数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 91-99

余次元１軌道を持つG-多様体の同変微分同相群の１次元ホモロジー

(On the first homology of the equivariant homeomorphism group of a G-manifold with codimenison one orbit)

信州大学・理学部　阿部 孝順 (Kōjun Abe)
Faculty of Science, Shinshu University
e-mail: kojnabe@shinshu-u.ac.jp

§1.　主結果とその背景

本稿では可微分 G-多様体の同変同相群の 1 次元ホモロジー群についての新たな結果を述べると共に、これまでに知られている関連する結果との対比することで、同変同相群の 1 次元ホモロジー群の研究の位置付けについても考察する。

M: 連結可微分多様体
$\mathcal{H}(M)$: コンパクトな台をもつイソトピーで恒等写像とイソトピックな M の同相全体にコンパクト開位相を入れた位相群

最初に $\mathcal{H}(M)$ の完全性についてこれまでに知られている結果について述べる.

Theorem 1.1　(Mather [MA])　$\mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ は完全群である.

Edwards and Kirby [EK] による fragmentation theorem を用いることで、Theorem 1.1 は一般の多様体について拡張される.

Theorem 1.2　M を連結な可微分多様体に対して $\mathcal{H}(M)$ は完全群である.

N: M の部分多様体
$\mathcal{H}(M,N)$: N を不変にするコンパクトな台をもつイソトピーで恒等写像とイソトピックな M の同相全体にコンパクト開位相を入れた位相群

Theorem 1.3　Fukui ([FU])　$\mathcal{H}(M,N)$ は完全群である.

一般的に群 K に対して自然数 n が存在して、K の各元が n 個以下の交換子積として表されるとき、K は一様完全群であるという.

Theorem 1.4　Tsuboi ([TS])　$\mathcal{H}([0,1])$ 一様完全群である.

次に同変同相群の場合について述べる.
G: コンパクトリー群
M: 連結可微分 G-多様体
$\mathcal{H}_G(M)$ コンパクトな台をもつ同変イソトピーで恒等写像とイソトピックな M の同変同相全体にコンパクト開位相を入れた位相群

Theorem 1.5 (Rybicki [RY])
(1) G が M の自由作用であるとき、$\mathcal{H}_G(M)$ は完全群である.
(2) M が 1 個の軌道型からなる G-多様体ならば $\mathcal{H}_G(M)$ は完全群である.

この予稿では M が余次元 1 軌道をもつ可微分 G-多様体であるとき、$\mathcal{H}_G(M)$ の 1 次元ホモロジー群の構造を調べることが目的である.
最初に V が G の表現空間であるときに、$\mathcal{H}_G(V)$ の完全性について述べる. H が G の部分群であるとき、$N(H)$ を H の G における正規化群とする.

Theorem 1.6 V を G の表現空間で G が V の単位球面 $S(V)$ に推移的に作用しているものとする. また H を $S(V)$ の点における等方部分群とするとき、$(N(H)/H)_0$ は $U(1)$ とまたは $\{1\}$ と同型であるとする. このとき $\mathcal{H}_G(V)$ は完全群である.

Remark 1.7 (1) Theorem 1.6 において、G が $S(V)$ に推移的に推移的に作用するとき、$(N(H)/H)_0$ は $U(1)$, $\{1\}$ または $Sp(1)$ に同型であることが知られている. $N(H)/H$ が $Sp(1)$ に同型の場合には $\mathcal{H}_G(V)$ は完全群であるか、これまでの所不明である.
(2) $L_G(V)$ (*resp.* $\mathcal{H}_{LIP,G}(V)$) をコンパクトな台をもつ同変イソトピーで恒等写像とイソトピックな M の同変リプシッツ同相全体にコンパクト開位相 (コンパクトリプシッツ開位相) を入れた位相群とする. G が $S(V)$ に推移的に推移的に作用するとき、 $\mathcal{H}_{LIP,G}(V)$ は完全群である ([AF8]).
また $U(n)$ の標準作用をもつ $\mathbf{C}^n$ に対して、$H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n))$ は区間 $(0,1]$ 上のある関数空間の商空間と同型になり、また連続的な モジュライをもつことが証明される ([AFM]).
(3) $\mathcal{D}_G(V)$ をコンパクトな台をもつ同変イソトピーで恒等写像とイソトピックな M の同変微分同相全体に C^∞-位相を入れた位相群とする. G が $S(V)$ に推移的に推移的に作用するとき、$\mathcal{D}_G(V)$ は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{R}\times U(1)$ に同型なことが証明される ([AF2]).

次に余次元 1 軌道をもつ一般の G-多様体の場合を考察する.

M が余次元 1 軌道をもつ連結可微分 G-多様体ならば、軌道空間 M/G は S^1 または $[0,1]$ と同相である. M/G が S^1 と同相ならば、M は唯 1 つの軌道型をもち、このとき Theorem 1.5 により $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ 完全群である.

ここでは M/G が $[0,1]$ と同相であるときに $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ の 1 次元ホモロジー群を考察する.

M/G が $[0,1]$ に同相の場合は M は 2 または 3 個の軌道型をもつ。M の主軌道型を (H)、特異軌道型を $(K_0),(K_1)$ をする。

$$\bar{W}(M)=\left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{N(H)\cap K_0}\times\frac{N(H)\cap N(K_1)}{N(H)\cap K_1}\right)_0$$

とおくと、次の結果が証明される。

Theorem 1.8 $(N(H,K_i)/H)_0=U(1)$ or $\{1\}$ $(i=0,1)$ ならば

$$H_1(\mathcal{H}_G(M))\cong H_1(\bar{W}(M)).$$

Remark 1.9 (1) 同変リプシッツ同相群の場合は一般的に次が成立する ([AF8]).

$$H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M))\cong H_1(\bar{W}(M)).$$

(2) 同変微分同相群の場合は

$$W(M)=\left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{N(H)}\times\frac{N(H)\cap N(K_1)}{N(H)}\right)_0$$

とおくと次が成立する ([AF2]).

$$H_1(\mathcal{D}_G(V))\cong H_1(W(M)).$$

Example 1.10 $G=U(1)\times U(1)$,
$M=S^3=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2|\ |x_1|^2+|z_2|^2=1\}$,

$$(u_1,u_2)\cdot(z_1,z_2)=(u_1z_1,\,u_2)z_2)\quad(u_1,u_2)\in G,\ (z_1,z_2)\in S^3,$$

$H=\{1\},\ K_0=K_1=U(1),\ N(H)=\{1\}$,
$((N(H)\cap N(K_i))/H=U(1)\times U(1)$.
$((N(H)\cap N(K_i))/N(H)\cap K_i=U(1)$.

$$\begin{aligned}H_1(\mathcal{H}_G(M)) &\cong H_1(U(1)\times U(1))\cong U(1)\times U(1)\\ H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(M)) &\cong H_1(U(1)\times U(1))\cong U(1)\times U(1)\\ H_1(\mathcal{D}_G(M)) &\cong H_1(U(1)^4)\cong U(1)^4\end{aligned}$$

§2. Theorem 1.6 の証明の方針

以下では簡単のために、$V = \mathbf{C}$ を $G = U(1)$ の標準的表現空間である場合を考察する。
$e = (1,0)$ とおく。
$\pi:\ \mathbf{C} \to \mathbf{C}/U(1)$ 自然な射影
$p:\ \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+$； $p(v) = |v|$.
このとき p は同相写像 $\bar{p}:\ \mathbf{C}/U(1) \to \mathbf{R}_+$ を導く。
$P:\ \mathcal{H}_{U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}(\mathbf{R}_+)$,

$$P(h)(x) = |h(xe)| \quad (x \in \mathbf{R}_+)$$

$\Psi : \mathcal{H}(\mathbf{R}_+) \to \mathcal{H}_G(\mathbf{C})$ を次の式で定義する。

$$\Psi(f)(xze) = f(x)ze \quad (x \in \mathbf{R}_+,\ z \in U(1)).$$

Lemma 2.1 $P:\ \mathcal{H}_{U(1)}(\mathbf{C}) \to \mathcal{H}(\mathbf{R}_+)$ は群準同型写像で、Ψ は P の右逆準同型である。

Theorem 1.4 より、$\mathcal{H}(\mathbf{R}_+)$ は完全群であるので，$H_1(\mathcal{H}_{U(1)}(\mathbf{C}))$ の完全性を示すには、$KerP$ の構造を調べればよい。
Theorem 1.4 によって、 $h \in KerP$ に対して

$$supp(h) \subset \pi^{-1}([0,1]).$$

と仮定してよい.
$h \in KerP$ に対して $a_h : \mathbf{R}_+ \to U(1)$ を次の等式を満たすように定義する.

$$h(x \cdot e) = xa_h(x) \cdot e \quad \text{for} \quad x > 0.$$

このとき $a_h(x) = 1\ (x \geq 1)$.

$E:\ \mathbf{R} \to U(1)$ を指数写像とする. 即ち
$$E(t) = \exp(\sqrt{-1}t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

$\hat{a}_h$ を a_h の E に関する lift で次を満たすものとする.

$$\hat{a}_h:\ (0,\infty) \to \mathbf{R}, \quad E(\hat{a}_h(x)) = a_h(x).$$

このとき $\hat{a}_h(x) = 0$ for $x \geq 1$.

連続写像 $\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ が $\alpha(x) = 0$ $(x \geq 1)$ をみたすとき、$0 < x$, $g \in G$ に対して

$$h_\alpha(xg \cdot e) = \begin{cases} xgE(\alpha(x)) \cdot e & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき $h_\alpha \in KerP$.

ν: $(0,1] \to \mathbf{R}$ を次の条件を満たす C^∞-関数とする (c.f. [AF4], §2).

(0) $0 \leq \nu(x) \leq 1$ $(0 < x \leq 1)$

(1) $supp(\nu) \subset \bigcup_{k=1}^\infty [2^{-2k-1}, 2^{-2k-1}3]$

(2) $supp(1-\nu) \subset \bigcup_{k=1}^\infty [2^{-2k-2}, 2^{-2k-2}3] \cup [2^{-2}, 1]$.

(3) $\nu = 0$ on $\bigcup_{k=1}^\infty [2^{-2k-3}3, 2^{-2k-1}] \cup [2^{-3}3, 1]$.

(4) $\nu = 1$ on $\bigcup_{k=0}^\infty [2^{-2k-4}3, 2^{-2k-2}]$.

(5) $|\nu'(x)| \leq \dfrac{2^3}{x}$.

Let $\beta(x) = \nu(x)\hat{a}_h(x)$ $(0 < x \leq 1)$.
Put $g = h_\beta^{-1} \circ h$ and $\gamma = \hat{a}_g$.
Then β and γ satisty the following conditions.

(1) $h_\beta \circ h_\gamma = h_{\hat{a}_h} = h$.

(2) $supp(\beta) \subset \bigcup_{k=1}^\infty [2^{-2k-1}, 2^{-2k-1}3]$.

(3) $supp(\gamma) \subset \bigcup_{k=1}^\infty [2^{-2k-2}, 2^{-2k-2}3] \cup [2^{-2}, 1]$.

Proposition 2.2 次の条件を満たす連続写像 $\hat{\beta}$: $(0, \infty) \to \mathbf{R}$ と区分的に線形な $\mathbf{R}_+$ の同相写像 ξ が存在する.

(1) $\hat{\beta}(x) = 0$ $(x \geq 1)$

(2) $\beta = \hat{\beta} - \hat{\beta} \circ \xi$.

Proof. a_n を次の式で定義される数列とする.

$$a_1 = 1, \quad a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = n + 1.$$

また

$$t(n,k) = 2^{k-1}(2n-1) \quad \text{for} \quad n, k = 1, 2, \cdots.$$

とおくと $a_{t(n,k)} = n$. また

$$p_n = 2^{-2n-1}, \quad q_n = 2^{-2n-1}3, \quad r_n = 2^{-2n-5}13, \quad s_n = 2^{-2n-5}15.$$

とするとき、

$$q_{n+1} < r_n < s_n < p_n < q_n.$$

$\xi:\ (0,1] \to (0,1]$ を次の条件を満たす区分的に線形な写像とする.

(1) $\xi(p_n) = r_{2n-1},\quad \xi(q_n) = s_{2n-1}$

(2) $\xi(r_{t(n,k)}) = r_{t(n,k+1)},\quad \xi(s_{t(n,k)}) = s_{t(n,k+1)}\quad (k = 1, 2, \cdots)$

(3) ξ は区間 $[q_{n+1}, r_n], [r_n, s_n], [s_n, p_n]$ or $[p_n, q_n]$, で線形

$x \in [p_n, q_n]$ に対して

$$\xi^k(x) = \begin{cases} 2^{-2n-5}(2^{2n+1}x + 12) & \text{for } k = 1, \\ 2^{-t(n,k+1)-5}(2^{2n+1}x + 12) & \text{for } k \geq 2. \end{cases}$$

このとき $\xi^k(x) \in [\xi^k(p_n),\ \xi^k(q_n)] = [r_{t(n,k)},\ s_{t(n,k)}]$.

$$\hat{\beta}(x) = \beta(\xi^{-k}(x)) \quad \text{if } x \in [\xi^k(p_n),\ \xi^k(q_n)] \quad (n \geq 1,\ k \geq 0).$$

とすると、$x \in [p_n, q_n]$ に対して

$$\hat{\beta}(\xi^k(x)) = \begin{cases} \beta(x) & \text{for } k = 0, \\ \beta(2^{-2n-1}(2^{2n+5}\xi^k(x) - 12)) & \text{for } k = 1, \\ \beta(2^{-2n-1}(2^{t(n,k+1)+5}\xi^k(x) - 12)) & \text{for } k \geq 2. \end{cases}$$

定義より次が成立する.

(1) $supp(\hat{\beta}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [p_k, q_k] \cup [r_k, s_k]$

(2) $\hat{\beta} - \hat{\beta} \circ \xi = \beta$.

従って Proposition 2.2 が証明された.

Proposition 2.2 より

$$h_\beta = h_{\hat{\beta}} \circ \Psi(\xi)^{-1} \circ h_{\hat{\beta}}^{-1} \circ \Psi(\xi).$$

従って $h_\beta \in [KerP,\ \mathcal{H}_G(V)]$. 同様に $h_\gamma \in [KerP,\ \mathcal{H}_G(V)]$ が示されて、Theorem 1.6 が証明される.

§3. Theorem 1.8 の証明の方針

M を余次元 1 軌道をもつ G-多様体で、M/G が $[0,1]$ と同相なものとする.
(H): M の主軌道型
$(K_0),(K_1)$: M の特異軌道型
このとき

$$M \cong G \times_{K_0} D(V_0) \cup_\eta G \times_{K_1} D(V_1),$$

ここで η は境界を同一視する同変微分同相である. また V_i は余次元 1 軌道をもつ K_i の表現空間で $D(V_i)$ は V_i の単位円板である.

Lemma 3.1 可微分 G-写像 $\theta : M \to [0,2]$ と G-微分同相 $\alpha : \theta^{-1}((0,2)) \to G/H \times (0,2)$ で、次を満たすものが存在する.

(1) $\phi : M/G \to [0,2]$ を $\phi \circ \pi = \theta$ を満たす G-写像 θ から引き起こされる写像とすると、ϕ は同相写像である.

(2) $\theta \circ \alpha^{-1} : G/H \times (0,2) \to (0,2)$ は第 2 成分への射影である.

$P : \mathcal{H}_G(M) \to \mathcal{H}([0,2])$ を

$$P(h)(\theta(x)) = \theta(h(x)) \quad \text{for } h \in \mathcal{H}_G(M),\ x \in M.$$

により定義される準同型とする.

$f \in \mathcal{H}([0,2])$ に対して、写像 $\Psi(f) : M \to M$ を次のように定義する.
(1) $\Psi(f)(\alpha^{-1}(gH,x)) = \alpha^{-1}(gH, f(x))$ for $(gH,x) \in G/H \times (0,2)$,
(2) $\Psi(f)$ は $\theta^{-1}(0) \cup \theta^{-1}(2)$ 上では恒等写像.

Lemma 3.2 $\Psi : \mathcal{H}([0,2]) \to \mathcal{H}_G(M)$ は群準同型で P の逆写像である.

$h \in \mathcal{H}_G(M)$ に対して $a_h = \ell_{\Psi(P(h^{-1}))\circ h}$ とおく.
$\pi_i : G \to G/K_i$, $\bar{\pi}_i : G/H \to G/K_i$ $(i=0,1)$ を自然な射影とする.
$S(V_i)$ の点 e_i で等方部分群 $(K_i)_{e_i}$ が H と一致するものが存在する.

$$\bar{\pi}_i \left(\frac{N(H) \cap N(K_i)}{H} \right) \cong \frac{N(H) \cap N(K_i)}{N(H) \cap K_i} \quad (i = 0,1)$$

である.

Lemma 3.3

(1) 次の極限が存在する.

$$T_0(h) = \lim_{x\to 0} \bar{\pi}_0(a_h(x)) \in (N(H)\cap N(K_0))/(N(H)\cap K_0)$$

$$T_1(h) = \lim_{x\to 2} \bar{\pi}_1(a_h(x)) \in (N(H)\cap N(K_1))/(N(H)\cap K_1).$$

(2) $h(gK_0) = gT_0(h)$, $h(gK_1) = gT_1(h) \quad (g \in G)$.

$$T : \mathcal{H}_G(M) \to \bar{W}(M) = \left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{N(H)\cap K_0} \times \frac{N(H)\cap N(K_1)}{N(H)\cap K_1}\right)_0$$

を $T(h) = (T_0(h)^{-1},\ T_1(h)^{-1})$ により定義する.

Lemma 3.4 T は上への群準同型である.

$$\hat{T} : \mathcal{H}_G(M) \to \bar{W}(M) = \left(\frac{N(H)\cap N(K_0)}{K_0\cap N(H)} \times \frac{N(H)\cap N(K_1)}{K_1\cap N(H)}\right)_0$$

を $\hat{T}(h) = T(\Psi(P(h^{-1})\circ h))$ で定義される群準同型とする.

Proposition 3.5 $Ker\,\hat{T}$ は $[Ker\,\hat{T},\ \mathcal{H}_G(M)]$ に含まれる.

Lemma 3.4 より次は完全列:

$$Ker\,\hat{T}/[Ker\,\hat{T}, \mathcal{H}_G(M)] \to H_1(\mathcal{H}_G(M)) \to H_1(\bar{W}(M)_0) \to 0.$$

従って Proposition 3.5 から

$$H_1(\mathcal{H}_G(M)) \cong H_1(\bar{W}(M)).$$

が示されて、Theorem 1.8 が証明される.

参考文献

[AF1] K. Abe and K. Fukui, *On commutators of equivariant diffeomorphisms*, Proc. Japan Acad., 54 (1978), 52-54.

[AF2] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, Topology, 40 (2001), 1325-1337.

[AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.

[AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, J. Math. Soc. Japan, 55 (2003), 947-956.

[AF7] K. Abe and K. Fukui, *The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its applications*, Journal of Topology, 1 (2008), 461-476.

[AF8] K. Abe and K. Fukui, *On the first homology of the group of Lipschitz homeomorphisms of G-manifolds with codimension one orbit*, preprint

[AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, J. Math. Soc. Japan, 58 (2006), 1-15.

[EK] R. D. Edward and R. C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. Math. (2), 93 (1971), 63-88.

[FU] *Commutators of foliation preserving homeomorphisms for certain compact foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 34 (1998), 65-73.

[MA] Mather,J.N., The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms, Topology, **10** (1971), 297-298.

[RY] Rybicki,T., On commutators of equivariant homeomorphisms, Topology and its applications, **154** (2007), 1561-1564.

[TS] T. Tsuboi, *On the perfectness of groups of diffeomorphisms of the interval tangent to the identity at the endpoints*, Foliations; geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002), 421-440.

[TH] W. Thurston, *Foliations and group of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974), 304-307.