数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 43-52

幾何学的量の近似和の収束の速さ

山川美緒 (Mio Yamakawa)
筑波大学・数理物質科学研究科　博士前期課程 2 年

1　Introduction

「収束の速さ」というテーマの研究はこれまでにいくつか成されており、例えば chui[1] や田崎氏 [2] による「Riemann 積分の近似和の収束の速さ」や Gleason による「曲線の長さの近似和の収束の速さ [3]」などがある。

今回のテーマは、「幾何学的量の近似和の収束の速さ」であるが、「幾何学的量」とは「回転面の面積」と曲線の弾性エネルギーである「曲線の曲率の二乗の積分」のことである。我々は実測に応用したいという観点から、関数の値だけで近似和を作り、その収束の速さについて研究してきた。

この研究の大きな目標の一つは、「一般の曲面の面積の近似和が収束するためにはどんな条件が必要なのか」を明らかにすることである。一般に曲面の面積の多面体による近似和は曲面の面積に収束しない（シュワルツの提灯）。この研究を通して上記の問題を解決する糸口になればと思っている。

2　回転面の面積の近似和の収束の速さ [4]

この研究は小瀬高校の五来結里子氏と、筑波大学の田崎博之氏との共同研究に基づくものである。

2.1　Preliminaries

$[a,b] \subset \mathbf{R}$ 上定義された C^4 級関数 f を考える。$[a,b]$ 上で $f > 0$ とすると、$y = f(x)$ を母線とする回転面は

$$\{(x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta) | a \le x \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

と表される。この回転面の面積を S とする。

また、$[a,b]$ の分割 Δ を

$$\Delta : a = s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_{n-1} \le s_n = b$$

と定める。分割 Δ に対して定まる曲線 $y=f(x)$ の近似折れ線を回転させてできる円錐面による回転面の面積 S の近似和を $S(\Delta)$ とする。

回転面の母線関数 $f(x)$ に対して新たに $[a,b]$ 上で決まる関数 φ を

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}f''(x)\{(f'(x))^2+1\}^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}f(x)(f''(x))^2\{(f'(x))^2+1\}^{-\frac{3}{2}}$$

とする。

Definition 2.1. $[a,b]$ の分割 Δ に対して、**分割の幅** $d(\Delta)$ を

$$d(\Delta)=\max\{s_i-s_{i-1}|1\leq i\leq n\}$$

とし、分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty})=\limsup_{n\to\infty} nd(\Delta_n)$$

と定める。以後簡単のため、$e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty})=e(\Delta_n)$ とかく。

$e(\Delta_n)$ の簡単な性質として次のようなものがあげられる。

- $b-a\leq e(\Delta_n)\leq\infty$
- $e(\Delta_n)<\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(\Delta_n)=0$

2.2 Results

Theorem 2.2. $[a,b]\subset \mathbf{R}$ の任意の n 分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、次が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty} n^2|S-S(\Delta_n)|\leq\frac{\pi}{3}e(\Delta_n)^3\max_{a\leq x\leq b}|\varphi(x)|.$$

特に、$e(\Delta_n)<\infty$ のとき次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} S(\Delta_n)=S.$$

Definition 2.3. 自然数 n を固定したとき $|S-S(\Delta)|$ が最小になる n 分割を $\Delta_n^\sharp$ とかき、**最適分割**と呼ぶ。

Theorem 2.4. $\varphi>0$ のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty} n^2|S-S(\Delta_n^\sharp)|\leq\frac{\pi}{3}\left(\int_a^b\varphi(x)^{\frac{1}{3}}dx\right)^3.$$

Theorem 2.5. 回転面が凸、つまり $f''<0$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} n^2(S-S(\Delta_n^\sharp))=\frac{\pi}{3}\left(\int_a^b\varphi(x)^{\frac{1}{3}}dx\right)^3.$$

が成り立つ。

2.3 Proofs

回転面の面積 S と, 一般の分割 Δ_n によって得られる各円錐面の面積の和 $S(\Delta_n)$ は次の式で与えられる。

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\ \sqrt{(f'(x))^2+1}\ dx$$

$$S(\Delta_n) = 2\pi \sum_{n=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(f(s_{i-1}) + \frac{f(s_i)-f(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}}(x - s_{i-1}) \right) \sqrt{\left(\frac{f(s_i)-f(s_{i-1})}{s_i - s_{i-1}} \right)^2 + 1}\ dx$$

以下、$[p,q] \subset [a,b]$ について考える。区間 $[p,q]$ での回転面の面積と近似円錐台の表面積の誤差を 2π で割って $F(p,q)$ とおくと、

$$F(p,q) = \int_p^q f(x)\ \sqrt{(f'(x))^2+1}\ dx - \int_p^q \left(f(p) + \frac{f(q)-f(p)}{q-p}(x-p) \right) \sqrt{\left(\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \right)^2 + 1}\ dx.$$

$F(p,q)$ の $q=p$ における 0 階、1 階、2 階 微分は 0 になり、Taylor の公式を使うとある $c \in (p,q)$ が存在して、次のように展開できる。

$$F(p,q) = \frac{1}{3!}\ \left.\frac{\partial^3 F(p,q)}{\partial q^3}\right|_{q=p} (q-p)^3 + \frac{1}{4!}\ \left.\frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=c} (q-p)^4$$

3 階微分を $\varphi(p)$ とおくと、

$$\varphi(p) = \left.\frac{\partial^3 F(p,q)}{\partial q^3}\right|_{q=p} = -\frac{1}{2}\ f''(p) \left\{ (f'(p))^2+1 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\ f(p)(f''(p))^2 \left\{ (f'(p))^2+1 \right\}^{-\frac{3}{2}}$$

である。

Proof of Theorem2.2.

$$\frac{1}{4!} \left| \left.\frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=c} \right|$$

は部分区間 $[p,q]$ に依存しない定数 M で押さえられる。

$[a,b] \subset \mathbf{R}$ の任意の n 分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、回転面の面積と近似円錐面の誤差は、

$$|S - S(\Delta_n)| = 2\pi\ \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{3!}\varphi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1})^3 + \frac{1}{4!}\ \frac{\partial^4 F}{\partial s_i^4}(s_i, \xi)\ (s_i - s_{i-1})^4 \right\} \right|$$

となる。

$$\begin{aligned} n^2|S - S(\Delta_n)| &\le 2\pi\ n^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \frac{1}{3!}\varphi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1})^3 \right| + \left| \frac{1}{4!}\ \frac{\partial^4 F}{\partial s_i^4}(s_i, \xi)\ (s_i - s_{i-1})^4 \right| \right) \\ &\le \frac{\pi}{3} \max_{[a,b]} |\varphi|\ n^2 \sum_{i=1}^{n} d(\Delta_n)^3 + \frac{\pi}{12} M\ n^2 \sum_{i=1}^{n} d(\Delta_n)^4 \\ &\le \frac{\pi}{3} \max_{[a,b]} |\varphi|\ n^3 d(\Delta_n)^3 + \frac{\pi}{12} M\ n^3 d(\Delta_n)^4 \end{aligned}$$

となるので、

$$\limsup_{n\to\infty} n^2|S - S(\Delta_n)| \leq \frac{\pi}{3} e(\Delta_n)^3 \max_{[a,b]} |\varphi|$$

を得る。 □

Proof of Theorem2.4. 計算により、部分区間 $[p, q]$ に依存しない定数 N を用いて上から次のように評価できる。

$$\left| \left. \frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4} \right|_{q=c} \right| \leq \max_{[p,q]} \{(f')^2 + 1\}^{-\frac{1}{2}} N$$

また、ある $N' > 0$ が存在して

$$\max_{[p,q]} \left\{(f)^2 + 1\right\}^{-\frac{1}{2}} \leq N' \max_{[p,q]} \varphi \cdots (*)$$

が成り立つ。

Lemma 2.6 (Gleason[3]). $\Phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ は $\forall t \in [a,b]$ に対して $\Phi(t) \geq 0$ かつ連続とする。このとき、全ての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して

$$(s_i - s_{i-1}) \max_{[s_{i-1}, s_i]} \Phi$$

が等しくなるような分割 $\Delta_n^G : a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b$ が存在して、$(s_i - s_{i-1}) \max_{[s_{i-1}, s_i]} \Phi = J_n$ とおくと、次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} nJ_n = \int_a^b \Phi(t)dt$$

任意の $[a,b]$ の分割 Δ_n に対して、各 i ごとに $s_i' \in [s_{i-1}, s_i]$ が存在して、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} n^2 (S - S(\Delta_n)) &= 2\pi n^2 \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{1}{3!} \varphi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1})^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4} \right|_{q=s_i'} (s_i - s_{i-1})^4 \right) \\ &= \frac{\pi}{3} n^2 \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1})^3 + \frac{\pi}{12} n^2 \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial^4 F(p,q)}{\partial q^4} \right|_{q=s_i'} (s_i - s_{i-1})^4 \end{aligned}$$

そこで、$(\varphi)^{\frac{1}{3}}$ に Lemma2.6 を適用すると、分割 Δ_n^G に対して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}n^2\sum_{i=1}^{n}\varphi(s_{i-1})(s_i-s_{i-1})^3 &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}n^2\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(s_{i-1})^{\frac{1}{3}}(s_i-s_{i-1})\right)^3\\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}n^2\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{[s_{i-1},s_i]}\varphi^{\frac{1}{3}}(s_i-s_{i-1})\right)^3\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}n^2\sum_{i=1}^{n}(J_n)^3 = \frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}(nJ_n)^3\\
&= \frac{\pi}{3}\left(\int_a^b(\varphi(t))^{\frac{1}{3}}dt\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi}{12}n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^4F(p,q)}{\partial q^4}\bigg|_{q=s_i'}(s_i-s_{i-1})^4\right| &\le \frac{\pi}{12}n^2\sum_{i=1}^{n}\max_{[p,q]}\{(f')^2+1\}^{-\frac{1}{2}}N(s_i-s_{i-1})^4\\
&\le \frac{\pi}{12}n^2\sum_{i=1}^{n}N'\max_{[p,q]}\varphi N(s_i-s_{i-1})^4\\
&= \frac{\pi NN'}{12}n^2(J_n)^3\sum_{i=1}^{n}(s_i-s_{i-1})\\
&= \frac{\pi NN'}{12}(b-a)(nJ_n)^3\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\pi}{12}n^2\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^4F(p,q)}{\partial q^4}\right|_{q=s_i'}\right|(s_i-s_{i-1})^4\Bigg| \le \lim_{n\to\infty}\frac{\pi NN'}{12}(b-a)(nJ_n)^3\,\frac{1}{n} \;=\; 0$$

以上より、

$$\limsup_{n\to\infty}n^2\left|S-S(\Delta_n^G)\right| \le \frac{\pi}{3}\left(\int_a^b\varphi(t)^{\frac{1}{3}}dt\right)^3$$

を得る。最適分割 $\Delta_n^\sharp$ に対して $|S-S(\Delta_n^\sharp)|\le|S-S(\Delta_n^G)|$ が成り立つので定理の主張は成り立つ。 □

Proof of Theorem2.5.

Lemma 2.7. $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ は C^4 級とし、さらに $f''(x)<0,$ を満たすとすると、任意の n 分割 Δ_n に対して

$$\liminf_{n\to\infty}n^2(S-S(\Delta_n)) \ge \frac{\pi}{3}\left(\int_a^b\varphi(x)^{\frac{1}{3}}dx\right)^3$$

が成り立つ。

この補題より、定理 2.5 の証明を得る。 □

3 曲線の曲率の二乗の積分の近似和の収束の速さ

この研究は東京理科大学の榎本一之氏との共同研究に基づくものである。

3.1 Preliminaries

このノートでは、Euclid 空間の曲線の曲率の二乗の積分の近似和について考察する。$x : [a, b] \to E$ を Euclid 空間 E 内の曲線の弧長パラメータ表示とする。

区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq s_n = b$$

に対して、s_{i-1}, s_i の中点を c_i で表す。Δ の幅を $d(\Delta) = \max\{s_i - s_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ で定める。三点 $x(s_{i-1}), x(c_i), x(s_i)$ を通る円の半径を r_i で表し、

$$K(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^2}(s_i - s_{i-1})$$

によって $\int_a^b \kappa(s)^2 ds$ の近似和 $K(\Delta)$ を定める。区間 $[a, b]$ の n 分割の列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}) = \limsup_{n\to\infty} nd(\Delta_n)$$

によって $e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty})$ を定める。

自然数 n を固定する。区間 $[a, b]$ の n 分割の集合 $\mathcal{D}$ はコンパクトである。また、$\Delta \in \mathcal{D}$ に対して関数 $\Delta \mapsto \left|\int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta)\right|$ を考えると、この関数は連続である。コンパクト集合上の連続関数は最小値を持つ。この関数の最小値をとる分割を $\Delta_n^\sharp$ とおき、これを近似和 $K(\Delta)$ の値が最も $\int_a^b \kappa(s)^2 ds$ の値に近いという意味で最適分割という。

3.2 Results

Theorem 3.1. $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 $[a, b]$ の n 分割の列とする。$e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$ を仮定すると、次の不等式が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 \left|\int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n)\right| \leq \frac{1}{24} \max_{a\leq t\leq b} |\alpha(t)| e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty})^3.$$

ここで、$\alpha(t) = x''(t) \cdot x^{(4)}(t) + 2||x'''(t)||^2 - ||x''(t)||^4 \quad (a \leq t \leq b)$ とする。特に、次の等式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} K(\Delta_n) = \int_a^b \kappa(s)^2 ds.$$

Remark 3.2. ただし、x が空間曲線のとき、

$$\alpha(t) = \kappa(s)^2\tau(s)^2 + 2\kappa'(s)^2 + \kappa(s)\kappa''(s)$$

とかける。

Theorem 3.3. $\Delta_n^\sharp$ を区間 $[a,b]$ の最適分割とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 \left| \int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n^\sharp) \right| \leq \frac{1}{24} \left(\int_a^b |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} \right)^3 .$$

Theorem 3.4. $\Delta_n^\sharp$ を区間 $[a,b]$ の最適分割とする。各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \kappa(s)^2 ds \geq \frac{1}{r_i^2}$$

が成り立つとき、次の等式が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 \left| \int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n^\sharp) \right| = \frac{1}{24} \left(\int_a^b |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} \right)^3 .$$

3.3 Proofs

Proof of Theorem3.1. 曲率の二乗の局所的な積分を h で展開する。$x''(s+t)$ を展開すると、

$$x''(s+t) = x''(s) + x'''(s)\ t + x^{(4)}(s)\ \frac{t^2}{2} + \mathcal{R}(t)$$

となる。但し、$||\mathcal{R}(t)|| \leq \mathcal{M}\ |t|^3$ である。よって、$\kappa(s+t)^2$ の展開は、

$$\begin{aligned}\kappa(s+t)^2 &= x''(s+t)\cdot x''(s+t)\\ &= x''(s)\cdot x''(s)\ +\ 2x''(s)\cdot x'''(s)\ t\ +\ (x''(s)\cdot x^{(4)}(s) + ||x'''(s)||^2)\ t^2\ +\ \mathcal{R}'(t)\\ &|\mathcal{R}'(t)| \leq \mathcal{M}'\ |t|^3\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}&\int_{s-h}^{s+h} \kappa(t)^2 dt = \int_{-h}^{h} \kappa(s+t)^2 dt\\ &= \int_{-h}^{h} \{\kappa(s)^2\ +\ 2x''(s)\cdot x'''(s)t\ +\ (x''(s)\cdot x^{(4)}(s) + ||x'''(s)||^2)t^2\ +\ \mathcal{R}'(t)\}dt\\ &= \kappa(s)^2 2h\ +\ (x''(s)\cdot x^{(4)}(s) + ||x'''(s)||^2)\ \frac{2}{3}h^3 + \mathcal{R}''(h).\end{aligned}$$

$|\mathcal{R}''(h)|\ \leq\ \mathcal{M}''\ \ |h|^4$ である。研究ノート「曲線と曲率の局所近似」の結果より、$x(s-h), x(s), x(s+h)$ を通る円の半径を $r_s(h)$ とすると、

$$\frac{1}{r_s(h)^2} = ||x''(s)||^2 + \frac{1}{6}(x^{(4)}\cdot x'' + ||x''||^4)h^2 + R'''(h) \qquad ||R'''(h)|| \leq \mathcal{M}'''|h|^3$$

であるから、両辺に $2h$ をかけて

$$\frac{1}{r_s(h)^2}\ 2h = \kappa(s)^2\ 2h + \frac{1}{3}(x''(s)\cdot x^{(4)}(s) + |x''(s)|^4)h^3 + R'''(h)2h$$

となる。したがって、区間 $[s-h, s+h]$ での局所的評価は、

$$\begin{aligned}
&\int_{s-h}^{s+h} \kappa(t)^2 dt - \frac{1}{r_s(h)^2}\ 2h \\
&= \left(\frac{1}{3}\ x''(s)\cdot x^{(4)}(s) + \frac{2}{3}||x'''(s)||^2 - \frac{1}{3}||x''(s)||^4\right) h^3 + \mathcal{R}''''(h) \\
&= \frac{1}{3}\ \alpha(s)\ h^3 + \mathcal{R}''''(h) \qquad |\mathcal{R}''''(h)| \le \mathcal{M}''''\ |h|^4
\end{aligned}$$

となる。

次に局所的評価を利用して定理の証明をする。$c_i = \dfrac{s_{i-1}+s_i}{2}$ とおく。

$$\begin{aligned}
&n^2 \left| \int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n) \right| \\
&= n^2 \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{3}\ \alpha(c_i)\ \frac{1}{8}\ (s_i - s_{i-1})^3 + \mathcal{T}(s_{i-1}, s_i) \right\} \right| \qquad |\mathcal{T}(s_{i-1}, s_i)| \le \mathcal{N}\ |s_i - s_{i-1}|^4 \\
&\le \frac{n^2}{24} \sum_{i=1}^{n} |\alpha(c_i)|\, (s_i - s_{i-1})^3 + n^2 \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}(s_{i-1}, s_i)| \\
&\le \frac{1}{24} \max_{a\le t\le b} |\alpha(t)|\, n^3 d(\Delta_n)^3 + \mathcal{N} n^3 d(\Delta_n)^4
\end{aligned}$$

両辺の上極限をとる。仮定より $e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$ だから、$\lim_{n\to\infty} d(\Delta_n) = 0$ となるので、

$$\limsup_{n\to\infty} n^2 \left| \int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n) \right| \le \frac{1}{24} \max_{a\le t\le b} |\alpha(t)|\, e(\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty})^3$$

を得る。 □

Proof of Theorem3.3. $|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}$ に Lemma2.6 を適用すると、ある分割 $\Delta_n^G : a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n$ が存在して、全ての $1 \le i \le n$ に対して、

$$J_n = \max_{[s_{i-1}, s_i]} |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} (s_i - s_{i-1})$$

は全て同じ値をとる。さらに、

$$\lim_{n\to\infty} nJ_n = \int_a^b |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} ds$$

が成り立つ。

ここで、ある i に対して、$\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}=0$ とすると、$J_n=0$ となるので、全ての i に対して $\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}=0$ となる。したがって、全ての i に対して $\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}\neq 0$ か $\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}=0$ の二つに場合分けされる。
（１）全ての $i(1\leq i\leq n)$ に対して $\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}\neq 0$ のとき

ある $\mathcal{N}>0$ に対して

$$|\mathcal{T}(s_{i-1},s_i)|\leq \mathcal{N}(s_i-s_{i-1})^4$$

が成り立つことを思い出しておこう。

このとき、$\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|>0$ であるから、ある $\epsilon_i>0$ が存在して、$\epsilon_i\leq\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|$ である。$\epsilon=\min\{\epsilon_i|1\leq i\leq n\}$ とすると、全ての $i(1\leq i\leq n)$ に対して、$\epsilon\leq\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|$ となる。よって

$$\mathcal{N}\epsilon\leq\mathcal{N}\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|\,,\quad \mathcal{N}\leq\frac{\mathcal{N}}{\epsilon}\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|$$

が成り立つので、

$$|\mathcal{T}(s_{i-1},s_i)|\leq\mathcal{N}(s_i-s_{i-1})^4\leq\frac{\mathcal{N}}{\epsilon}\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|(s_i-s_{i-1})^4.$$

ここで、$\frac{\mathcal{N}}{\epsilon}=\mathcal{A}$ とおけば、

$$|\mathcal{T}(s_{i-1},s_i)|\leq\mathcal{A}\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|(s_i-s_{i-1})^4$$

となる。以上を用いて、曲線の曲率の二乗の積分と Gleason 分割 Δ_n^G に対する近似和 $K(\Delta_n^G)$ との誤差の絶対値に n^2 をかけたものを上から評価すると、

$$\begin{aligned}
n^2\left|\int_a^b\kappa(s)^2-K(\Delta_n^G)\right| &= n^2\left|\sum_{i=1}^n\frac{1}{3}\alpha(c_i)\,\frac{1}{8}(s_i-s_{i-1})^3+\mathcal{T}(s_{i-1},s_i)\right|\\
&\leq n^2\sum_{i=1}^n\frac{1}{24}|\alpha(c_i)|(s_i-s_{i-1})^3+n^2\sum_{i=1}^n|\mathcal{T}(s_{i-1},s_i)|\\
&\leq\frac{n^2}{24}\sum_{i=1}^n\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|(s_i-s_{i-1})^3+n^2\sum_{i=1}^n\mathcal{A}\max_{[s_{i-1},s_i]}|\alpha(t)|(s_i-s_{i-1})^4\\
&=\frac{1}{24}(nJ_n)^3+\mathcal{A}(nJ_n)^3(b-a)\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

となる。

$$\left|\int_a^b\kappa(s)^2-K(\Delta_n^\sharp)\right|\leq\left|\int_a^b\kappa(s)^2-K(\Delta_n^G)\right|$$

であることから、最適分割 $\Delta_n^\sharp$ に対して

$$\limsup n^2\left|\int_a^b\kappa(s)^2-K(\Delta_n^\sharp)\right|\leq\frac{1}{24}\left(\int_a^b|\alpha(t)|^{\frac{1}{3}}dt\right)^3$$

が成り立つ。

（2） 全ての $i(1 \leq i \leq n)$ に対して $\max_{[s_{i-1},s_i]} |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} = 0$ のとき

このとき、$|\alpha(t)| > 0$ より、$[a,b]$ 上で $|\alpha(t)| = 0$ である。

Theorem3.1 を適用すると、

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left| \int_a^b \kappa(s)^2 ds - K(\Delta_n) \right| \leq 0$$

である。また、

$$\frac{1}{24} \left(\int_a^b |\alpha(t)|^{\frac{1}{3}} dt \right)^3 = 0$$

であるから、Theorem3.3 の主張は成り立つ。 □

Proof of Theorem3.4. Theorem2.5 と同様にして証明できる。 □

参考文献

[1] Charles K.Chui, Concerning rates of convergence of Riemann sums, Journal of Approximation Theory 4(1971)279-287.

[2] Hiroyuki Tasaki, Convergence rates of approximate sums of Riemann integrals, to appear in Journal of Approximation Theory, DOI :10.1016/ j.jat.2008.10.005

[3] Andrew M. Gleason, A curvature formula, Amer. J. Math. 101 (1979), 86–93.

[4] Yuriko Gorai, Hiroyuki Tasaki, and Mio Yamakawa, Convergence rates of approximate sums of the areas of surfaces of revolution, Tsukuba journal of mathematics