

## グラスマン多様体内の全測地的部分多様体

九州大学大学院数理学研究院 長友康行 (Yasuyuki Nagatomo)  
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

ABSTRACT. グラスマン多様体内の全測地的部分多様体に対して既約型といわれる部分多様体を定義し、既約型全測地的部分多様体を分類する。その分類において既約型全測地的部分多様体と「ある性質をみたす表現空間」と「表現の指標、対称空間の標準的対合からなる積分公式により決定される自然数」との対応が示される。

また、既約型全測地的部分多様体を含む分解不可能な全測地的部分多様体を定義し、グラスマン多様体への調和写像に関する高橋型の定理を利用して、複素射影直線からの分解不可能な全測地的写像を分類する。

最後に、主定理を用いて、コンパクト型の対称空間への調和写像に対する「高橋型の定理」を確立する。

### 1. INTRODUCTION

標準的なリーマン計量をもつグラスマン多様体内のコンパクト全測地的部分多様体の分類問題を考察することにする。グラスマン多様体は対称空間なので、その全測地的部分多様体はまた、対称空間となる。代表的な例は平坦なトーラスだが、全測地的平坦トーラスは全測地的極大平坦トーラスに含まれるので、以後、コンパクト型の対称空間を対象とする。

**定理 1.1.** [2]  $(G, K)$  をコンパクト型の対称対であるとする。ただし、コンパクトリー群  $G$  は単連結であり、その閉部分群  $K$  は連結であるとする。

$f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を対称空間  $G/K$  から複素グラスマン多様体への既約型全測地的はめ込みであるとする。ただし、 $Gr_p(W)$  は複素ベクトル空間  $W$  内の  $p$  次元部分空間のなす複素グラスマン多様体である。

(i)  $\text{rank } G = \text{rank } K$  であるならば、 $W$  は完全既約  $G$  表現空間となり、整数  $p$  および  $q := \dim W - p$  は、次の積分公式をみたす。

$$(1) \quad \frac{(p-q)^2}{\dim W} = \int_G \chi_W(g\sigma(g^{-1})) dg,$$

ここで、 $\chi_W$  は表現  $W$  の指標であり、 $\sigma$  は対称対  $(G, K)$  の標準的対合である。また、 $dg$  は  $G$  の正規化された Haar 測度である。

(ii)  $\text{rank } G > \text{rank } K$  であるならば、 $W$  は完全既約  $G$  表現空間であるが、さらに以下の性質をみたす。 $W$  は既約  $G$  表現空間なので、 $G$  の分解  $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_\Lambda$  に応じて、 $W = W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_\Lambda$  とテンソル積表現として表すことができる。 $(G_\lambda, K_\lambda)$  を  $\text{rank } G_\lambda > \text{rank } K_\lambda$  なる既約なコンパクト型の対称対とする。このとき、対応する  $G_\lambda$  表現  $W_\lambda$  は表現として  $W_\lambda^*$  と同値でなければならない（このとき  $W_\lambda$  は自己共役な表現といわれる）。また、整数  $p$  および  $q := \dim W - p$  は、上の積分公式をみたす。

逆にどちらの場合でも、上の性質をみたす表現空間  $W$  と積分公式 (1) により定まる整数  $p, q$  に対して、 $W$  による誘導写像として既約型全測地的はめ込み  $f: G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を構成することができる。

**注意.**  $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_\Lambda$  の表現  $W = W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_\Lambda$  に対して、各  $W_\lambda$  が非自明な  $G_\lambda$  既約表現ならば、 $W$  を完全既約  $G$  表現であるという。その他の定理内の用語については次章以降で解説していく。

なお、本論文で展開される議論の詳細に関しては、[2] を参照していただきたい。

## 2. 準備

ここでは、グラスマン多様体の幾何学を復習し、グラスマン多様体への調和写像に対する「高橋型の定理」を紹介することにする。

まず、 $W$  を  $N$  次元実、もしくは複素ベクトル空間とし、 $W$  内の  $p$  次元部分空間からなるグラスマン多様体を  $Gr_p(W)$  とおく。 $(W$  が実ベクトル空間のときには  $W$  は向きを持つと仮定し、向きを込めた部分空間からなるグラスマン多様体も考えることにするが、記号が煩雑になることを避けるため、区別しないことにする。)

$S \rightarrow Gr_p(W)$  を同語反復ベクトル束とすれば、 $S \rightarrow Gr_p(W)$  は自然に  $W$  をファイバーとして持つ階数  $N$  の自明束  $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$  の部分束とみなせる。したがって、商ベクトル束として、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$  を得る。

$$0 \rightarrow S \xrightarrow{i_S} \underline{W} \xrightarrow{\pi_Q} Q \rightarrow 0.$$

ベクトル束  $Q \rightarrow Gr_p(W)$  を **普遍商束** ということにする。準同型  $\pi_Q: \underline{W} \rightarrow Q$  により、ベクトル空間  $W$  はまた、 $Q \rightarrow Gr_p(W)$  の切断のなす空間とみなせることに注意する。

ここで、 $W$  にその係数体に応じて、内積、もしくはエルミート積（簡単のため、以後スカラー積という）を入れる。スカラー積を利用すれば直交射影を定義できるので、ふたつのベクトル束の準同型を得ることができる。

$$\pi_S: \underline{W} \rightarrow S, \quad i_Q: Q \rightarrow \underline{W}.$$

ただし、後者では直交補ベクトル束  $S^\perp \rightarrow Gr_p(W)$  と  $Q \rightarrow Gr_p(W)$  を同一視している。すると二つのベクトル束  $S \rightarrow Gr_p(W)$  と  $Q \rightarrow Gr_p(W)$  にファイバー計量  $g_S$  と  $g_Q$  が定義される。

次に正規直交基底による自明束  $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$  の自明化を利用すれば、 $\underline{W} \rightarrow Gr_p(W)$  の切断を  $W$  に値をもつベクトル値関数とみなすことができる。そこで、通常の微分作用素  $d$  を利用することにより、ベクトル束  $S \rightarrow Gr_p(W)$  と  $Q \rightarrow Gr_p(W)$  に、それぞれ接続  $\nabla^S$  と  $\nabla^Q$  を導入することが可能となる。より詳しく見るために、 $s$  をベクトル束  $S \rightarrow Gr_p(W)$  の切断とすれば、 $s$  は  $W$  値関数  $i_S(s)$  と同一視できる。その微分  $di_S(s)$  は二つの成分に分解される。

$$di_S(s) = \pi_S di_S(s) + \pi_Q di_S(s).$$

実際に、 $\pi_S di_S(s)$  は接続  $\nabla^S s$  と一致し、それは標準接続にほかならない。もうひとつの成分  $\pi_Q di_S(s)$  はベクトル束の**第2基本形式**といわれる [1]。ベク

トル束の第2基本形式はベクトル束  $\text{Hom}(S, Q) \cong S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(W)$  に値を持つ1形式である。簡単のため、 $H := \pi_Q di_S$  とおく。

同様にして  $\nabla^Q = \pi_Q di_Q$  が成立し、第2基本形式を  $K := \pi_S di_Q$  とおく。 $K$  はベクトル束  $\text{Hom}(Q, S) \cong Q^* \otimes S \rightarrow Gr_p(W)$  に値を持つ1形式となる。

接ベクトル束は  $S^* \otimes Q \rightarrow Gr_p(W)$  と同一視できるので、誘導計量が与えられ  $Gr_p(W)$  はリーマン多様体となり、その Levi-Civita 接続は  $\nabla^S$  と  $\nabla^Q$  により誘導される接続と一致する。

次にリーマン多様体  $M$  から、グラスマン多様体への写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が与えられたとする。写像  $f$  により、グラスマン多様体上のベクトル束やその計量、接続、第2基本形式を引き戻すことにする。すると、この誘導接続と  $M$  のリーマン計量により、引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  の切断に作用するラプラス作用素  $\Delta$  が定義される。また、ベクトル空間  $W$  は、引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  の切断のなす集合ともみなせる。

ここで、第2基本形式  $H, K$  を使って、

$$A := \sum_{i=1}^n H_{e_i} K_{e_i} : f^*Q \rightarrow f^*Q$$

なるベクトル束としての準同型を定義し、**平均曲率作用素** ということにする。

さて、引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  は誘導接続に対して、一般にはホロノミー既約ではない。そこで、誘導接続のホロノミー群に対応する  $f^*Q \rightarrow M$  の部分束への分解

$$f^*Q = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$$

を  $f^*Q \rightarrow M$  のホロノミー分解ということにする。各部分束への直交射影を  $\pi_l : f^*Q \rightarrow V_l$  とおく。

**定義 2.1.** 任意の  $l = 1, 2, \dots, L$  に対して、 $\pi_l A = A \pi_l$  が成立しているときに、平均曲率作用素  $A \in \Gamma(\text{Hom } f^*Q)$  はホロノミー分解と**適合している**という。換言すれば、 $A$  がホロノミー分解と適合しているとは、ベクトル束の準同型として、

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_L, \quad A_l \in \Gamma(\text{Hom } V_l)$$

が成り立つことである。

すると次の定理を得る。

**定理 2.2.** [2] リーマン多様体  $(M, g)$  からグラスマン多様体への写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  に関する次の二つの条件は互いに同値である。

- (1)  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が調和写像であり、かつ平均曲率作用素  $A$  は平行である。
- (2)  $f^*Q \rightarrow M$  の次の性質をみたすホロノミー分解

$$f^*Q = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$$

が存在する。ここで、 $W$  は各  $V_l \rightarrow M, (l = 1, \dots, L)$  のラプラス作用素  $\Delta$  の固有値  $\mu_l$  に対する固有空間となり、平均曲率作用素  $A$  はホロノミー分解と適合している。

この条件の下、 $V_l \rightarrow M$  は  $A$  の固有値  $-\mu_l$  に対する固有空間となり、エネルギー密度関数  $e(f)$  は

$$2e(f)(x) = \sum_{l=1}^L q_l \mu_l,$$

をみます。ただし、 $q_l$  は  $V_l \rightarrow M$  の階数である。

### 3. 主定理

**定理 3.1.** [2] リーマン多様体  $M$  から、グラスマン多様体への写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が全測地的 ( $\nabla df = 0$ ) であるならば、 $\nabla A = 0$  となる。

この定理と定理 2.2 を組み合わせると、次の定理を得ることができる。

**定理 3.2.**  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が全測地的はめ込みであれば、引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  の次の性質をみます。ホロノミー分解

$$f^*Q = V_1 \oplus \cdots \oplus V_L$$

が存在する。ここで、 $W$  は各  $V_l \rightarrow M, (l = 1, \dots, L)$  のラプラス作用素  $\Delta$  の固有値  $\mu_l$  に対する固有空間となり、 $V_l \rightarrow M$  は平均曲率作用素  $A$  の固有値  $-\mu_l$  に対する固有空間となる。

また、 $V_l \rightarrow M$  は等質ベクトル束であり、その誘導接続は標準接続である。

**定義 3.3.** 写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  に対して、 $W$  から普遍商束の引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  の切断全体のなす空間  $\Gamma(f^*Q)$  への線形写像  $W \rightarrow \Gamma(f^*Q)$  が単射であるときに、 $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  を**充満な写像**であるという。

全測地的はめ込み  $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  は  $G$  同変なので、 $W$  は  $G$  表現空間となる。 $W$  が既約な  $G$  表現であるとき、 $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を**既約型全測地的はめ込み**という。

次に写像の分類が目的であるので、グラスマン多様体への写像を構成する方法を説明する。

$(M, g)$  をリーマン多様体として、 $V \rightarrow M$  を  $M$  上の階数が  $q$  の実または複素ベクトル束とする。また、 $W$  を  $\Gamma(V)$  の有限次元部分空間とする。すると、

$$\begin{aligned} ev : \underline{W} := M \times W &\rightarrow V, \\ (x, t) &\mapsto t(x) \end{aligned}$$

なるベクトル束の準同型を得る。

**定義 3.4.** ベクトル束の準同型  $ev : \underline{W} := M \times W \rightarrow V$  が全射準同型であるとき、ベクトル束  $V \rightarrow M$  は  $W$  によって**大域的に生成される**という。

ベクトル束  $V \rightarrow M$  が  $N$  次元空間  $W$  によって大域的に生成されているとする。 $p = N - q$  とおく。このとき、写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が以下のようにして構成される。任意の  $x \in M$  に対して、仮定から  $ev_x : W \rightarrow V_x$  は全射なので、 $\text{Ker } ev_x \subset W$  の次元は  $p$  となり、一定である。そこで、

$$f(x) := \text{Ker } ev_x = \{t \in W \mid t(x) = 0\}$$

とおけば、 $f$  は  $M$  からグラスマン多様体  $Gr_p(W)$  への写像となる。こうして得られた写像  $f$  を  $(V \rightarrow M, W)$  から得られた誘導写像という。なお、ベクトル束  $V \rightarrow M$  が明らかでない場合には、単に  $W$  による誘導写像ともいう。

**補題 3.5.**  $f$  が  $(V \rightarrow M, W)$  から得られた誘導写像であるならば、ベクトル束  $V \rightarrow M$  とグラスマン多様体の普遍商束の引き戻し束  $f^*Q \rightarrow M$  とは自然に同型となる。

したがって、逆に写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  が与えられているときには、 $f$  は  $(f^*Q \rightarrow M, W)$  による誘導写像とみなすことができる。このようにして、グラスマン多様体への任意の写像  $f : M \rightarrow Gr_p(W)$  は誘導写像とみなせる。

これで、主定理内のすべての用語の説明がすんだので、主定理と高橋型の定理 2.2 の応用を述べる。

全測地的はめ込み  $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  に対して、 $G$  表現空間としての直交直和分解  $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_L$  と  $p = p_1 + \cdots + p_L$  をみたす正整数  $p_1, \dots, p_L$  が存在して、

$$f : G/K \rightarrow Gr_{p_1}(W_1) \times \cdots \times Gr_{p_L}(W_L) \subset Gr_p(W),$$

各  $f_l : G/K \rightarrow Gr_{p_l}(W_l)$  は全測地的写像となるときに、 $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を分解可能写像という。そうでないときには、 $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を分解不可能写像という。

**補題 3.6.** 写像  $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  が既約型全測地的はめ込みであれば、 $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  は充満な分解不可能写像である。

**注意.** 上の補題の逆は一般に成立しない。反例を構成できる [2]。

充満かつ、分解不可能な全測地的はめ込みの分類に関しては次の結果が得られる。

**定理 3.7.** 複素射影直線から複素グラスマン多様体への写像  $f : CP^1 \rightarrow Gr_p(W)$  が充満かつ、分解不可能な全測地的はめ込みであれば、ある自然数  $k$  が存在し、 $W = S^k$  ( $S^k$  は  $SU(2)$  の既約表現  $S^k\mathbb{C}^2$  を表す) であり、

$$(2) \quad p = \begin{cases} l, & \text{if } k = 2l - 1 \\ l \text{ or } l + 1, & \text{if } k = 2l. \end{cases}$$

となる。さらに  $k$  が偶数であれば、 $f$  は  $Gr_p(S^k)$  の全実部分多様体  $Gr_p(S^{k^R})$  への充満かつ、分解不可能な全測地的はめ込みとみなせる。

逆に  $SU(2)$  の既約表現  $S^k$  に対して、充満かつ、分解不可能な全測地的はめ込み  $f : CP^1 \rightarrow Gr_p(S^k)$  を構成することができる。ただし、 $p$  は (2) により与えられる。

この定理の証明では、 $CP^1$  の等質ベクトル束の分類とその切断のなす空間のラプラス作用素に関する  $L^2$ -分解が完全に理解できるので、ラプラス作用素の各固有空間が既約となることが鍵となる。したがって充満かつ、分解不可能な全測地的はめ込みが既約型になることが示せる。

#### 4. コンパクト型対称空間に対する高橋型の定理

主定理 1.1 と同じく  $(G, K)$  をコンパクト型の対称対であるとする。ただし、コンパクトリー群  $G$  は単連結であり、その閉部分群  $K$  は連結であるとする。

リーマン多様体  $(M, g)$  から  $G/K$  への写像  $F : M \rightarrow G/K$  を考える。定理 1.1 で与えられる全測地的はめ込み  $f : G/K \rightarrow Gr_p(W)$  を利用すれば、合成写像  $f \circ F : M \rightarrow Gr_p(W)$  を得ることが出来る。このとき、

$$F : M \rightarrow G/K \text{ が調和写像} \iff f \circ F : M \rightarrow Gr_p(W) \text{ が調和写像}$$

が成立するので、グラスマン多様体への調和写像に関する「高橋型の定理」を“引き戻す”ことが可能となる。

その一般形を書くことは [2] に譲り、簡単な例を説明することにする。

対称対  $(G, K)$  に対応する直交対称代数を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$  とおく。  $\dim \mathfrak{k} = p$  とする。定理 1.1 から、  $i : G/K \rightarrow Gr_p(\mathfrak{g})$  なる全測地的はめ込みを得る。ここで、  $i$  は接ベクトル束  $G \times_K \mathfrak{m} \rightarrow G/K$  と Killing ベクトル場のなすベクトル空間  $\mathfrak{g}$  による誘導写像である。

**定理 4.1.** リーマン多様体  $(M, g)$  から  $G/K$  への写像  $f : M \rightarrow G/K$  に対する次の 2 条件は互いに同値である。

- (1)  $f : M \rightarrow G/K$  は調和写像である。
- (2)  $\mathfrak{g}$  を  $G/K$  の接ベクトル束の  $M$  への引き戻し束の切断のなす空間とみなす。このとき、任意の  $X \in \mathfrak{g}$  に対して、切断  $X$  の零点集合は切断  $\Delta X$  の零点集合の部分集合となる。ただし、  $\Delta$  は引き戻し束の誘導接続と  $M$  のリーマン構造によるラプラス作用素である。

これらの条件の下、任意の  $X \in \mathfrak{g}$  に対して、

$$\Delta X = -AX, \quad 2e(f) = -\text{trace } A,$$

が成り立つ。ここで、  $A$  は  $(T(G/K) \rightarrow G/K, \mathfrak{g})$  に対する平均曲率作用素であり、  $e(f)$  は写像  $f$  のエネルギー密度関数である。

#### REFERENCES

- [1] S.Kobayashi, “Differential Geometry of Complex Vector Bundles”, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Tokyo (1987)
- [2] Y.Nagatomo, Harmonic maps into Grassmannian manifolds, a preprint

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 744 MOTOOKA, NISHIKU, FUKUOKA 819-0395, JAPAN

*E-mail address:* nagatomo@math.kyushu-u.ac.jp