

# The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam Theorem

京都府立医科大学数学教室 長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)

Kyoto Prefectural University of Medicine

和歌山大学教育学部数学教室 川上智博 (Tomohiro Kawakami)

Faculty of Education, Wakayama University

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

Graduate school of Science, Osaka University

京都産業大学理学部数理科学科数学教室 牛瀧文宏 (Fumihito Ushitaki)

Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

## 1 Introduction

Smith homology は [1] や [2] で書かれているように変換群論において様々な応用を持つ. Borsuk-Ulam の定理を証明するのに Smith homology を用いている文献は見当たらないが, [3] や [6] における証明では Smith exact sequence を用いて証明するのと同様のことをしている. この原稿では, まず, 群が自由に作用する空間について Smith homology の定義を与え, その場合に, [1] や [2] にも書かれている Smith exact sequence を紹介する. その上で, それを用いて, Borsuk-Ulam の定理を homology の観点から一般化した次の定理を証明しよう.

**Theorem 1.1**([5]).  $k$  を 2 以上の自然数とし,  $C_k$  を位数  $k$  の巡回群とする.  $X$  を  $C_k$  が自由に作用する弧状連結な位相空間,  $Y$  を  $C_k$  が自由に作用する Hausdorff 空間とする. このとき, 自然数  $n$  で,  $1 \leq q \leq n$  に対して  $H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) = 0$ , かつ  $H_{n+1}(Y/C_k; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) = 0$  を満たすようなものが存在するならば,  $X$  から  $Y$  への  $C_k$ -map は存在しない.

この定理で  $X = S^m$ ,  $Y = S^n$  で  $C_k$  がこれらに自由に作用する場合 ( $k$  が 2 より大きいときは  $m, n$  は奇数) を考えると,  $m > n$  ならば,  $S^m$  から  $S^n$  への  $C_k$ -map が存在しないというよく知られた Borsuk-Ulam の定理を得る.

## 2 The Smith homology

この章で, Smith homology を定義しよう. [1] や [2] では単体的複体の homology を用いているが, ここでは, singular homology を用いることにする.

以下,  $k$  を 2 以上の自然数とし,  $C_k$  を位数  $k$  の巡回群とする.  $X$  を  $C_k$ -space とし,  $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}[C_k]$  を  $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$  上の  $C_k$  の群環とする.

$q \in \mathbf{Z}$  に対して,  $q$  次鎖群  $C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  は自然な  $C_k$  作用を持ち, それが  $C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  上の  $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}[C_k]$  作用を導く.

$g$  を  $C_k$  の生成元とし,

$$\alpha = 1 + g + \cdots + g^{k-1}$$

$$\beta = 1 - g$$

とおく. 定義より  $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$  である. また, すべての  $q$  に対して  $\alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  と  $\beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  は  $C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  の  $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}[C_k]$ -submodule であり,  $\alpha\partial = \partial\alpha, \beta\partial = \partial\beta$ , が成り立つので ( $\partial$  は  $\{C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$  の boundary operator を表す),  $\{\alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$  および  $\{\beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$  は  $\{C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$  の subchain complex になる.

**Proposition 2.1.** すべての  $q$  に対して, 次の二つの系列は完全である.

$$0 \rightarrow \alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{i} C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{j} C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} \alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

ここで,  $i, j$  は包含写像,  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) は  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) の積により定義される写像である.

**Proof.**  $\beta \circ i = 0, \alpha \circ j = 0$  なので,  $\text{Im } i \subset \text{Ker } \beta, \text{Im } j \subset \text{Ker } \alpha$  は成り立つ.

$s = \sum_j \sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i \sigma_j \in \text{Ker } \beta$  とする. ここで,  $g$  は  $C_k$  の生成元であり,  $l \neq l', 0 \leq i \leq k-1$  ならば,  $g^i \sigma_l \neq \sigma_{l'}$  を満たすように  $\sigma_i$  をとっておく.  $\beta s = 0$  なので, 任意の  $j$  に対して,  $\sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i (1-g) \sigma_j = 0$  が成り立つ. したがって, この式の左辺を変形して, すべての  $j$  に対して,  $\sum_{i=1}^{k-1} (n_{ji} - n_{j(i-1)}) g^i \sigma_i + (n_{j0} - n_{j(k-1)}) \sigma_j = 0$  を得る. 故に,  $n_{j0} = n_{j1} = \cdots = n_{j(k-1)}$ .  $n_j = n_{j0} (= n_{j1} = \cdots = n_{j(k-1)})$  とおくと,  $s = \sum_j n_j (1 + g + \cdots + g^{k-1}) \sigma_j = \alpha \sum_j n_j \sigma_j \in \text{Im } i$ . したがって,  $\text{Ker } \beta = \text{Im } i$  である.

次に  $s = \sum_j \sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i \sigma_j \in \text{Ker } \alpha$  とする.  $\alpha s = \sum_j (n_{j0} + \cdots + n_{j(k-1)}) (1 + \cdots + g^{k-1}) \sigma_j = 0$  なので,  $n_{j0} + \cdots + n_{j(k-1)} = 0$  である.

したがって,  $s = \sum_j (n_{j0}(1-g) + (n_{j0} + n_{j1})g(1-g) + (n_{j0} + n_{j1} + n_{j2})g^2(1-g) + \cdots + (n_{j0} + n_{j1} + \cdots + n_{j(k-2)})g^{k-2}(1-g)) \sigma_j$  と変形できて,  $s \in \text{Im } j$ . 故に  $\text{Ker } \alpha = \text{Im } j$  である. ■

$H_q^\alpha(X, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ ,  $H_q^\beta(X, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  をそれぞれ chain complex  $\{\alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$ ,  $\{\beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$  から定義される homology 群とする. この homology 群を Smith homology 群 と呼ぶ.

上の proposition から次の定理を得る.

**Theorem 2.2.** 次の二つの系列は完全である.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta_*} H_q^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \\ \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta_*} H_{q-1}^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{j_*} H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \\ \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$k = 2$  のとき  $\alpha = \beta$  であり, 次の完全系列を得る.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_q(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

次の proposition より, 上の定理で  $k = 2$  の場合は Thom-Gysin 完全系列 (cf. [4]) と同じものであることがわかる.

**Proposition 2.3.**  $Y$  を  $C_k$  が free に作用している Hausdorff 空間とする. このとき, 任意の  $q \in \mathbf{Z}$  に対して,  $H_q^\alpha(Y, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \cong H_q(Y/C_k, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  である.

**Proof.** 最初に,  $\alpha : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  と orbit map  $\pi : Y \rightarrow Y/C_k$  から誘導される準同型  $\pi_\# : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow C(Y/C_k; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  が同じ kernel を持つことを示そう.

$\alpha(\sum n_i g^i \sigma) = (\sum n_i) \alpha(\sigma)$  より,  $\alpha(\sum n_i g^i \sigma) = 0$  であるための必要十分条件は  $\sum n_i = 0$  である. 一方,  $\pi_{\#}(\sum n_i g^i \sigma) = (\sum n_i) \pi \circ \sigma$  なので,  $\pi_{\#}(\sum n_i g^i \sigma) = 0$  であるための必要十分条件は  $\sum n_i = 0$  である. したがって,  $\alpha$  と  $\pi_{\#}$  は同じ kernel を持つ.

$\tau : \Delta^s \rightarrow Y/C_k$  の lift  $\bar{\tau} : \Delta^s \rightarrow Y$  が存在するので  $\pi_{\#}$  は全射である. また,  $\alpha : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  も明らかに全射である.

故に  $\alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  は  $C(Y/C_p; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  と chain complex として同型である. したがって,  $H_q^\alpha(Y, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \cong H_q(Y/C_k, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$  である. ■

### 3 Proof of Theorem 1.1

以下で, Introduction で紹介した Theorem 1.1 の証明をする.

Theorem 1.1 の状況のもとで  $C_k$ -map  $f : X \rightarrow Y$  が存在すると仮定する.  $X$  は弧状連結であり,  $f(X)$  も弧状連結である. したがって,  $f(X)$  は  $Y$  のある弧状連結成分に含まれる.  $f(X)$  に  $C_k$  が free に作用していることから  $f(X)$  を含む  $Y$  の弧状連結成分にも  $C_k$  が free に作用していて, この弧状連結成分について議論をすればよいので, 簡単のため,  $Y$  は初めから弧状連結と仮定しておく.

初めに  $k = 2$  の場合を証明しよう.  $f$  は  $C_2$ -map なので,  $\alpha f_{\#} = f_{\#} \alpha$  である.

以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  を省略して書くことにする. 次の可換図式を考える. Theorem 2.2 より, この可換図式で水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \rightarrow & H_{n+1}^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{i^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\alpha^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial^X} & H_{n-1}^\alpha(X) & \rightarrow & \dots \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & \\
 \rightarrow & H_{n+1}^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial^Y} & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{i^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\alpha^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial^Y} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \rightarrow & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{i^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\alpha^X} & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial^X} & H_0^\alpha(X) & \xrightarrow{i^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\alpha^X} & H_0^\alpha(X) & \rightarrow & 0 \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow \\
 \rightarrow & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{i^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\alpha^Y} & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial^Y} & H_0^\alpha(Y) & \xrightarrow{i^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\alpha^Y} & H_0^\alpha(Y) & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

定義より,  $(i_*^X)_0 = 0$  and  $(i_*^Y)_0 = 0$  であり,  $(\alpha_*^X)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0^\alpha(X)$  と  $(\alpha_*^Y)_0 : H_0(Y) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$  は同型である. 仮定より,  $H_0(X) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  であり,  $H_0(X) \cong H_0^\alpha(X) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  となる. 同様にして,  $H_0(Y) \cong H_0^\alpha(Y) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  である.  $(f_*)_0 :$

$H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$  は同型であり,  $(\alpha_*^Y)_0 \circ (f_*)_0 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\alpha_*^X)_0$  なので,  $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$  も同型写像である.

$(i_*^X)_0 = 0$  より,  $\text{Im} (\partial_*^X)_1 = \text{Ker} (i_*^X)_0 = H_0^\alpha(X)$ . したがって,  $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$  は非自明な準同型 (つまり, その像が0でない) であることがわかる. 故に,  $(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_1^\alpha(Y)$  も非自明な準同型である.

$X$  に関する homology 群の仮定より,  $1 \leq q \leq n$  に対して,  $(\partial_*^X)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_{q-1}^\alpha(X)$  は同型となり, このことを用いると, 帰納的に  $0 \leq q \leq n$  に対して  $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_q^\alpha(Y)$  が非自明であることが示される.

Proposition 2.3 より  $H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$  であることと,  $H_{n+1}(Y/C_p) = 0$  の仮定より,  $H_{n+1}^\alpha(Y) = 0$  である. したがって,  $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \rightarrow H_n(Y)$  は単射であり,  $(f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \rightarrow H_n^\alpha(Y)$  が非自明な準同型であることと  $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \rightarrow H_n(Y)$  が単射であることから,  $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \rightarrow H_n(Y)$  は非自明な準同型である.

一方,  $H_n(X) = 0$  なので,  $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n = (f_*)_n \circ (i_*^X)_n = 0$ . これは矛盾であり,  $k=2$  の場合に  $X$  から  $Y$  への  $C_k$ -map が存在しないことが証明された.

次に  $k > 2$  の場合を証明しよう. 以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の  $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$  を省略して書くことにする. 次の可換図式を考えよう. Theorem 2.2 より, 水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\rightarrow & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\alpha(X) & \rightarrow & \dots \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & \\
\rightarrow & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\rightarrow & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_0^\beta(X) & \rightarrow & 0 \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow \\
\rightarrow & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_0^\beta(Y) & \rightarrow & 0
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\rightarrow & H_{n+1}^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\beta(X) & \rightarrow & \dots \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & \\
\rightarrow & H_{n+1}^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\beta(Y) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\rightarrow & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_0^\alpha(X) & \rightarrow & 0 \\
& f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow \\
\rightarrow & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

容易に  $(i_*^X)_0 = 0$  と  $(i_*^Y)_0 = 0$  がわかる. したがって,  $(\beta_*^X)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0^\beta(X)$  と  $(\beta_*^Y)_0 : H_0(Y) \rightarrow H_0^\beta(Y)$  は同型である.  $(f_*)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$  は同型なので,  $(f_*^\beta)_0 : H_0^\beta(X) \rightarrow H_0^\beta(Y)$  も同型である.

同様にして, 2 番目の可換図式で  $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$  が同型であることが示される.

$H_1(X) = 0$  と  $(i_*^X)_0 = 0$  より,  $(\partial_*^X)_1 : H_1^\beta(X) \rightarrow H_0^\alpha(X)$  は同型である. 同様にして,  $(\partial_*^X)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_0^\beta(X)$  も同型である.

$(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\beta)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1$  および  $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\beta)_0 \circ (\partial_*^X)_1$  から,  $(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_1^\alpha(Y)$  と  $(f_*^\beta)_1 : H_1^\beta(X) \rightarrow H_1^\beta(Y)$  は非自明な準同型であることがわかる.

$X$  に関する homology 群の仮定より,  $1 \leq q \leq n$  に対して,  $(\partial_*^X)_q : H_q^\beta(X) \rightarrow H_{q-1}^\alpha(X)$  および  $(\partial_*^X)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_{q-1}^\beta(X)$  は同型となり, 帰納的に  $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_q^\alpha(Y)$  と  $(f_*^\beta)_q : H_q^\beta(X) \rightarrow H_q^\beta(Y)$  が  $0 \leq q \leq n$  で非自明な準同型であることが示される. Proposition 2.3 より,  $H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$  であり,  $H_{n+1}(Y/C_p) = 0$  なので,  $\text{Ker}(j_*^Y)_n = \text{Im}(\partial_*^Y)_{n+1} = 0$ . したがって,  $(j_*^Y)_n : H_n^\beta(Y) \rightarrow H_n(Y)$  は単射である. 故に  $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n$  は非自明な準同型である.

一方,  $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = (f_*)_n \circ (j_*^X)_n$  で  $H_n(X) = 0$  なので,  $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = 0$  となる. これは矛盾である. 以上で定理が証明された. ■

## 参考文献

- [1] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, (1972).
- [2] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, (1991).
- [3] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a  $Z_q$ -map from a  $Z_q$ -space to  $S^{2n+1}$* , Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 714–716.
- [4] M, Masuda, 講座 数学の考え方 <15> 代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002).
- [5] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, *The Smith homology and Borsuk-Ulam type theorems*, preprint.
- [6] J.W. Walker, *A homology version of the Borsuk-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 466–468.