数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 97-110

ラグランジュ平均曲率流とシンプレクティック面積
Lagrangian mean curvature flow and symplectic area

赤穂まなぶ
首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

1. はじめに

本稿では, ケーラー・アインシュタイン多様体のなかの, 平均曲率流方程式に従って変形するラグランジュ部分多様体の族と, それらに境界値をもつ境界付きリーマン面からの滑らかな写像のシンプレクティック面積の振る舞いについて考える.

まずここでは平均曲率流方程式という時間発展型方程式に従うリーマン多様体へのはめ込みの変形について考える. 一般に平均曲率流方程式は時間大域解を持たない. つまり, はめ込みを平均曲率流方程式に従って変形してゆくと, 一般に有限時間ではめ込みでなくなる. 本来は, このはめ込みでなくなる時間の上下からの評価を試みたいのだが, それはなかなか難しい. そこで代わりに, 埋め込みからスタートする平均曲率流方程式に従う埋め込みの変形が, 埋め込みでなくなる時間の上からの評価を与えることを試みる.

例えば, ユークリッド空間における余次元 1 の閉部分多様体からスタートする平均曲率流方程式に従う埋め込みの変形の, 埋め込みでなくなる時間を上から評価する方法の一つとして, その閉部分多様体によって囲まれる領域の体積を調べるというものがある. つまり, 余次元 1 の閉部分多様体を変形していったとき, ある時刻に囲まれる領域の体積が (形式的に)0 であることがわかれば, それは少なくとも変形がその時刻までに埋め込みでなくなっていることを意味する.

平均曲率流方程式に従って変形するラグランジュ部分多様体の族において, この囲まれる領域の体積に対応するものは, ラグランジュ部分多様体に境界値を持つ, 境界付きリーマン面からの写像のシンプレクティック面積である. 本稿では, このシンプレクティック面積の振る舞いを詳しく調べ, その応用としてケーラー・アインシュタイン多様体における単調ラグランジュ部分多様体の平均曲率流方程式に従う変形とフレアー理論との関係について一考察を述べる.

2. 平均曲率ベクトル

ここでは平均曲率ベクトルについて復習をする. M を多様体, g を M 上のリーマン計量, ∇ を g に関するレビ-チビタ接続とする. また $f: N \to M$ をはめ込みとし, 何も断らない限り, f の像 $f(N)$ も同じく N と書くことにする.

今, M にはリーマン計量が備わっているので, N の各点 p において T_pM の直交分解

$$T_pM = T_pN \oplus (T_pN)^{\perp}$$

が得られる. ただし $(T_pN)^{\perp}$ は T_pM における T_pN の直交補空間である. そこでこの直交分解を用いて第 2 基本形式を定義する.

定義 2.1.（第 2 基本形式） V, W を $p \in N$ の周りで定義された TN の切断とする. そのとき第 2 基本形式 $B(\cdot,\cdot)$ を

$$B(V,W) := (\nabla_V W)^{\perp}$$

と定義する.

第 2 基本形式 $B(\cdot,\cdot)$ の定義式には微分が現れているが, 実は $B(\cdot,\cdot)$ は対称テンソルである. つまり V, W の微分に依存しない.

次に平均曲率ベクトルを定義する.

定義 2.2. (平均曲率ベクトル) N の各点 p において平均曲率ベクトルを

$$H_p := \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

と定義する. ただし $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は T_pN の正規直交基底とする.

平均曲率ベクトルの定義は, もちろん正規直交基底の選び方に依存しない.

ここで平均曲率ベクトルの簡単な例を一つ見てみよう.

例 2.3. $M = \mathbb{R}^2$ 上に標準的なリーマン計量 $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ を考え, $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ とする. このとき $\mathbb{R}^2$ の極座標の動径方向を r とすると, $p \in N$ における平均曲率ベクトル H_p は

$$H_p = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p$$

となる.

平均曲率ベクトルは, 体積汎函数の第一変分公式に現れる.

定理 2.4. (第一変分公式) M を多様体, g を M 上のリーマン計量とする. また N を閉多様体とし, $f : N \to M$ をはめ込みとする. そのとき f による g の引き戻し f^*g から誘導される N の体積を

$$\mathrm{Vol}(f) := \int_N \mathrm{vol}_{f^*g}$$

で定義する. ただし vol_{f^*g} は f^*g に関する N の体積要素である. 次に, $\{f_t : N \to M\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ を $f_0 = f$ となるはめ込みの滑らかな族とする. そのとき $t = 0$ における体積汎函数 Vol の第一変分は

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(f_t)_{|t=0} = \int_N g(-H, \frac{df_t}{dt}_{|t=0})\mathrm{vol}_{f^*g}$$

となる.

ここで N から M へのはめ込み全体 $\mathcal{F}$ を無限次元多様体と見なすと, $f : N \to M$ における $\mathcal{F}$ の接空間 $T_f\mathcal{F}$ は $C^\infty(f^*TM)$ であり, $\mathcal{F}$ 上のリーマン計量 G を $G(\xi,\zeta) := \int_N g(\xi,\zeta)\mathrm{vol}_{f^*g}$, $\xi,\zeta \in T_f\mathcal{F}$, で定義すると, 体積汎函数の第一変分公式は, マイナスの平均曲率ベクトル場 $-H \in T_f\mathcal{F}$ が体積汎函数の $f \in \mathcal{F}$ における勾配ベクトルになっていることを意味している.

この第一変分の観点から, 体積汎函数の臨界点に対応する部分多様体は極小部分多様体とよばれ, 第一変分公式よりその定義は $H \equiv 0$ と同値である.

定義 2.5. (極小部分多様体) 平均曲率ベクトル場が消えている部分多様体, つまり $H \equiv 0$ となる部分多様体を極小部分多様体とよぶ.

3. 平均曲率流

ここでは平均曲率流方程式について復習をする.

定義 3.1. (平均曲率流方程式) $f : N \to M$ をはめ込み, $\{f_t : N \to M\}_{t\in[0,T)}$ をはめ込みの滑らかな族とする. このとき

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

を平均曲率流方程式とよぶ. ただし H_t は $f_t : N \to M$ の平均曲率ベクトル場である.

平均曲率ベクトル場は $\mathcal{F}$ 上の体積汎函数のマイナス勾配ベクトルを与えるので, 平均曲率流方程式に従うはめ込みの変形は, 体積が最も効率よく減少する変形となっている.

例 3.2. $M = \mathbb{R}^2$ 上に標準的なリーマン計量 $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ を考えたときの, $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ を初期値 f の像とする平均曲率流方程式の解 f_t の像 N_t は

$$N_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2 - 2t\}$$

となる.

例からもわかるように, 一般に平均曲率流方程式は, 時間パラメーター t について $t = +\infty$ まで解が存在するとは限らない. そこで次のような量を導入する.

定義 3.3. $T_s \in [0, +\infty]$ を次で定義する:

$$T_s := \sup_T \left\{ T \in [0, +\infty] \;\middle|\; \begin{array}{l} \{f_t : N \to M\}_{t \in [0,T)} \text{は平均曲率流} \\ \text{方程式の解で各 } f_t \text{ が滑らか.} \end{array} \right\}$$

また同様に次の定義をする.

定義 3.4. 平均曲率流方程式において初期値 $f : N \to M$ が埋め込みであるとする. このとき $T_e \in [0, +\infty]$ を次で定義する:

$$T_e := \sup_T \left\{ T \in [0, +\infty] \;\middle|\; \begin{array}{l} \{f_t : N \to M\}_{t \in [0,T)} \text{は平均曲率流} \\ \text{方程式の解で各 } f_t \text{ は埋め込み.} \end{array} \right\}$$

定義より $T_e \leq T_s$ であるが, 実際 $T_e < T_s$ となるような例が存在する.

例 3.5. $M = \mathbb{R}^3$ 上に標準的なリーマン計量 $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ を考え, $K_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3)^2 + y^2 = 4^2\}$, $K_2 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \sqrt{2})^2 + z^2 = 3^2\}$, そして $N = K_1 \cup K_2$ とする. このとき N を初期値 f の像とする平均曲率流方程式の解について, $T_e = 7/2, T_s = 9/2$ であることがわかる. したがってこの場合 $T_e < T_s$ である.

4. 平均曲率形式

前節まではリーマン幾何学おける平均曲率流についての復習であったが，ここからシンプレクティック幾何学に突入する．

定義 4.1. (平均曲率形式) M をシンプレクティック多様体，ω をそのシンプレクティック形式とし，M 上には適当なリーマン計量を定めておく．また L を M のラグランジュ部分多様体とする．このとき L の平均曲率ベクトル場 H に対し，平均曲率形式 σ を

$$\sigma = \omega(H, \cdot)$$

で定義する．σ は L 上の 1 次微分形式である．

例 4.2. $M = \mathbb{C}$ 上に標準的なケーラー形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z}$ を考え，$L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ とする．このとき $\mathbb{C}$ の極座標の偏角方向を θ とすると，$p \in L$ における平均曲率形式 σ_p は

$$\sigma_p = -(d\theta)_p$$

となる．

ここで後の節で必要となる公式を紹介するために，まずマスロフ指数について復習をする．

定義 4.3. (マスロフ指数) (M, ω) を実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体，L を M のラグランジュ部分多様体とする．また，Σ をコンパクトな境界付きリーマン面とし，ここでは話を簡単にするために境界 $\partial\Sigma$ は S^1 と同相とし，$\partial\Sigma$ には Σ から誘導される自然な向きを考える．そして $u : \Sigma \to M$ を $u(\partial\Sigma) \subset L$ を満たす滑らかな写像とする．このとき

- u^*TM は Σ 上の自明なシンプレクティックベクトル束 $\Sigma \times \mathbb{C}^n$ と同型になる．
- その自明化を $\partial\Sigma$ に制限したとき，u^*TL は $\partial\Sigma$ の各ファイバーにおいて $\mathbb{C}^n$ のラグランジュ部分空間を定める．これにより $\partial\Sigma \cong S^1$ からラグランジュ・グラスマン多様体への写像が得られる．ただしここでラグランジュ・グラスマン多様体とは，$\mathbb{C}^n$ のなかの向きをつけないラグランジュ部分空間のなす集合とする．

- ラグランジュ・グラスマン多様体の基本群は $\mathbb{Z}$ と同型であり, $\partial\Sigma$ からラグランジュ・グラスマン多様体への写像の表す基本群の元, もしくは整数を $\mu(u)$ と書く.

この $\mu(u)$ を u のマスロフ指数とよぶ.

定義を見てわかるように, マスロフ指数は u のホモトピー不変量である.

例 4.4. $M = \mathbb{C}$ 上に標準的なケーラー形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}dz \wedge d\bar{z}$ を考え, $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ とする. また $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ とし, $u : \Sigma \to M$ を $u(z) = z$ とする. このとき u^*TM は $\Sigma \times \mathbb{C}$ であり, $Re^{i\theta} \in \partial\Sigma$ における TL のファイバーは $i\mathbb{R}e^{i\theta}$ である. また $\mathbb{C}$ のラグランジュ・グラスマン多様体は S^1 と同相であり, 今, ラグランジュ部分空間には向きを考えていないため, この場合 $\mu(u) = 2$ となる.

ここで後で必要となる公式を述べる.

定理 4.5. (K. Cielieback–E. Goldstein [2], H.Ono [6]) (M, ω) をケーラー・アインシュタイン多様体で, リッチ形式 ρ が $\rho = \lambda\omega$ となっているものとする. また L を M のラグランジュ部分多様体とする. 次に Σ を境界付きコンパクトなリーマン面とし, 境界 $\partial\Sigma$ は S^1 と同相とする. そして $u : \Sigma \to M$ を $u(\partial\Sigma) \subset L$ を満たす滑らかな写像とする. このとき次の等式が成り立つ.

$$\lambda \int_\Sigma u^*\omega - \pi\mu(u) = \int_{\partial\Sigma} u^*\sigma.$$

実際のこの等式が成り立っていることを例で確かめてみる.

例 4.6. $M = \mathbb{C}$ 上に標準的なケーラー形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}dz \wedge d\bar{z}$ を考え, $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ とする. また $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ とし, $u : \Sigma \to M$ を $u(z) = z$ とする. このとき $\lambda = 0$, $\mu(u) = 2$ であり, さらに $\int_{\partial\Sigma} u^*\sigma = -2\pi$ であるので, 実際, 定理の等式が成り立つ.

5. ラグランジュ平均曲率流とシンプレクティック面積

ここではケーラー・アインシュタイン多様体のなかの平均曲率流にしたがって変形するラグランジュ部分多様体の族と, 境界付きリーマン面からの写像のシンプレクティック面積との関係について考察する.

以下では (M,ω) をケーラー・アインシュタイン多様体で, リッチ形式 ρ が $\rho=\lambda\omega$ となっているものとする. このときラグランジュ部分多様体の滑らかな族 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ が平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

を満たしていると仮定する.

実際, M がリッチ平坦のとき, 平均曲率流方程式の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_s)}$ において初期値 $f_0 : L \to M$ がラグランジュはめ込みならば各 $f_t : L \to M$ もラグランジュはめ込みになることが知られている.

定理 5.1. **(K. Smoczyk [7])** (M,g) をリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=0$ となっているものとする. また L を閉多様体, $f : L \to M$ をラグランジュはめ込みとする. このとき f を初期値とする平均曲率流方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_s)}$ において, 各 $f_t : L \to M$ はラグランジュはめ込みとなる.

さらに T. Behrndt は一般のケーラー・アインシュタイン多様体において上記 K. Smoczyk の結果を拡張した.

定理 5.2. **(T. Behrndt [1])** (M,g) をケーラー・アインシュタイン多様体, また L を閉多様体, $f : L \to M$ をラグランジュはめ込みとする. このとき f を初期値とする平均曲率流方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_s)}$ において, 各 $f_t : L \to M$ はラグランジュはめ込みとなる.

ここまでの準備の下, ラグランジュ平均曲率流とリーマン面からの写像のシンプレクティック面積の関係について述べる.

定理 5.3. (M,ω) をケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=\lambda\omega$

を満たすものとし，また $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族とする．Σ をコンパクトな境界付きリーマン面で $\partial\Sigma \cong S^1$ とし，$\{u_t : \Sigma \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を滑らかな写像の族で $u_t(\partial\Sigma) \subset f_t(L)$ を満たしているとする．このとき

$$\omega(u_t) = \begin{cases} \left\{\omega(u_0) - \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)\right\} e^{\lambda t} + \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0), & \lambda \neq 0, \\ \omega(u_0) - \pi\mu(u_0)t, & \lambda = 0 \end{cases}$$

となる．ただし $\omega(u_t) := \int_\Sigma u_t^*\omega$ である．

証明. $\gamma_t := u_t|_{\partial\Sigma} : \partial\Sigma \to L_t, s \mapsto u_t(s)$, と定義する．ラグランジュ部分多様体に境界値をもつリーマン面からの写像のシンプレクティック面積はホモトピー不変なので，各 u_t を適当に変形して，境界値 $\gamma_t : \partial\Sigma \to L_t$ は

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = H_t$$

を満たしているとしてよい．

するとd $d\omega = 0$ とストークスの定理より

$$\int_\Sigma u_{t+\Delta t}^*\omega + \int_{\partial\Sigma} \omega(\frac{d}{ds}\gamma_t, H_t)ds \times \Delta t = \int_\Sigma u_t^*\omega + o(\Delta t),$$

が成り立ち，したがって $\Delta t \to 0$ のとき微分方程式

$$\frac{d}{dt}\omega(u_t) = \sigma_t(\partial u_t)$$

が得られる．ただし $\sigma_t(\partial u_t) = \int_{\partial\Sigma} u_t^*\sigma_t$ である．一方，定理 4.5 より

$$\sigma_t(\partial u_t) = \lambda\omega(u_t) - \pi\mu(u_t).$$

(ここで M がケーラー・アインシュタイン多様体であることを用いた.) そしてマスロフ指数はホモトピー不変なので $\mu(u_t) = \mu(u_0)$．したがってまとめると，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\omega(u_t) = \lambda\omega(u_t) - \pi\mu(u_0)$$

が得られる．これを解くと

$$\omega(u_t) = \begin{cases} \left\{\omega(u_0) - \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)\right\} e^{\lambda t} + \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0), & \lambda \neq 0, \\ \omega(u_0) - \pi\mu(u_0)t, & \lambda = 0 \end{cases}$$

となる． □

この定理を用いると，いくつかの例において T_e の上からの評価を与えることができる．

例 5.4. $(M = S^2, \omega)$ に $\lambda = 1$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え，また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし，$\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし，写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$ である．

- $\omega(u_0) < \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = 2\pi$ のとき，$\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \log \frac{2\pi}{2\pi - \omega(u_0)}$．したがってこれより $T_e \leq \log \frac{2\pi}{2\pi - \omega(u_0)}$ であることがわかる．
- $\omega(u_0) = \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = 2\pi$ のとき，$\omega(u_t) = \omega(u_0)$．したがってこれからだけでは T_e が有限か無限大かはわからない．

例 5.5. $(M = \{x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} : y > 0\}, \omega)$ に $\lambda = -1$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え，また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし，$\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし，写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$, $\omega(u_0) > 0 > \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = -2\pi$ である．そして $\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \log \frac{2\pi + \omega(u_0)}{2\pi}$．したがってこれより $T_e \leq \log \frac{2\pi+\omega(u_0)}{2\pi}$ であることがわかる．

例 5.6. $(M = \mathbb{C}, \omega)$ に $\lambda = 0$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え，また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし，$\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし，写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$ である．そして $\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \frac{\omega(u_0)}{2\pi}$．したがってこれより $T_e \leq \frac{\omega(u_0)}{2\pi}$ であることがわかる．

実は例 5.6 の平均曲率流による閉曲線の変形は 1 点に潰れることが知られている (Grayson の定理 [4])．

6. 単調ラグランジュ部分多様体と平均曲率流

この節では, 単調ラグランジュ部分多様体の平均曲率流による変形について考察する.

$D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ とする.

定義 6.1. (単調ラグランジュ部分多様体) (M, ω) をシンプレクティック多様体, L を M のなかのラグランジュ部分多様体とする. ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $u(\partial D^2) \subset L$ をみたす任意の写像 $u : D^2 \to M$ に対して

$$\mu(u) = \frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u)$$

となるとき, L を単調ラグランジュ部分多様体とよぶ. また ε を単調性定数とよぶ.

定理 6.2. (M, ω) をケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho = \lambda\omega$ を満たすものとする. また $\lambda \neq 0$ と仮定する. 次に $\{f_t : L \to M\}_{t \in [0, T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする. そのとき

(1) $f_t(L)$ はラグランジュ部分多様体で, 単調性定数 ε_t は

$$\varepsilon_t = \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\lambda} \right) e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \right\}^{-1}.$$

(2) $\lambda \neq \varepsilon$, $\tau := \frac{1}{\lambda} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \lambda} < T_e$ と仮定する. そのとき $u(\partial D^2) \subset L_\tau$ となる任意の写像 $u : D^2 \to M$ に対して, $\omega(u) = 0$ が成り立つ.

証明. (1) 定理 5.3 の等式

$$\omega(u_t) = \left\{ \omega(u_0) - \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) \right\} e^{\lambda t} + \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)$$

と $\mu(u_0) = \frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u_0)$ から $\omega(u_0)$ を消去して, $\mu(u_0) = \mu(u_t)$ とすれば

$$\mu(u_t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\lambda} \right) e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \right\}^{-1} \omega(u_t)$$

が成り立つ．したがって $f_t(L)$ も単調ラグランジュ部分多様体で，その単調性定数は $\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right\}^{-1}$ である．
(2) (1) の式より

$$\begin{aligned}\omega(u_\tau) &= \pi\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\tau}+\frac{1}{\lambda}\right\}\mu(u_\tau)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

同様にリッチ平坦はアインシュタイン–ケーラー多様体について次の定理が得られる．

定理 6.3. (M,ω) をリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体，すなわち $\rho=0$ とする．また $\{f_t : L\to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族で，$f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする．そのとき

(1) $f_t(L)$ はラグランジュ部分多様体で，単調性定数 ε_t は

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon t}.$$

(2) $\tau := \frac{1}{\varepsilon} < T_e$ と仮定する．そのとき $u(\partial D^2)\subset L_\tau$ となる任意の写像 $u : D^2\to M$ に対して，$\omega(u)=0$ が成り立つ．

証明. 定理 5.3 の等式

$$\omega(u_t)=\omega(u_0)-\pi\mu(u_0)t$$

と $\mu(u_0)=\frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u_0)$ から $\omega(u_0)$ を消去して，$\mu(u_0)=\mu(u_t)$ とすればよい．□

ここで定理 6.2(2)，定理 6.3(2) の帰結は Floer [3] の定理を思い起こさせる．

定理 6.4. (A. Floer [3]) (M,ω) を閉シンプレクティック多様体，もしくは凸型の境界を持つコンパクトなシンプレクティック多様体とする．また

L を M のなかのコンパクトなラグランジュ部分多様体とし, $u(\partial D^2) \subset L$ となる任意の写像 $u : D^2 \to M$ について $\omega(u) = 0$ が成り立つと仮定する. 次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随するハミルトンイソトピーで, L と $\varphi_1(L)$ が横断的に交わると仮定する. そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(L \cap \varphi_1(L)) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L; \mathbb{Z}_2).$$

例えば定理 6.3(2) と定理 6.4 より, 次の系が得られる.

定理 6.5. (M, ω) を閉もしくは凸型の境界を持つコンパクトなリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho = 0$ を満たすものとし, また $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = H_t$$

に従うコンパクトなラグランジュ部分多様体の滑らかな族で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体で, $\tau := \frac{1}{\varepsilon} < T_e$ と仮定する. 次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随するハミルトンイソトピーで, $f_\tau(L)$ と $\varphi_1(f_\tau(L))$ が横断的に交わると仮定する. そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(f_\tau(L) \cap \varphi_1(f_\tau(L))) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L; \mathbb{Z}_2).$$

ここで K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5] による次の定理を述べる.

定理 6.6 (K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5]) $\mathbb{C}^n$ に標準的なケーラー構造を考え, $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = H_t$$

の解で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε のコンパクトな単調ラグランジュ部分多様体とする. そのとき

$$T_e \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

証明. まず $\mathbb{C}^n$ のなかの任意のコンパクトな部分集合 K に対して，あるハミルトンイソトピー $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，$K \cap \varphi_1(K) = \emptyset$ とできることに注意する．$\frac{1}{\varepsilon} < T_e$ と仮定し，背理法により定理を証明する．$\frac{1}{\varepsilon} < T_e$ より，$f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L)$ はコンパクトなラグランジュ部分多様体である．そして $f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L) \cap \varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L)) = \emptyset$ となるように φ_1 を取ってくる．一方，$B_R := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq R^2\}$ は凸型の境界を持つリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体であり，$f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L), \varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}}L) \subset B_R$ となるように R を十分大きく取っておく．しかしこれは定理 6.5 の $\sharp(f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L) \cap \varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}})(L)) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L, \mathbb{Z}_2)$ と相反する．よって $T_e \leq \frac{1}{\varepsilon}$. □

K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5] による定理 6.6 のもともとの証明は，まず $\mathbb{C}^n$ において定理 6.3 を証明し，そして $\mathbb{C}^n$ のなかのコンパクトなラグランジュ部分多様体 L には，L を境界値にもつ非自明な正則円盤が存在するという Gromov の結果を用いて，$T_e < \frac{1}{\varepsilon}$ としたとき矛盾を導いている．

最後に，$\lambda \neq 0$ の場合も，定理 6.2(2) と定理 6.4 より次の系が得られる．

定理 6.7. (M, ω) を閉もしくは凸型の境界を持つコンパクトなケーラー・アインシュタイン多様体，すなわち $\rho = \lambda\omega$ を満たすものとする．また $\lambda \neq 0$ と仮定する．次に $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = H_t$$

に従うコンパクトなラグランジュ部分多様体の滑らかな族で，$f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする．そして $\varepsilon \neq \lambda$ と仮定する．また $\tau := \frac{1}{\lambda} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \lambda} < T_e$ と仮定する．次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随するハミルトンイソトピーで，$f_\tau(L)$ と $\varphi_1(f_\tau(L))$ が横断的に交わると仮定する．そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(f_\tau(L) \cap \varphi_1(f_\tau(L))) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L; \mathbb{Z}_2).$$

参考文献

[1] T. Behrndt, *Lagrangian mean curvature flow in almost Kähler–Einstein*

manifolds, arXiv:0812.4256.

[2] K. Cieliebak and E. Goldstain, *A note on mean curvature, Maslov class and symplectic area of Lagrangian immersions*, J. Sympl. Goem. Vol. 2, No. 2, 261-266 (2004).

[3] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom., 28(1988), 513-547.

[4] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., 26(1987), 285-314.

[5] K. Groh, M. Schwarz, K. Smoczyk and K. Zehmisch, *Mean curvature flow of monotone Lagrangian submanifolds*, Math. Z. 257 (2007) 295–327.

[6] H. Ono, *Integral formula of Maslov index and its applications*, Japan. J. Math. (N.S.) 30 (2004) no. 2, 413–421.

[7] K. Smoczyk, *A canonical way to deform a Lagrangian submanifold*, arXiv:dg-ga/9605005.