数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 111-120



# 3次元リー群上のローレンツリッチソリトン

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 恩田 健介 (Kensuke Onda)

Graduate School of Mathematics, Nagoya Univsity

## 概要

Calvaruso [C06] の研究により, 3 次元リー群上の左不変ローレンツ計量は分類されている. しかし, それらの計量がどのような性質を持っているかは研究し尽くされているとは言えない. この講究録では, それらの計量のいくつかを特徴付けることを目標とする. 特徴付けとして, アインシュタイン計量の一般化の一つであるリッチソリトンを考える.

## 1 序

Calvaruso [C06] の研究により, 次の結果が示されている.

**Theorem 1** ([C06]). $(M,g)$ を 3 次元単連結完備等質ローレンツ多様体とする. このとき, $(M,g)$ は対称であるか, 左不変ローレンツ計量を持つ 3 次元リー群に等長的であるかのどちらかである.

これは, Sekigawa [S77] によるリーマンの時の結果

**Theorem 2** ([S77]). $(M,g)$ を 3 次元単連結完備等質リーマン多様体とする. このとき, $(M,g)$ は対称であるか, 左不変リーマン計量を持つ 3 次元リー群に等長的であるかのどちらかである.

のローレンツの時の結果となる. さらに, 3 次元リー群のリー環について, Milnor [M76] による分類結果があることもここで述べておく.

今回は, 3 次元ローレンツ多様体について考える. $\{F_1, F_2, F_3\}$ を $T_pM$ の pseudo-orthonormal basis, つまり,

$$g(F_1, F_1) = g(F_2, F_2) = -g(F_3, F_3) = 1$$

とする. $F_1$ と $F_2$ は space-like, $F_3$ は time-like と呼ばれる.
一般に曲率テンソル は対称であるからリッチテンソル Ric も対称である. だから,

リッチ作用素 $Q$, $g(QX,Y)=\mathrm{Ric}(X,Y)$ は self-adjoint である. $Q$ はリーマンの場合は常に対角化できるが, ローレンツのときはできるとは限らず, 次の 4 通りが考えられる. (これは Segre type と呼ばれる. )

$$\text{Segre type}\{11,1\}: \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\text{Segre type}\{1,z\bar{z}\}: \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix},$$

$$\text{Segre type}\{21\}: \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & b-2\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\text{Segre type}\{3\}: \quad \begin{pmatrix} b & a & -a \\ a & b & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix},$$

homogeneous であれば, $Q$ は $M$ 上の任意の点 $p$ で同じ Segre type を持ち, 固有値は定数である.

$$\nabla_{F_i}F_j=\sum \varepsilon_j B_{ijk}F_k\ , \qquad \varepsilon_1=\varepsilon_2=-\varepsilon_3=1$$

と定義する. $B_{ijk}$ と $\Gamma_{ij}^k$ は一対一に対応する. $B_{ijk}$ を調べていくことで, 定理 1 を得る.

次に, 左不変ローレンツ計量を持つ 3 次元リー群 $G$ のリー環 $\mathfrak{g}_i$ を考える. これは Calvaruso([C06]) によって, 次のように分類される.

まず, $G$ が unimodular のときは,

$$(\mathfrak{g}_1): \qquad \begin{aligned} [F_1,F_2] &= \alpha F_1-\beta F_3 \\ [F_1,F_3] &= -\alpha F_1-\beta F_2 \\ [F_2,F_3] &= \beta F_1+\alpha F_2+\alpha F_3\ , \qquad \alpha\neq 0\ . \end{aligned}$$

このケースは, $\beta\neq 0$ で $G=O(1,2)$, または $SL(2,\mathbb{R})$ であり, $\beta=0$ で $G=E(1,1)$.

$$(\mathfrak{g}_2): \qquad \begin{aligned} [F_1,F_2] &= \gamma F_2-\beta F_3 \\ [F_1,F_3] &= -\beta F_2-\gamma F_3 \\ [F_2,F_3] &= \alpha F_1\ , \qquad \gamma\neq 0\ . \end{aligned}$$

このケースは, $\alpha \neq 0$ で $G = O(1,2)$, または $SL(2,\mathbb{R})$ であり, $\alpha = 0$ で $G = E(1,1)$.

$$(\mathfrak{g}_3): \qquad \begin{aligned} [F_1, F_2] &= -\gamma F_3 \\ [F_1, F_3] &= -\beta F_2 \\ [F_2, F_3] &= \alpha F_1 \ . \end{aligned}$$

これは下の表のようになる.

| $G$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $O(1,2)$ or $SL(2,\mathbb{R})$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $O(1,2)$ or $SL(2,\mathbb{R})$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $SO(3)$ or $SU(2)$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $E(2)$ | $+$ | $+$ | $0$ |
| $E(2)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $E(1,1)$ | $+$ | $-$ | $0$ |
| $E(1,1)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $H_3$ | $+$ | $0$ | $0$ |
| $H_3$ | $0$ | $0$ | $-$ |
| $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ | $0$ | $0$ | $0$ |

表 1: $(G, \mathfrak{g}_3)$

$$(\mathfrak{g}_4): \qquad \begin{aligned} [F_1, F_2] &= -F_2 + (2\varepsilon - \beta) F_3 \\ [F_1, F_3] &= -\beta F_2 + F_3 \\ [F_2, F_3] &= \alpha F_1 \ , \qquad\qquad \varepsilon = \pm 1 \ . \end{aligned}$$

これは下の表のようになる.

| $G(\varepsilon = 1)$ | $\alpha$ | $\beta$ | $G(\varepsilon = -1)$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O(1,2)$ or $SL(2,\mathbb{R})$ | $\neq 0$ | $\neq 1$ | $O(1,2)$ or $SL(2,\mathbb{R})$ | $\neq 0$ | $\neq 1$ |
| $E(1,1)$ | $0$ | $\neq 1$ | $E(1,1)$ | $0$ | $\neq -1$ |
| $E(1,1)$ | $< 0$ | $1$ | $E(1,1)$ | $> 0$ | $-1$ |
| $E(2)$ | $> 0$ | $1$ | $E(2)$ | $< 0$ | $-1$ |
| $H_3$ | $0$ | $1$ | $H_3$ | $0$ | $-1$ |

表 2: $\mathfrak{g}_4$

次に, $G$ が non-unimodular のときには,

$$(\mathfrak{g}_5): \quad \begin{aligned} &[F_1, F_2] = 0 \\ &[F_1, F_3] = \alpha F_1 + \beta F_2 \\ &[F_2, F_3] = \gamma F_1 + \delta F_2 \ , \qquad \alpha + \delta \neq 0\ ,\ \alpha\gamma + \beta\delta = 0\ . \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{g}_6): \quad \begin{aligned} &[F_1, F_2] = \alpha F_2 + \beta F_3 \\ &[F_1, F_3] = \gamma F_2 + \delta F_3 \\ &[F_2, F_3] = 0\ , \qquad \alpha + \delta \neq 0\ ,\ \alpha\gamma + \beta\delta = 0\ . \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{g}_7): \quad \begin{aligned} &[F_1, F_2] = -\alpha F_1 - \beta F_2 - \beta F_3 \\ &[F_1, F_3] = \alpha F_1 + \beta F_2 + \beta F_3 \\ &[F_2, F_3] = \gamma F_1 + \delta F_2 + \delta F_3\ , \qquad \alpha + \delta \neq 0\ ,\ \alpha\gamma = 0\ . \end{aligned}$$

以上のように分類されている. さらに [C06] では, 3 次元対称空間の分類も行っている.

次節では, ここで分類した左不変ローレンツ計量の幾つかを取り上げ, 特徴づけていく.

## 2 Heisenberg 群

$H_3$ 上の左不変ローレンツ計量に関して, 次の結果に注目する.

**Theorem 3** ([R92]). 3 次元ハイゼンベルグ群 $H_3$ 上の左不変ローレンツ計量は, 次の 3 つの計量

$$\begin{aligned} g_1 &= -\,dx^2 + dy^2 + (x\ dy + dz)^2\ , \\ g_2 &= dx^2 + dy^2 - (x\ dy + dz)^2\ , \\ g_3 &= dx^2 + (x\ dy + dz)^2 - \big((1-x)dy - dz\big)^2\ . \end{aligned}$$

のどれかに等長的である.

これは, [C06] の表

$$(\mathfrak{g}_3): \quad \begin{aligned} &[F_1, F_2] = -\gamma F_3 \\ &[F_1, F_3] = -\beta F_2 \\ &[F_2, F_3] = \alpha F_1\ . \end{aligned}$$

で $(\alpha,\beta,\gamma)=(+,0,0)$ と選んだとき, つまり $[F_1,F_2]=0$ , $[F_1,F_3]=0$ , $[F_2,F_3]=\alpha F_1$ となるとき, その時の対応するローレンツ計量が $g_1$ であり, $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,-)$ と選んだとき, つまり $[F_1,F_2]=-\gamma F_3$ , $[F_1,F_3]=0$ , $[F_2,F_3]=0$ となるとき, その時の対応するローレンツ計量が $g_2$ である. $g_3$ に関しては,

$$(\mathfrak{g}_4): \qquad \begin{aligned} &[F_1,F_2]=-F_2+(2\varepsilon-\beta)F_3 \\ &[F_1,F_3]=-\beta F_2+F_3 \\ &[F_2,F_3]=\alpha F_1\ , \qquad\qquad \varepsilon=\pm 1\ . \end{aligned}$$

で $(\alpha,\beta,\varepsilon)=(0,1,1)$ と選んだとき, つまり $[F_1,F_2]=-F_2+F_3$ , $[F_1,F_3]=-F_2+F_3$ , $[F_2,F_3]=0$ となるとき, または $(\alpha,\beta,\varepsilon)=(0,-1,-1)$ と選んだとき, つまり $[F_1,F_2]=-F_2-F_3$ , $[F_1,F_3]=F_2+F_3$ , $[F_2,F_3]=0$ となるとき, その時の対応するローレンツ計量が $g_3$ である.

これら $g_i$ の個々の結果は, 次のようなものがある. 例えば, Turhan[T08] による結果

- $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ はどれも測地的完備 (測地線が, $-\infty<t<+\infty$ まで伸ばせる. ) であること.

Rahmani [R92], [RR06] による結果

- Killing vector field によって構成されるリー環は, $g_1$ , $g_2$ に対しては 4 次元可解リー環であること, $g_3$ に対しては 6 次元であること,

などが知られている.

では, 3 つの計量の特徴付け (特に $g_1$ について) を行う. まず, 簡単に分かることから挙げる. 一つ目はイデアルによる特徴付けである. イデアルの元の大きさの符号によって, 計量 $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ を区別することができる. 実際に適当な frame$\{F_i\}$ と coframe$\{\theta\}$ を

$$g_k=(\theta^1)^2+(\theta^2)^2-(\theta^3)^2\ , \qquad \text{for } k=1,2,3$$

であり, 括弧積で 0 にならないものが,

$$\begin{aligned} g_1: &\qquad [F_2,F_3]=F_1 \\ g_2: &\qquad [F_1,F_2]=-F_3 \\ g_3: &\qquad [F_1,F_2]=[F_1,F_3]=-F_2+F_3 \end{aligned}$$

となるように取ることができる. イデアルの元の大きさは順に, 正, 負, 零となる.

二つ目に曲率の観点から計量を見る. 計量 $g_1,g_2,g_3$ の 0 にならないリッチテンソル はそれぞれ次のように表わされる.

$$\begin{aligned} g_1: &\qquad R_{11}=-\frac{1}{2}\ ,\ R_{22}=\frac{1}{2}\ ,\ R_{33}=-\frac{1}{2}\ , \\ g_2: &\qquad R_{11}=-\frac{1}{2}\ ,\ R_{22}=-\frac{1}{2}\ ,\ R_{33}=\frac{1}{2}\ , \\ g_3: &\qquad R_{ij}=0\ . \end{aligned}$$

計量 $g_2$ は定曲率 $-1/4$ を持つローレンツ計量であり, 計量 $g_3$ は定曲率 $0$ を持つローレンツ計量である. しかし, 計量 $g_1$ は $R_{11} = -1/2(g_1)_{11}, R_{22} = 1/2(g_1)_{22}$ であるから, アインシュタイン計量ではない. 計量 $g_1$ に計量 $g_2, g_3$ のような特徴を示すもの, 今回はアインシュタイン計量の一般化の一つであるリッチソリトンという構造を入れる.

## 2.1 リッチソリトン

多様体 $M^n$ 上の擬リーマン計量 $g_0$, ベクトル場 $X$ と定数 $\alpha$ が

$$2\mathrm{Ric}[g_0] + L_X g_0 + \alpha g_0 = 0 \tag{12}$$

を満たすとき, $(M^n, g_0, X, \alpha)$ をリッチソリトン構造といい, その時の擬リーマン計量 $g_0$ をリッチソリトンという. さらに, ベクトル場 $X$ が $X = \nabla f$ を満たす関数 $f$ を持つとき, リッチソリトン $g_0$ は 勾配リッチソリトン であるという. また, 定数 $\alpha$ の符号が, 正, 零, 負であるとき, リッチソリトン $g_0$ はそれぞれ, 拡大, 安定, 収縮 リッチソリトンであるという. 定義式から, リッチソリトンは アインシュタイン計量の一般化の一つであることが分かる. さらにリッチソリトン は, 微分同相写像とスケーリングによってのみ変化するリッチ流

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2\mathrm{Ric}[g(t)]_{ij} \ , \ g(0) = g_0$$

の特別な解であることが知られている.

リッチソリトンの例として, Perelman による次の例が知られている.

**Example 4** (Perelman[P02]). $\mathbb{R}^2$ 上のユークリッド計量 $g_{st}$ は任意のリッチソリトンとなる. まず, ベクトル場 $X$ を

$$X = -\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(\beta x - \alpha y)\frac{\partial}{\partial y}$$

と選ぶ. このとき任意の実数 $\alpha$ に対して, $(\mathbb{R}^2, g_{st}, X, \alpha)$ はリッチソリトン方程式を満たす. さらに $\beta = 0$ のときは $g_{st}$ 勾配リッチソリトン であり. $\beta \neq 0$ のときは $g_{st}$ 非勾配 リッチソリトン となる.

その他に知られている結果として, 閉多様体上のリーマン計量がリッチソリトン であるとき, そのようなリッチソリトンは 全て勾配リッチソリトン になることが Perelman によって示されている. この結果から, 閉多様体上の安定, または拡大リッチソリトン がアインシュタイン定数が零, 負のアインシュタイン計量になることが確認できる.

アインシュタイン計量にならないリッチソリトンの例として, 次の例がある.

**Example 5** (The cigar soliton [CK04]). 完備リーマン面 $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ の計量 $g_\Sigma$ を

$$g_\Sigma := \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{1 + x^2 + y^2}$$

で定義すると, これは安定・勾配リッチソリトン である. また正の断面曲率

$$K = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}$$

を持つ回転不変な計量でもある.

さらに, アインシュタインでない, 非勾配リッチソリトンの例として, 次の例に注目する.

**Example 6** ([BD07], [L07]). Heisenberg 群 $H_3$ は拡大 ・ 非勾配リッチソリトンを持つ.

この例は, Baird と Danielo, そして Lott がそれぞれ独立に構成した. Lauret[L03] の結果により, Heisenberg 群上の左不変リーマン計量は, isometry と scaling を modulo にして一つであるので, Heisenberg 群上の左不変リーマン計量は拡大・非勾配リッチソリトン だけである.

筆者は, この結果を参考にして, Heisenberg 群上の左不変ローレンツ計量 $g_1$ がリッチソリトンとなることを示した.

**Theorem 7.** Heisenberg 群 $H_3$ 上の左不変ローレンツ計量 $g_1$ は収縮・非勾配 リッチソリトンであり, $g_1$ はこれ以外のリッチソリトン構造を持たない.

この定理の証明は, ベクトル場 $X$ を

$$X = f^1 F_1 + f^2 F_2 + f^3 F_3$$

とおき, $(f^i, \alpha)$ に関するリッチソリトン方程式 (12) を解くことによって得られる. このとき, ベクトル場 $X$ はキリングベクトル場の和を modulo にして一意的に決まる.

この結果により, Heisenberg 群 $H_3$ 上の左不変ローレンツ計量は, 負, または零のアインシュタイン計量か, または収縮 ・ 非勾配 リッチソリトンのどれかとなることが言える.

## 3 $E(2)$

ユークリッド平面の等長変換群 $E(2)$ のローレンツ計量を考える. 最初に, 序で紹介したリー環で, $E(2)$ のリー環となっているものを取り上げる. 一つ目は,

$$(\mathfrak{g}_3) \ : \ [F_1, F_2] = -\gamma F_3 \ , \ [F_1, F_3] = -\beta F_2 \ , \ [F_2, F_3] = \alpha F_1 \ .$$

- $(\alpha,\beta,\gamma)=(+,+,0)$ , 特に $\alpha=\beta=1$ のとき,

$$[F_1,F_2]=0\ ,\ [F_1,F_3]=-F_2\ ,\ [F_2,F_3]=F_1\ .$$

であり, このときのイデアルは, ベクトルの大きさが正となるものを2種類持つ. 二つ目は

- $(\alpha,\beta,\gamma)=(+,0,-)$ , 特に $\alpha=-\gamma=1$ のとき,

$$[F_1,F_2]=F_3\ ,\ [F_1,F_3]=0\ ,\ [F_2,F_3]=F_1\ .$$

であり, このときのイデアルは, ベクトルの大きさが正となるものと負となるものの2種類持つ. 三つ目は

$$(\mathfrak{g}_4):\qquad \begin{aligned}[F_1,F_2]&=-F_2+(2\varepsilon-\beta)F_3\\ [F_1,F_3]&=-\beta F_2+F_3\\ [F_2,F_3]&=\alpha F_1\ ,\qquad\qquad \varepsilon=\pm1\ .\end{aligned}$$

- $(\alpha,\beta,\varepsilon)=(+,1,1)$ , $(-,-1,-1)$ と選んだときであり, その時の対応するローレンツ計量を $g_3$ とする. このときのイデアルは, ベクトルの大きさが正のベクトルと零のベクトルを持つ.

Calvaruso [C06] の結果から, $E(2)$ 上の左不変ローレンツ計量で考えるべきものは, この3つの計量だけである.

定義に従って計算することで, 2, 3番目の計量の曲率が0になることが確認できる. よって, ここでは1番目の計量のみを考える.

$E(2)\cong\mathbb{R}^3$ であるから, そのリー環も $\mathbb{R}^3$ の座標を用いて書ける. 次の $E(2)$ 上の左不変ローレンツ計量 $g_1$ を考える.

$$g_1=(\sin y\ dx+\cos y\ dz)^2+dy^2-(\cos y\ dx-\sin y\ dz)^2\ , \tag{14}$$

まず, pseudo-orthonormal frame を

$$F_1=\sin y\frac{\partial}{\partial x}+\cos y\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ F_2=\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ F_3=\cos y\frac{\partial}{\partial x}-\sin y\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

とし, その coframe を

$$\theta^1=\sin y\ dx+\cos y\ dz\ ,\ \theta^2=dy\ ,\ \theta^3=\cos y\ dx-\sin y\ dz\ .$$

とする. 計量 $g_1$ は $g_1=(\theta^1)^2+(\theta^2)^2-(\theta^3)^2$ と表わされ, リー括弧積は $[F_1,F_2]=-F_3$, $[F_2,F_3]=-F_1$ , $[F_3,F_1]=0$ となる.

このとき, $g_1$ の Levi-Civita connection は

$$(\nabla_{F_i}F_j) = \begin{pmatrix} 0 & -F_3 & -F_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -F_2 & F_1 & 0 \end{pmatrix},$$

となり, Ricci tensor を計算すると Ricci tensor は $R_{22} = 2$ を除いて消える. 計量 $g_1$ は明らかにアインシュタイン計量ではないが, 次のようにリッチソリトン として特徴付けることができる.

**Theorem 8.** $E(2)$ 上の左不変ローレンツ計量 $g_1$ は収縮・非勾配 リッチソリトンであり, $g_1$ はこれ以外のリッチソリトン構造を持たない.

Heisenberg 群のときと同じように, ベクトル場はキリングベクトル場の和を modulo にして一意的に決まる.

## 4 最後に

$E(1,1)$ についても $E(2)$ と同様の結果が得られる.

## 参考文献


[Be] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[BD07] P. Baird and L. Danielo, *Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces*, J. reine angew. Math. 608(2007), 65-91.

[C06] G. Calvaruso, *Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds,* J. Geom. Phys. 57 (2007), no. 4, 1279–1291.

[CCG] B. Chow, S-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects,* Mathematical Surveys and Monographs, 135. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[CK04] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci Flow : An Introduction*, AMS (2004).

[G96] M. Guediri, *On completeness of left-invariant Lorentz metrics on solvable Lie groups,* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 9 (1996), no. 2, 337–350.

[GIK06] C. Guenther, J. Isenberg, D. Knopf, *Linear stability of homogeneous Ricci solitons,* Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 96253, 30 pp.

[L03] J. Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups,* Diff. Geom. Appl. 18 (2003) , no. 2, 177-194.

[L07] J. Lott, *On the long-time behavior of type-III Ricci flow solutions,* Math. Ann. 339 (2007), no. 3, 627–666.

[M76] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups,* Advances in Math. 21 (1976), no. 3, 293–329.

[O09] K. Onda, *Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups,* arXiv:0906.0086 (2009).

[P02] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications,* preprint: math. DG/0211159 (2002).

[R92] S. Rahmani, *Metriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois* (French) , [*Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups*] J. Geom. Phys. 9 (1992), no. 3, 295–302.

[RR06] N. Rahmani, and S. Rahmani, *Lorentzian geometry of the Heisenberg group,* Geom. Dedicata 118 (2006), 133–140.

[S77] K. Sekigawa, *On some three-dimensional curvature homogeneous space,* Tensor(N.S.) 31 (1977) 87-97.

[T08] E. Turhan, *Completeness of Lorentz metric on 3-dimensional Heisenberg group,* Int. Math. Forum 3 (2008), no. 13-16, 639–644.