ の場合にはフーリエ解析を適用することが出来るので, より詳しい結果が得られる．$f(\neq 0) \in L^2$ のフーリエ変換を $\hat{f}$ とする．このとき $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \Lambda_2(f)$ となる必要十分条件は

$$\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos a_k \alpha) |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty$$

と書きかえられる．これを用いると直ちに次の結果が得られる．

定理 5 $f \in L_2$ について, ある $R > 0$ が存在し $|\hat{f}(\alpha)|$ は $\alpha \geq R$ で単調減少関数とする. このとき $\Lambda_2(f)$ は線形空間である.

他方, フーリエ解析による評価で次の補題が得られる.

補題 6 $f(\neq 0) \in L_2$, $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbf{R}^\infty$ とする. このとき全ての $t \in \mathbf{R}$ について $t\boldsymbol{a} := \{ta_k\} \in \Lambda_2(f)$ となるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである:

$$\begin{cases} \text{(S.1)} \quad \displaystyle\sum_k a_k^2 \int_0^{\frac{1}{|a_k|}} \alpha^2 |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty, \\ \text{(S.2)} \quad \displaystyle\sum_k \int_{\frac{1}{|a_k|}}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty. \end{cases}$$

ここで

$$\varphi_f(x) := \int_0^x e^{3s} |\hat{f}(e^s)|^2 ds, \quad x \geq 0,$$

$$\Lambda_2^\varphi(f) := \left\{ \{a_k\} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \varphi_f\left(\log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}$$

と定義する. ただし

$$\log^\# x := \begin{cases} \log x, & x \geq 1, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

これにより $\Lambda_2(f)$ の構造について, さらに精密な結果が得られる.

定理 7 任意の $f(\neq 0) \in L_2$ について $\Lambda_2(f) \subset \Lambda_2^\varphi(f)$.

定理 8 $f(\neq 0) \in L_2$ について, ある $K > 0$ と $0 < L < 2$ が存在して

$$\varphi_f'(x) \leq L\varphi_f(x), \quad x > K$$

が成り立つとする. このとき $\Lambda_2(f) = \Lambda_2^\varphi(f)$ となり $\Lambda_2(f)$ は線形である.

定理 8 を用いて, 線形空間となる $\Lambda_2(f)$ の色々な例を構成することができる.

例 9 ある $K > 0$ が存在して, $\varphi_f(x) = (1+x)^s - 1, x > K, s > 0$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \ell_2(\log \ell)^s := \left\{ \{a_k\} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)^s < +\infty \right\}.$$

$\ell_2(\log \ell)^s$ は一般化された Zygmund 空間と考えられる [5]. なおこのとき

$$|\hat{f}(\alpha)|^2 = s\alpha^{-3}(1 + \log \alpha)^{s-1}, \ \alpha \geq 1$$

である. $s = 1$ のときにはフーリエ逆変換が計算でき, $f(x) = \sqrt{x} e^{-x} \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x)$ である.

例 10 ある $K > 0$ が存在して，$\varphi_f(x) = x^s(\log x)^c$，$x > K$，$s > 1$，$c > 0$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \left\{ \{a_k\} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \left(\log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)^s \left(\log^{2\#} \frac{1}{|a_k|}\right)^c\right) < +\infty \right\},$$

ただし $\log^{1\#} x := \log^\# x$，$\log^{q\#} x := \log^\#(\log^{(q-1)\#} x)$，$q \geq 2$.

例 11 ある $K > 0$ が存在して，$\varphi_f(x) = x^s(\log^{q\#} x)$，$x > K$，$s > 1$，$q \in \mathbf{N}$ となる f について

$$\Lambda_2(f) = \left\{ \{a_k\} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \left(\log^\# \frac{1}{|a_k|}\right)^s \left(\log^{(q+1)\#} \frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}.$$

参考文献

[1] Chatterji, S.D. and Mandrekar, V. : Quasi-invariance of measures under translation. *Math. Z.*, **154** (1977) 19-29.

[2] Honda, A., Okazaki, Y. and Sato, H. : An L_p function determines ℓ_p. *Proc. Japan Acad.*, **84**, Ser. A (2008) 39-41.

[3] Kakutani, S. : On equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 214-224.

[4] Shepp, L.A. : Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *Ann. Math. Statist.* **36** (1965) 1107-1112.

[5] Zygmund, A., *Trigonometric series II.* Cambridge U.P. (Cambridge) 1959.