数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 84-90

例外型エルミート対称空間のシンプレクティック構造

信州大学大学院 工学系研究科 数理・自然情報科学　小泉　喜章 (Yoshiaki Koizumi)
Department of Mathematical Sciences　Division of science and Technology,
Shinshu University

・シンプレクティック構造に関連した定義

Def 1.1
可微分多様体 M 上のシンプレクティック構造とは
非退化で閉 2 次微分形式 $\omega \in \Omega^2(M)$ のことである。

Def 1.2
$\psi \in Diff(M) := \{f : M \to M,$ 微分同相$\}$ とする。
ψ がシンプレクティック微分同相
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ψ がシンプレクティック形式を保存する。*i.e.* $\psi^*\omega = \omega$
M 上のシンプレクティック微分同相の集合を $Symp(M)$ と表す。

Def 1.3
G : コンパクトリー群,　(M, ω) : シンプレクティック多様体　とし、
$\psi : G \times M \to M,$ 可微分作用とする。
$g \cdot x := \psi_g(x)$ とする。
ψ : シンプレクティック作用 $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ ${}^\forall g \in G$ に対し、$\psi_g \in Symp(M)$

Def 1.4
X : M 上のベクトル場　とする。
$i(X)\omega = dH$ を満たすような $H \in C^\infty(M)$ が存在するとき、
X をハミルトンベクトル場と言う。
ここで、$i(X)\omega(Y) := \omega(X, Y)$ とする。
また、関数 H をハミルトン関数と言う。

Def 1.5
$\mathfrak{g}$ をリー群 G のリー環とし、ψ : シンプレクティック作用　とする。
$\xi \in \mathfrak{g}$ に対する (M, ω) 上の $fundamental$ ベクトル場 X_ξ を
$(X_\xi)_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} exp(t\xi) \cdot x \ \ (x \in M)$　と定義する。

Def 1.6
リー群 G の M への作用が弱ハミルトン作用
$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 各ベクトル場 X_ξ がハミルトンベクトル場

Def 1.7
G の作用は弱ハミルトン作用とする。
M 上の G の作用がハミルトン作用
$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 写像 $H : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$; $\zeta \mapsto H_\zeta$
が $\mathfrak{g}$ 上の Lie 環構造と $C^\infty(M)$ 上の $Poisson$ 構造に関して、Lie 環準同型である。
$i.e.$　$\zeta, \eta \in \mathfrak{g}$ に対して、$\{H_\zeta, H_\eta\} = H_{[\zeta,\eta]}$　を満たす。
ここで、$\{H_\zeta, H_\eta\}$ は、$\{H_\zeta, H_\eta\} := \omega(X_\zeta, X_\eta)$ と定義し、$\{\ ,\ \}$ を $Poissonbracket$ と呼ぶ。

Def 1.8
シンプレクティック多様体 M 上のリー群 G の作用はハミルトン作用とする。
各 $p \in M$ に対し、$(\ \mu(p)\ )(\xi) := H_\xi(p)$ と定義された
$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ を運動量写像と呼ぶ。

・コンパクト既約エルミート対称空間について

コンパクト既約エルミート対称空間は
古典型は $U(m,n)/U(m) \times U(n)$,
$SO(2n)/U(n)$,
$Sp(n)/U(n)$,
$SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$
例外型は $E_6/U(1)\underset{\mathbf{Z}_4}{\times}Spin(10)$,
$E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$
である。
ここでは例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$ のシンプレクティック構造について調べる。

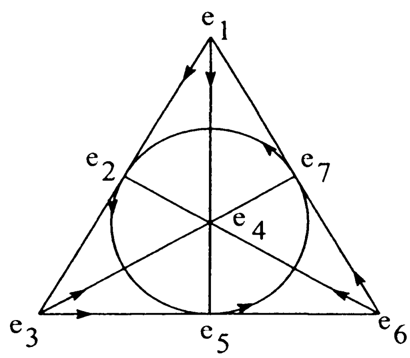
・例外型エルミート対称空間に関する定義

Def 2.1

$e_0(=1), e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$を生成元とする $\mathbf{R}$ – 加群を $\mathfrak{C}$ とする。
また、$x, y \in \mathfrak{C}$ の積 xy を次のように定める。

$x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i,\quad y = \sum_{j=0}^{7} y_j e_j$ とすると、$xy := \sum_{i,j}(x_i y_j)e_i e_j$

ここで、$\sum_{i,j}$ は i と j に関する全ての組み合わせ (64 通り) について足すことを意味する。
また、生成元同士の積は次の図で定義する。



この図は、積 $e_i e_j$ を矢印の方向での次の生成元 e_kと定義しているものとする。$(i \neq j \neq k \neq i)$
例えば、$e_6 e_7$ は矢印の方向での次の生成元は e_1 なので、$e_6 e_7 = e_1$ ということになります。
また、$e_4 e_2$ 等については、矢印の方向での次の生成元は一周してきて、e_6となり、
$e_4 e_2 = e_6$ になります。

さらに $e_i^2 = \begin{cases} 1 & (if\ \ i = 0) \\ -1 & (if\ \ i \neq 0) \end{cases}$, $e_i e_j = -e_j e_i\ \ (i \neq 0, j \neq 0, i \neq j)$
とすると全ての生成元同士の積を定義することができる。
この集合 $\mathfrak{C}$ を *Cayley* 数 (八元数) と呼ぶ。

Def 2.2

$\mathfrak{C}$ の元 $a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{7}\alpha_i e_i,\quad b = \sum_{i=0}^{7}\beta_i e_i$ に対し、

a の共役を $\bar{a} := \alpha_0 - \sum_{i=1}^{7}\alpha_i e_i$ 　　a, b の内積を $(a, b) := \sum_{i=0}^{7}\alpha_i\beta_i \in \mathbf{R}$

a の絶対値を $|a| := \sqrt{(a, a)} \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ で定義する。

Def 2.3

$\mathfrak{C}$ の元を成分に持つ 3 次の行列全体の集合を $M_3(\mathfrak{C})$ とし、

$\mathfrak{J} := \{X \in M_3(\mathfrak{C}) \mid X^* = X\}$ とする。

$\mathfrak{J}$ の元 X は $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad (\xi_i \in \mathbf{R},\ x_i \in \mathfrak{C})$

の形をしている。$\mathfrak{J}$ は 27 次元 $\mathbf{R}$ 上ベクトル空間となる。

Def 2.4

$\mathfrak{J}$ の元を複素化した集合を $\mathfrak{J}^c$ と書く。

$X \in \mathfrak{J}^c$ は $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \lambda_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_i \in \mathbf{C},\ x_i \in \mathfrak{C}^c)$

の形をしている。$\mathfrak{J}^c$ は 27 次元 $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間となる。

Def 2.5

$X, Y \in \mathfrak{J}^c$ に対し、*Jordan* 積 $X \circ Y$ を $X \circ Y := \frac{1}{2}(XY + YX) \in \mathfrak{J}^c$ で定義する。

ここで、XY は行列の積とする。

trace を $tr(X) := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, 内積を $(X, Y) := tr(X \circ Y)$,

複素内積を $< X, Y > := (\tau X, Y)$ と定義する。

ここで、τX は X の各要素の複素化した部分の共役をとったものとする。

さらに、$\mathfrak{J}^c$ に *Freudenthal* 積 $X \times Y$ を

$X \times Y := \frac{1}{2}(2X \circ Y - tr(X)Y - tr(Y)X + (tr(X)tr(Y) - (X, Y))E) \in \mathfrak{J}^c$ で定義し、

3 項式 $(X, Y, Z) := (X, Y \times Z) \in \mathbf{C}$ 行列式 $detX := \frac{1}{3}(X, X, X)$ と定義する。

Def 2.6

$E_6 := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{J}^c) \mid det(\alpha X) = det(X),\ < \alpha X, \alpha Y > = < X, Y >\}$

ここで、$Iso_c(\mathfrak{J}^c) = \{f : \mathfrak{J}^c \to \mathfrak{J}^c \mid f$ は線形同型 $\}$

E_6 は E_6 型リー群である。

$\mathfrak{e}_6 := \{\phi \in Hom_c(\mathfrak{J}^c) \mid det\phi X = 0,\ < \phi X, Y > + < X, \phi Y > = 0\}$

ここで、$Hom_c(\mathfrak{J}^c) = \{f : \mathfrak{J}^c \to \mathfrak{J}^c \mid$ 線形 $\}$

$\mathfrak{e}_6$ はリー群 E_6 のリー環である。

Prop 2.7

例外型エルミート対称空間 $E_6/U(1) \underset{\mathbf{Z}_4}{\times} Spin(10)$ は

$\{X \in \mathfrak{J}^c \mid X \times X = 0,\ X \neq 0\}/C^*$ と微分同相である。(参考文献 [1] より)

Def 2.8

56 次元 $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間 $\mathfrak{P}^c$ を $\mathfrak{P}^c := \mathfrak{J}^c \oplus \mathfrak{J}^c \oplus \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ と定義する。
$(X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^c$ と表す。

Def 2.9

$P = (X, Y, \xi, \eta),\ Q = (Z, W, \zeta, \omega) \in \mathfrak{P}^c$ とする。
対称内積 (P, Q), 複素内積 $< P, Q >$, 交代内積 $\{P, Q\} \in \mathbf{C}$ をそれぞれ
$(P, Q) := (X, Z) + (Y, W) + \xi\zeta + \eta\omega, \quad < P, Q > := < X, Z > + < Y, W > + \bar{\xi}\zeta + \bar{\eta}\omega,$
$\{P, Q\} := (X, W) - (Z, Y) + \xi\omega - \zeta\eta$ と定義する。

Def 2.10

$\varphi \in \mathfrak{e}_6^c,\ A, B \in \mathfrak{J}^c,\ \nu \in \mathbf{C}$ に対し、$\Phi(\varphi, A, B, \nu) : \mathfrak{P}^c \to \mathfrak{P}^c$ を

$$\Phi(\varphi, A, B, \nu)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi X - \frac{1}{3}\nu X + 2B \times Y + \eta A \\ 2A \times X - {}^t\varphi Y + \frac{1}{3}\nu Y + \xi B \\ (A, Y) + \nu\xi \\ (B, X) - \nu\eta \end{pmatrix}$$

と定義する。ここで、${}^t\varphi$ は $(\varphi X, Y) = (X, {}^t\varphi Y)$ $({}^\forall X, Y \in \mathfrak{J}^c)$ を満たす写像とする。

Def 2.11

$X, Y \in \mathfrak{J}^c$ に対し、$X \vee Y := [\tilde{X}, \tilde{Y}] + (X \circ Y - \frac{1}{3}(X, Y)E)^\sim \in \mathfrak{e}_6^c$ とする。
ここで、$\tilde{X} : \mathfrak{J}^c \to \mathfrak{J}^c ; Y \mapsto X \circ Y$ とする。

Def 2.12

$P, Q \in \mathfrak{P}^c$ に対し、$P \times Q : \mathfrak{P}^c \to \mathfrak{P}^c$ を

$$P \times Q := \Phi(\varphi, A, B, \nu), \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{1}{2}(X \vee W + Z \vee Y) \\ A = -\frac{1}{4}(2Y \times W - \xi Z - \zeta X) \\ B = \frac{1}{4}(2X \times Z - \eta W - \omega Y) \\ \nu = \frac{1}{8}((X, W) + (Z, Y) - 3(\xi\omega + \zeta\eta)) \end{cases}$$

と定義する。

Def 2.13

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^c &:= \{P \in \mathfrak{P}^c \mid P \times P = 0, P \neq 0\} \\ &= \{P = (X, Y, \xi, \eta) \in \mathfrak{P}^c \mid P \neq 0,\ X \vee Y = 0,\ X \times X = \eta Y,\ Y \times Y = \xi X,\ (X, Y) = 3\xi\eta\} \end{aligned}$$

と定義し、$\mathfrak{M}^c$ を *Freudenthal* 複素多様体と呼ぶ。
$\mathfrak{M}_1 := \{P \in \mathfrak{M}^c \mid < P, P > = 1\}$ と定義する。

Def 2.14

$E_7^c := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{P}^c) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q\}$
$E_7 := \{\alpha \in Iso_c(\mathfrak{P}^c) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q,\ < \alpha P, \alpha Q > = < P, Q >\}$

と定義する。E_7, E_7^c はリー群である。
リー群 E_7^cのリー環 $\mathfrak{e}_7^c$ は、$\mathfrak{e}_7^c = \{\Phi(\varphi, A, B, \nu) \in Hom_c(\mathfrak{P}^c) \mid \varphi \in \mathfrak{e}_6^c,\ A, B \in \mathfrak{J}^c,\ \nu \in \mathbf{C}\}$ である。
リー群 E_7のリー環 $\mathfrak{e}_7$ は、$\mathfrak{e}_7 = \{\Phi(\varphi, A, -\tau A, \nu) \in Hom_c(\mathfrak{P}^c) \mid \varphi \in \mathfrak{e}_6^c,\ A \in \mathfrak{J}^c,\ \nu \in i\mathbf{R}\}$ である。

Prop 2.15
例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$ は
$\mathfrak{M}^c/C^*$ と微分同相である。(参考文献 [1] より)

Def 2.16
$\mathfrak{P}^c$ に同値関係 "~" を入れる。
$P, Q \in \mathfrak{P}^c$ に対し、 $P \sim Q \overset{def}{\Leftrightarrow} {}^{\exists}\theta \in \mathbf{C}^*$ $s.t.$ $|\theta| = 1,\ \theta P = Q$ と定義する。
この同値関係による $\mathfrak{M}_1$の商集合を $\mathfrak{M}_1/\sim := \{\ \{\theta P \mid \theta \in \mathbf{C},\ |\theta| = 1\ \} \mid P \in \mathfrak{M}_1\ \}$ とする。
$\mathfrak{M}_1/U(1) := \mathfrak{M}_1/\sim = \mathfrak{M}^c/C^*$ である。

・例外型エルミート対称空間 $E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$ の シンプレクティック構造について

$\mathfrak{M}_1/U(1) \simeq E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$ なので、
$E_7/U(1)\underset{\mathbf{Z}_3}{\times}E_6$ のシンプレクティック構造を $\mathfrak{M}_1/U(1)$ のシンプレクティック構造で定義する。

Lemma 3.1
$P \in \mathfrak{M}_1$ とする。
$H_P := \{Q \in T_P(\mathfrak{M}_1) \mid <Q, P>= 0\}$ とする。$H_P \simeq T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1))$ である。

Def 3.2
$P \in \mathfrak{M}_1,\ Q_i \in T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1)),\ \pi : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_1/U(1),\ (d\pi)_P(R_i) = Q_i\ R_i \in T_P(\mathfrak{M}_1)$ とする。
$T_{[P]}(\mathfrak{M}_1/U(1))$ の内積を $<< Q_1, Q_2 >>:=< R_1, R_2 > - < R_1, P >< P, R_2 >$ と定義する。

Def 3.3
$\mathfrak{M}_1/U(1)$ への作用は E_7とする。
$i.e.$ $\Lambda : E_7 \times \mathfrak{M}_1/U(1) \to \mathfrak{M}_1/U(1)\ ;\ (\alpha, [P]) \mapsto [\alpha P]$

Def 3.4
$\omega_{[P]}(Q_1, Q_2) := 2Im << Q_1, Q_2 >>$ と定義すると、ωは *symplectic* 形式になる。

Prop 3.5
上の *symplectic form* ωに対し、E_7の作用Λは *symplectic* 微分同相である。

Lemma 3.6

$\phi \in \mathfrak{e}_7$ とする。ϕに対する *fundamental vector field* $(X_\phi)_{[P]}$ は

$(X_\phi)_{[P]} = (d\pi)_P(\phi \cdot P)$

Def 3.7

$H_\phi : \mathfrak{M}_1/U(1) \quad \to \quad \mathbf{R} \quad ; \quad H_\phi([P]) = \frac{1}{i} < \phi P, P >$ とする。

上のように、H_ϕ を定義すると、$dH_\phi = i(X_\phi)\ \omega$ を満たすので

$\mathfrak{M}_1/U(1)$ への E_7の作用は弱ハミルトン作用である。

また、$\{H_\phi, H_{\phi'}\} = H_{[\phi,\phi']}$ も満たすので、

$\mathfrak{M}_1/U(1)$ への E_7の作用はハミルトン作用である。

Theorem 3.8

以上より、運動量写像 $\mu : \mathfrak{M}_1/U(1) \ \to \mathfrak{e}_7^*$ は

$\mu([P])(\phi) = \frac{1}{i} < \phi \cdot P\ ,\ P >$

参考文献

[1] K. ABE and I. YOKOTA: Realization of spaces $E_6/(U(1)Spin(10))$, $E_7/(U(1)E_6)$, $E_8/(U(1)E_7)$ and their volumes, Tokyo J. Math. 20 (1997), 73-86

[2] 横田一郎: 例外型単純リー群, 現代数学社

[3] A.Banyaga: The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Kluwer Acad.Publ., (1997)

[4] A.Michèle : The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds , Birkhäuser ,(1991)

[5] D.McDuff and D.Salamon: Introduction to Symplectic Topology , Oxford ,(1995)

[6] P.Libermann and C.M.Marle: Symplectic Geometry and Analytical Mechanics , D.Reidel Publishing Compani , (1987)

[7] V.I.Arnold: Mathematical methods of classical mechanics , Springer-Verlag, 60, (1989)

[8] N.J.Wildberger: The moment map of a Lie group representations, T.A.M.S., 330, (1992)

[9] 横田一郎:群と表現, 裳華房, (1973)