数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 100-106

The automorphism group of a compact smooth toric variety and its representations on sections of equivariant line bundles

大阪市立大学理学研究科 石田 裕昭 (Hiroaki Ishida)
Osaka City University

1 はじめに

本稿では, 非特異かつ完備なトーリック多様体上の同変直線束から誘導される, 正則な（大域）切断のなす複素ベクトル空間上の表現について考察する. トーリック多様体の基本的な性質については [2], [3] や [4] を参照してもらいたい. また, [1] の方法を大いに参考にさせていただいた.

一般に, 群 G と空間 X 上の（左）G-同変ベクトル束 E を考えるとき, 大域切断の空間 $\Gamma(X, E)$ は次のように（左）G-加群になる: 切断 $s \in \Gamma(X, E)$ と $g \in G$ に対し

$$s^g := gsg^{-1},$$

すなわち, 次の図式を可換にするような新たな切断 s^g を定める:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] & L \\ X \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"] & X \arrow[u, dotted, "s^g := gsg^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

本稿では X として完備かつ非特異なトーリック多様体, G として X の自己同型群の単位元成分の拡大, E として直線束の場合を論じる.

2 トーリック多様体

定義 2.1. （n 次元）**トーリック多様体** X とは,

- X は基礎体 $\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体.
- X は n 次元代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ をザリスキ開集合として含む.
- $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の群の演算が, X 上の $(\mathbb{C}^*)^n$-作用に拡大する.

を満たす代数多様体のことである.

ここで, 作用はすべて代数的, すなわち, 各元は（代数多様体としての）自己同型射として作用するものとする.

以下, トーリック多様体 X の次元は n とする.

例 2.2 (アフィン空間 $\mathbb{C}^n$). n 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ はトーリック多様体である. 明らかに $\mathbb{C}^n$ は代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ をザリスキ開集合として含み, $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の群の演算は, $\mathbb{C}^n$ 上の次のような $(\mathbb{C}^*)^n$-作用に拡大する: $(t_1,\dots,t_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ と $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して,

$$(t_1,\dots,t_n)\cdot(z_1,\dots,z_n):=(t_1z_1,\dots,t_nz_n).$$

例 2.3 (複素射影空間 $\mathbb{P}^n$). n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ は非特異かつ完備なトーリック多様体である. 実際, ザリスキ開集合

$$T:=\{[z_0,\dots,z_n]\in\mathbb{P}^n|\ \text{すべての } i \text{ について } z_i\neq 0\}$$

から $(\mathbb{C}^*)^n$ への写像

$$[z_0,\dots,z_n]\mapsto\left(\frac{z_1}{z_0},\dots,\frac{z_n}{z_0}\right)$$

によって, $T\subset\mathbb{P}^n$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型であることが確かめられる（ここで, $[z_0,\dots,z_n]$ は $\mathbb{P}^n$ の斉次座標）. また, 上の同型射により, $\mathbb{P}^n$ における $(\mathbb{C}^*)^n$-作用は, $(t_1,\dots,t_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ と $[z_0,\dots,z_n]\in\mathbb{P}^n$ に対して,

$$(t_1,\dots,t_n)\cdot[z_0,\dots,z_n]:=[z_0,t_1z_1,t_2z_2,\dots,t_nz_n]$$

と定められる.

以下, トーリック多様体 X は完備かつ非特異なものとする.
トーリック多様体 X は, 次の情報 $(K;v_1,\dots,v_m)$ によって完全に決定される:

- $X_1,\dots,X_m$ を $(\mathbb{C}^*)^n$-不変な余次元 1 の部分多様体（これを $(\mathbb{C}^*)^n$-**不変因子**という）とする. このとき, 頂点集合 $[m]$ 上の（有限）単体複体 K を次で定義する:

$$K:=\left\{I\subset[m];\bigcap_{i\in I}X_i\neq\emptyset\right\}$$

- 格子ベクトル $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$ と $t\in\mathbb{C}^*$ に対して,

$$\lambda_a(t):=(t^{a_1},\dots,t^{a_n})\in(\mathbb{C}^*)^n$$

  と定める. 各 $(\mathbb{C}^*)^n$-不変因子 X_i に対して, 次を満たす格子ベクトル $v_i\in\mathbb{Z}^n$ が一意的に定まる:
  - すべての点 $x\in X_i$ と $t\in\mathbb{C}^*$ に対して, $\lambda_{v_i}(t)\cdot x=x$.
  - すべての点 $x\in X_i$, $\xi\in T_xX/T_xX_i$ と $t\in\mathbb{C}^*$ に対して, $(\lambda_{v_i}(t))_*(\xi)=t\xi$.

定義 2.4. $\Sigma:=(K;v_1,\dots,v_n)$ をトーリック多様体 X の**扇**（***fan***）という.

非特異かつ完備なトーリック多様体 X の扇 Σ について, 次が知られている:

命題 2.5. *1.* K の $(n-1)$ 次元単体 I について, $\{v_i\}_{i\in I}$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底をなす.

2. 単体 $I=\{i_1,\ldots,i_k\}\in K$ に対して, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 σ_I を

$$\sigma_I := \{a_1v_{i_1}+\cdots+a_kv_{i_k};\text{すべての } j \text{ で } a_j\geq 0\}$$

で定義する（これを, 扇 Σ の**錐**という）. このとき, 任意の 2 つの単体 $I,J\in K$ について,

$$\sigma_I\cap\sigma_J=\sigma_{I\cap J}$$

が成り立つ.

3. 扇 Σ のすべての錐の和集合は $\mathbb{R}^n$ 全体になる. すなわち,

$$\bigcup_{I\in K}\sigma_I=\mathbb{R}^n.$$

扇 Σ から完備かつ非特異なトーリック多様体 X が完全に復元される. 添字の集合 $I\subset[m]$ に対して,

$$U_I := \{z=(z_1,\ldots,z_m)\in\mathbb{C}^m; i\notin I \text{ に対し}, z_i\neq 0\}$$

とし, 頂点集合 $[m]$ 上の単体複体 K に対して

$$U(K):=\bigcup_{I\in K}U_I\subset\mathbb{C}^m$$

と定義する.

定義 2.6. $U(K)$ を ***coordinate subspace arrangement complement in*** $\mathbb{C}^m$ という.

注意 2.7. $U(K)$ は非特異なトーリック多様体である. これは, トーリック多様体 $\mathbb{C}^m$ の $(\mathbb{C}^*)^m$-不変なザリスキ開部分集合であることからわかる.

$(\mathbb{C}^*)^m$ から $(\mathbb{C}^*)^n$ への準同型

$$\mathcal{V}(t_1,\ldots,t_m):=\prod_{i=1}^n\lambda_{v_i}(t_i)$$

を考える. このとき,

定理 2.8. $\mathcal{V}:(\mathbb{C}^*)^m\to(\mathbb{C}^*)^n$ は, $\ker\mathcal{V}\cong(\mathbb{C}^*)^{m-n}$ をファイバーに持つ主ファイバー束 $\widetilde{\mathcal{V}}:U(K)\to X$ に拡張する.

$$\begin{tikzcd} U(K) \arrow[r, dotted, "\widetilde{\mathcal{V}}"] \arrow[d, dash] & X \arrow[d, dash] \\ (\mathbb{C}^*)^m \arrow[r, "\mathcal{V}"] & (\mathbb{C}^*)^n \end{tikzcd}$$

注意 2.9. 実は X が完備, 非特異でなくても, 次の 2 条件を満たせば定理 *2.8* がいえる:

- X は軌道体（*orbifold*）である.
- $v_1, \dots, v_m$ が $\mathbb{Z}^n$ を張る.

もちろん, X が完備かつ非特異であれば上の 2 条件を満足している.

系 2.10. 特に, $X \cong U(K)/\ker \mathcal{V}$.

3 トーリック多様体上の直線束

次の事実が知られている:

命題 3.1. トーリック多様体 X 上の複素直線束 $L \to X$ に対し, 全空間 L への $(\mathbb{C}^*)^n$-作用で, 底空間 X への作用の制限が, X における $(\mathbb{C}^*)^n$-作用と一致するものが存在する.

この事実から, 次がわかる:

命題 3.2. 全空間 L はトーリック多様体である.

証明. 命題 3.1 より, L に $(\mathbb{C}^*)^n$ が効果的に作用しているとする. 示すべきことは, L に $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の埋め込みとその作用を与えることである. L を $(\mathbb{C}^*)^n \subset X$ に制限したもの $L|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ は自明な直線束であり, さらにいたるところ 0 でない $(\mathbb{C}^*)^n$-不変な切断 $s: (\mathbb{C}^*)^n \to L|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ がとれる. $(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ の L への埋め込みを, $(t, t') \in (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ に対して

$$(t, t') \mapsto t's(t)$$

で定める. この埋め込まれた $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の群演算が L への作用に拡大することを確認する. $t' \in \mathbb{C}^*$ は各ファイバーにスカラー倍として作用することに注意する. さらに $(\mathbb{C}^*)^n$ の L への作用と, $\mathbb{C}^*$ の作用（スカラー倍）が可換であることから, $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の L への求める作用を得た. □

系 3.3. X 上の任意の複素直線束 $L \to X$ は, ある同伴直線束（*associated line bundle*）$U(K) \times_{\ker \mathcal{V}} \mathbb{C}$ と同型である.

証明. 節 2 の構成方法と, 上の命題に注意すれば明らかである. □

命題 3.4. f_1, f_2 をそれぞれ $L \to X$ の束同値写像とする. すなわち, 同型射 $f_i : L \to L$ であって, 各ファイバーにおける制限が線形同型写像である（$i = 1, 2$）. それぞれの底空間 X への制限 $f_1|_X$, $f_2|_X$ が一致している, すなわち, $f_1|_X = f_2|_X$ ならば, ある定数 $c \in \mathbb{C}^*$ が存在して,

$$f_1 = cf_2.$$

つまり, 任意の束同値写像は（スカラー倍を除いて）底空間における制限によって決まる.

証明. 与えられた f_1, f_2 に対して, $f_2^{-1} \circ f_1 : L \to L$ を考える. 仮定より明らかに, 底空間 X

への制限 $(f_2^{-1} \circ f_1)|_X$ は恒等写像 id_X である. 従って, 射 $f_2^{-1} \circ f_1 : L \to L$ は各ファイバー $L_x (x \in X)$ ごとに線形変換を引き起こす. 各ファイバー L_x は 1 次元ベクトル空間であるから, 0 でない $u \in L_x$ に対して

$$f_2^{-1} \circ f_1(u) = c(x)u$$

となるような可逆な関数 $c : X \to \mathbb{C}^*$ を得る. 一方で, X の完備性より, c は定数値関数であり, 命題がいえた. □

上の命題 3.4 は, 最初の問題はトーリック多様体の自己同型群を見ればよい, ということを主張している. 次節では, トーリック多様体の自己同型群について知られていることを紹介する.

4 トーリック多様体の自己同型群

商空間としてのトーリック多様体の構成（系 2.10）は, トーリック多様体 X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ のよい記述を与える.

定義 4.1. 群 G とその部分群 H に対して, $C_G(H), N_G(H)$ でそれぞれ H の G における中心化群（*centralizer*）, 正規化群（*normalizer*）を表し, トーリック多様体 X に対して $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$, $\widetilde{\mathrm{Aut}}(X)$ をそれぞれ次で定義する:

- $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X) := C_{\mathrm{Aut}(U(K))}(\ker \mathcal{V})$
- $\widetilde{\mathrm{Aut}}(X) := N_{\mathrm{Aut}(U(K))}(\ker \mathcal{V})$

定義 4.1 の $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X), \widetilde{\mathrm{Aut}}(X)$ の元は, 定義より明らかに $U(K)$ における $\ker \mathcal{V}$ の軌道を $\ker \mathcal{V}$ の軌道へ移す. 従って, トーリック多様体 X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ への自然な準同型 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ が誘導される.

命題 4.2. 次が成り立つ:

- 自然な準同型 $\widetilde{\mathrm{Aut}}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$ は全射である.
- $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$ は $\widetilde{\mathrm{Aut}}(X)$ の単位元成分（*identity component*）であり, アフィン代数群である.

5 主定理

最初の問題を考えるにあたって, 与えられた直線束 $L \to X$ に対して, 大域切断のなす複素ベクトル空間を記述する必要がある. α を $\ker \mathcal{V}$ の 1-次元表現とし, α に随伴する直線束の全空間を L_α とする; すなわち, $U(K) \times \mathbb{C}$ への右 $\ker \mathcal{V}$-作用を

$$(z, u) \cdot k := (k^{-1} \cdot z, \alpha(k^{-1})(u))$$

と定め, その作用による商空間を L_α と定める. 任意の直線束 $L \to X$ はある α が存在して $L \cong L_\alpha$ となることを注意しておく.

命題 5.1. 直線束 $L_\alpha \to X$ の大域切断の空間 $\Gamma(X, L_\alpha)$ は, 次の空間と同一視される:

$$\{f \in \mathcal{O}(U(K)); f(z \cdot k) = \alpha(k^{-1})f(z)\} := S_\alpha$$

（ここで, $\mathcal{O}(U(K))$ は $U(K)$ 上の正則（*regular*）な関数全体のなす環を表す）.

注意 5.2. $U(K)$ の定義より, $\mathcal{O}(U(K))$ は m 変数の多項式環と同型になる.

証明. $q : U(K) \times \mathbb{C} \to L_\alpha$ を商写像とする. 任意の切断 $s : X \to L_\alpha$ は閉写像であることから, 部分集合 $q^{-1}(s(X))$ は $U(K) \times \mathbb{C}$ の閉集合である. さらに第一射影の制限 $p : q^{-1}(s(X)) \to U(K)$ は同型射であることから, 特に $q^{-1}(s(X))$ はある関数 $f : U(K) \to \mathbb{C}$ のグラフである. このとき, $q^{-1}(s(X))$ が $\ker \mathcal{V}$-不変であることから, 関数 f は S_α の元である.
逆に任意の $k \in \ker \mathcal{V}$ に対して $f(z \cdot k) = \alpha(k^{-1})f(z)$ を満たす関数 f に対して, 切断 s_f を各点 $[z] \in X$ において次のように定義する:

$$s_f([z]) := [z, f(z)],$$

ここで $[z], [z, u]$ はそれぞれ $z \in U(K), (z, u) \in U(K) \times \mathbb{C}$ の $\ker \mathcal{V}$ の軌道を表す. f の性質より s_f は well-defined であり, これが同型対応を与える. □

L_α には自然な左 $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$-作用が入る; $U(K) \times \mathbb{C}$ への左 $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$-作用を,

$$g \cdot (z, u) := (g \cdot z, u)$$

で定める. $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$ の定義から, この作用は L_α 上の作用を誘導する. 以上のことから, 次の主定理を得る:

定理 5.3. $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$-同変直線束 $L_\alpha \to X$ の大域切断の空間に表れる表現は, $\mathcal{O}(U(K))$ の部分加群 S_α と同型である. ここで, S_α への $\widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$-作用は $f \in S_\alpha$ と $g \in \widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$ に対して

$$f^g(z) := f(g^{-1} \cdot z)$$

と定める.

証明. 命題 5.1 の同一視を用いる. $f \in S_\alpha$ に対して, 対応する切断を $s_f : X \to L_\alpha$ と書くこ

とにする．このとき，$g \in \widetilde{\mathrm{Aut}^0}(X)$ を作用させると，

$$\begin{aligned} s_f^g([z]) &= g s_f g([z]) \\ &= g s_f([g^{-1} \cdot z]) \\ &= g \cdot [g^{-1} \cdot z, f(g^{-1} \cdot z)] \\ &= [z, f(g^{-1} \cdot z)] \\ &= [z, f^g(z)] \end{aligned}$$

とかける．したがって定理を得た． □

参考文献

[1] David A. Cox *The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety*, arXiv:alg-geom/9210008v2, 21 Jun 1993.

[2] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. 168, Springer-Verlag, Berlin Heidenberg New York, 1996.

[3] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[4] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidenberg New York, 1988.