数理解析研究所講究録
第1667巻 2009年 121-128

The von Neumann-Jordan constant in the unit sphere of Banach Spaces

水口 洋康
新潟大学大学院自然科学研究科

1. Introduction

Jordan - von Neumann は1935年, 内積空間を中線定理を満たすノルム空間として特徴付けた論文の中で, 任意のBanach空間Xに対して

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq 2, \quad \forall(x,y) \neq (0,0)$$

となることを注意している. このことに関連しClarkson [4] は1937年にBanach空間の構造の度合いを表す次の概念を導入した.

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq C, \quad \forall(x,y) \neq (0,0)$$

を満たすCの最小値を *von Neumann-Jordan* (NJ) 定数といい, $C_{NJ}(X)$ と表記する. すなわち,

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \;\middle|\; x,y \in X \right\}$$

である. この定数について多くのことが研究されている. 例えば, Jordan - von Neumann はBanach空間に対しては $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ であることや, Hilbert空間であるための必要十分条件は $C_{NJ}(X)=1$ であることを示した. また, Clarkson [4] は, Clarksonの不等式を用いて L^p 空間のNJ定数を求めた. 更に斎藤-加藤-高橋 [6] は, 対応する凸関数によって $\mathbb{C}^2$ 上のabsolute normalized normのNJ定数を計算したり, 評価を与えたりした.

近年NJ定数に近い形をした定数が数多く定義，研究されそれらの定数の性質や関係：定数同士の間で成立する様々な不等式が示されている．例えば，G. Zbăganu[3] が

$$C_Z(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \;\middle|\; (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

という定数を定義し，NJ定数と一致すると予想したが，その予想は間違っていたことが証明されている ([2])．

そのような幾何学的定数の一つとして，J. Alonso, P. Martin - P. L. Papini ら [1] は次のものを考えた．

Definition 1.1. ([1]) Xを *Banach*空間とする．このとき単位球面上における*NJ*定数 $C'_{NJ}(X)$ を

$$C'_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{4} \;\middle|\; x,y \in S_X \right\}$$

のように定義する．

この報告では斎藤-加藤-高橋 [6] の考え方に基づいて，$\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm について $C'_{NJ}(X)$ の計算を与えることを目的とする．

2．C'$_{NJ}$(X) と C$_{NJ}$(X), J(X) の関係

まず定義より，明らかに

$$1 \leq C'_{NJ}(X) \leq C_{NJ}(X) \leq 2\ ,$$

$$\frac{J(X)^2}{2} \leq C'_{NJ}(X)$$

である．このことから $C'_{NJ}(X) < 2$ であることと X が uniformly non-square であることは同値である．また

$$\forall x,y \in S_X,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 4$$

が Hilbert 空間を特徴付ける [5] ので，$C'_{NJ}(X) = 1$ であることと X が Hilbert 空間であることが同値である．

J. Alonso, P. Martin - P. L. Papini は [1] において $C'_{NJ}(X)$ に関し，次の定理 2.1, 2.3 と命題 2.2 を示した．

Theorem 2.1. Xを *Banach*空間とする. このとき

$$C_{NJ}(X) \le 2\left(1 + C'_{NJ}(X) - \sqrt{2C'_{NJ}(X)}\right) \le 2\ .$$

Proposition 2.2. $\epsilon \in [0,2]$ をみたす ϵ に対し, 空間 X の凸性のモジュラス

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2}\ \middle|\ x, y \in S_X\ , \|x-y\| \ge \epsilon\right\}$$

をとる. このとき

$$C'_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\epsilon^2}{4} + (1-\delta_X(\epsilon))^2\ \middle|\ 0 \le \epsilon \le 2\right\}\ .$$

Proof.

$$\kappa = \sup\left\{\frac{\epsilon^2}{4} + (1-\delta_X(\epsilon))^2\ \middle|\ 0 \le \epsilon \le 2\right\}$$

とおく. 任意の $x, y \in S_X$ に対し,

$$\delta_X\left(\|x-y\|\right) \le 1 - \frac{\|x-y\|}{2}$$

であるから

$$\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} \le \frac{\|x-y\|^2}{4} + \left(1 - \delta_X(\|x-y\|)\right)^2 \le \kappa\ .$$

また任意の正の数 μ に対し $\|x-y\| = \epsilon$ かつ

$$1 - \frac{\|x+y\|}{2} \le \delta_X(\epsilon) + \mu$$

となる $x, y \in S_X$ が存在し,

$$C'_{NJ}(X) \ge \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} \ge \frac{\epsilon^2}{4} + (1-\delta_X(\epsilon)-\mu)^2$$

が成立する. 任意の μ に対しこれが成立するので $C'_{NJ}(X) \ge \kappa$ である. 従って, $C'_{NJ}(X) = \kappa$ である. □

Theorem 2.3. X を *Banach* 空間とする．このとき $C'_{NJ}(X) \leq J(X)$ ．

Remark 2.4. $[0,1]$ において $1+t-\sqrt{2t}$ は増加関数であるので，上記の結果より

$$C_{NJ}(X) \leq 2\left(1 + C'_{NJ}(X) - \sqrt{2C'_{NJ}(X)}\right) \leq 2\left(1 + J(X) - \sqrt{J(X)}\right) \leq 1 + \frac{J(X)^2}{4}$$

である．

3．C^2 における $C'_{NJ}(X)$

$\mathbb{C}^2$ 上の norm$\|\cdot\|$ が absolute であるとは，任意の $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\|(|z|,|w|)\| = \|(z,w)\|$$

が成立するときを言う．また，$\|\cdot\|$ が normalized であるとは $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ を言う．例えば，l_p-norm は absolute normalized である．AN_2 を $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm 全体とする． 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t,t)\| \ (0 \leq t \leq 1)$$

とおく．このとき ψ は [0,1] 上の連続凸関数で $\psi(0) = \psi(1) = 1$ かつ $\max(1-t,t) \leq \psi(t) \leq 1$ を満たす．このような関数の全体を Ψ_2 とする．任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(z,w)\|_\psi = \begin{cases} (|z|+|w|)\psi(\frac{|w|}{|z|+|w|}) & ((z,w) \neq (0,0)) \\ 0 & ((z,w) = (0,0)) \end{cases}$$

とおくと $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ かつ $\psi(t) = \|(1-t,t)\| \ (0 \leq t \leq 1)$ を満たす．従って AN_2 と Ψ_2 は 1 対 1 に対応する．

ψ, $\varphi \in \Psi_2$ に対し $\psi(t) \leq \varphi(t) \ (0 \leq \forall t \leq 1)$ が成立するとき $\psi \leq \varphi$ と表す．また，

$$\psi_2(t) = \|(1-t,t)\|_2 = \sqrt{(1-t)^2+t^2}, \quad M_1 = \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi(t)}{\psi_2(t)}, \quad M_2 = \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi_2(t)}{\psi(t)}$$

とする．斎藤-加藤-高橋 [6] は次の結果を与えた．

Theorem 3.1. $\psi \in \Psi_2$ をとる. $\psi \geq \psi_2$ ならば $C_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_1^2$, また, $\psi \leq \psi_2$ ならば $C_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_2^2$ が成立する.

Proof. $\psi \geq \psi_2$ のとき, 任意の $x, y \in (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ に対し

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\psi^2 + \|x-y\|_\psi^2 &\leq M_1^2\left(\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2\right) \\ &= 2M_1^2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right) \\ &= 2M_1^2\left(\|x\|_\psi^2 + \|y\|_\psi^2\right).\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\|x+y\|_\psi^2 + \|x-y\|_\psi^2}{2(\|x\|_\psi^2 + \|y\|_\psi^2)} \leq M_1^2 \quad .$$

従って, $C_{NJ}\left(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) \leq M_1^2$ である. また, $\psi(t)/\psi_2(t)$ が [0,1] 上連続であることから, $M_1 = \psi(t_1)/\psi_2(t_1)$ となる t_1 $(0 \leq t_1 \leq 1)$ が存在するので, この t_1 に対し $x_1 = (1-t_1, 0)$, $y_1 = (0, t_1)$ とおくと

$$\begin{aligned}\|x_1+y_1\|_\psi^2 + \|x_1-y_1\|_\psi^2 &= \|(1-t_1, t_1)\|_\psi^2 + \|(1-t_1, -t_1)\|_\psi^2 \\ &= 2\psi(t_1)^2 \\ &= 2M_1^2\psi_2(t_1)^2 \\ &= 2M_1^2\left((1-t_1)^2 + t_1^2\right) \\ &= 2M_1^2\left(\|x_1\|_\psi^2 + \|y_1\|_\psi^2\right).\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\|x_1+y_1\|_\psi^2 + \|x_1-y_1\|_\psi^2}{2(\|x_1\|_\psi^2 + \|y_1\|_\psi^2)} = M_1^2 \quad .$$

従って, $C_{NJ}\left(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_1^2$ である. $\psi \leq \psi_2$ のとき $C_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_2^2$ であることも同様に示すことができる. □

$C'_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right)$ について, 次のことが容易に分かる.

Proposition 3.2. $\psi \in \Psi_2$ が $\psi \leq \psi_2$ を満たすとき, $C'_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) = M_2^2$.

Proof. $\psi_2(t)/\psi(t)$ が [0,1] 上連続なので $M_2 = \psi_2(t_0)/\psi(t_0)$ を満たす t_0 $(0 \leq t_0 \leq 1)$ が存在する. この t_0 に対し

$$x_0 = \frac{1}{\psi(t_0)}(1-t_0, t_0),\ y_0 = \frac{1}{\psi(t_0)}(1-t_0, -t_0)$$

とおくと $\|x\|_\psi = \|y\|_\psi = 1$ で

$$\frac{\|x_0 + y_0\|_\psi^2 + \|x_0 - y_0\|_\psi^2}{4} = \frac{4(1-t_0)^2 + 4t_0^2}{4\psi(t_0)^2} = \frac{\psi_2(t_0)^2}{\psi(t_0)^2} = M_2^2.$$

従って, $C'_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) \geq M_2^2$ であり, また, $C'_{NJ}\left((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)\right) \leq C_{NJ}(X) = M_2^2$ であるから, $C'_{NJ}(X) = M_2^2$ を得る. □

$\psi \geq \psi_2$ の場合について考える.

Example 3.3.

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_2(t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ \left(2 - \sqrt{2}\right) t + \sqrt{2} - 1 & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とすると $\psi \in \Psi_2$, $\psi \geq \psi_2$ であり

$$\|(z,w)\|_\psi = \begin{cases} \sqrt{|z|^2 + |w|^2} & (|z| \geq |w|) \\ \left(\sqrt{2} - 1\right) |z| + |w| & (|z| \leq |w|) \end{cases}$$

である. このとき任意の $x, y \in S_{(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)}$ に対し $\|x+y\|_\psi = \|x+y\|_2$ または $\|x-y\|_\psi = \|x-y\|_2$ が成立する. $\|x+y\|_\psi = \|x+y\|_2$ のとき

$$\frac{\|x+y\|_\psi^2 + \|x-y\|_\psi^2}{4} \leq \frac{\|x+y\|_2^2 + M_1^2\|x-y\|_2^2}{4}.$$

$\|x\|_2 \leq \|x\|_\psi = 1$, $\|y\|_2 \leq \|y\|_\psi = 1$ なので

$$\frac{\|x+y\|_2^2 + M_1^2\|x-y\|_2^2}{4} \leq \frac{\|x+y\|_2^2 + M_1^2\|x-y\|_2^2}{2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)}.$$

$M_1 > 1$ より

$$\frac{\|x+y\|_2^2 + M_1^2\|x-y\|_2^2}{2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)} < \frac{M_1^2\left(\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2\right)}{2\left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2\right)} = M_1^2.$$

従って $(\|x+y\|_\psi^2 + \|x-y\|_\psi^2)/4 < M_1^2$ である. $\|x-y\|_\psi = \|x-y\|_2$ のときも同様に $(\|x+y\|_\psi^2 + \|x-y\|_\psi^2)/4 < M_1^2$ がわかるので $C'_{NJ}\left(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi\right) < M_1^2$ である.

このように $\psi \geq \psi_2$ のとき, $C'_{NJ}\left(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi\right) = M_1^2$ は必ずしも成立するわけではない. そこで $C'_{NJ}(X) = M_1^2$ が成立することの必要十分条件を与える.

Theorem 3.4. $\psi \geq \psi_2$ のとき,

$\psi(s) = \psi_2(s)$, $\psi(t) = \psi_2(t)$ で更に, 次の条件

$$(\quad)\ u = \frac{\psi(s)t + \psi(t)s}{\psi(s) + \psi(t)} \text{ に対し } M_1 = \frac{\psi(u)}{\psi_2(u)} = \frac{\psi(1-u)}{\psi_2(1-u)}$$

または

$$(\quad)\ v = \frac{\psi(s)t + \psi(t)s}{\psi(t) - (1-2t)\psi(s)} \text{ に対し } M_1 = \frac{\psi(v)}{\psi_2(v)} = \frac{\psi(1-v)}{\psi_2(1-v)}$$

を満たす s, t $(0 \leq s < t \leq 1)$ が存在するならば $C'_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2$ である.
逆に $C'_{NJ}(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi) = M_1^2$ ならば $\psi(s) = \psi_2(s)$, $\psi(t) = \psi_2(t)$ で (　) または (　) を満たす s, t $(0 \leq s < t \leq 1)$ が存在する.

また, 斎藤-加藤-高橋 [6] は ψ と ψ_2 の大小関係に関わらない結果として次の定理を与えている.

Theorem 3.5. $\psi \in \Psi_2$ が任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ について $\psi(t) = \psi(1-t)$ を満たし,

$$M_1 = \frac{\psi(1/2)}{\psi_2(1/2)} \quad \text{または} \quad M_2 = \frac{\psi_2(1/2)}{\psi(1/2)}$$

ならば $C_{NJ}((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)) = M_1^2 M_2^2$.

これに関し, $C'_{NJ}((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi))$ については次が成立する.

Proposition 3.6. $\psi \in \Psi_2$ が任意の t $(0 \leq t \leq 1)$ について $\psi(t) = \psi(1-t)$ を満たし, $M_1 = \psi(1/2)/\psi_2(1/2)$ ならば $C'_{NJ}((\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)) = M_1^2 M_2^2$.

参考文献

[1] J. Alonso, P. Martin and, P. L. Papini, Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach Spaces, Studia Math., 188(2)(2008), 135-150

[2] J. Alonso and, P. Martin, A counterexample for a conjecture of G.Zbâganu about the Neumann-Jordan constant, Rev., Roumaine Math. Pures Appl., 51(2006), 135-141.

[3] G. Zbăganu, An inequality of M. Rădulescu and S. Rădulescu which characterizes inner product spaces, Rev. Roumaine Math. Puers Appl., 47(2001), 253-257.

[4] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces, Ann. of Math., 38 (1937), 114-115.

[5] M. M. Day, Some characterizations of inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 320-337.

[6] K-S. Saito, M. Kato and,Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244 (2000), 515-532.

[7] K. Mitani and, K-S. Saito, The james constant of absolute norms on $\mathbb{R}^2$, J. Nonlinear Convex Analysis, 4(2003). 399-410.