数理解析研究所講究録
第 1671 巻 2009 年 120-127

Multiple Existence of Nonradial Positive Solutions for a Coupled Nonlinear Schrödinger System

平野　載倫（横浜国立大学）

1. Introduction

本講演においては、以下のような Coupled Schrödinger system を考える。

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u+\mu_1 u &= u^3+\beta uv^2 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \\ -\Delta v+\mu_2 v &= v^3+\beta u^2 v \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

ここで $\mu_1,\mu_2>0$ かつ $\beta<0$ である。

Coupled nonlinear Schrödinger system は非線形の光工学現象等を記述するシステムとして考えられてきた（[9], [10], [12] 参照）．定数 β が正の場合には、問題 (P) の解の存在については、Ambrosetti & Colorado[1], Maia, Montefusco & Pellacci[8] および Lin & Wei[6] によって考察された。彼らの結果は、β が正の場合には、最小エネルギー解 (u,v) が存在し、$u,v>0$ が成り立つことを証明している。これらの解は

$$u(x)\longrightarrow 0, v(x)\longrightarrow 0, \qquad \text{as } |x|\longrightarrow\infty \tag{1.1}$$

を満たしている。さらには、u,v ともに radially symmetric であることも知られている ([14]). 一方、$\beta<0$ の場合は、エネルギー最小解がないことが Lin&Wei によって示されている。さらには、正値解が必ずしも raidal でないことも知られている。$\beta<0$ で $|\beta|$ が小さい場合については、ひとつのコンポーネントが 0 付近に集中していて、他のコンポーネントが正多角形の頂点に集中しているような形状の解の存在を Lin & Wei[7] が示している。本講演では、Lin & Wei の結果を 3 次元の正多面体に拡張できること報告する。

主結果を述べるために、いくつかの定義をする。$B_r(x)$ は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の半径 $r>0$, 中心 $x\in\mathbb{R}^3$ の開球とする。$\mathbb{R}^3$ の内積は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ であらわされる。$H=H^1(\mathbb{R}^3)$ および $\mathbb{H}=H\times H$ とおく。また $\mu_0=1$ とおく。$\|\cdot\|_{\mu_i}$ は H のノルムで $\|u\|_{\mu_i}^2=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\mu_i|u|^2)dx, \forall\, u\in H$ と定義する（$i\in\{0,1,2\}$）。$u\in H$ に対して、$u^+(x)=\max\{u(x),0\}$, $u^-(x)=\max\{-u(x),0\}$ とおく。各 $p\geq 1$ に対しては、$|\cdot|_p$ で $L^p(\mathbb{R}^3)$ の

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B40. 35B45; secondary 35J40.

Key words and phrases. Coupled Schrödinger equations, Sign changing solutions.

ノルムを表すものとする。 Hilbert space $\mathbb{H}$ には $\|\mathcal{U}\|^2 = \|u\|^2_{\mu_1} + \|v\|^2_{\mu_2}$ $\forall\, \mathcal{U} = (u, v) \in \mathbb{H}$ でノルムを定義する。さて、各 $i \in \{0, 1, 2\}$ にたいして問題

$$(P_i) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \mu_i u &= \quad u^3 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ \quad u(x) &> \quad 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ \quad u(x) &\longrightarrow \quad 0 & \text{as } |x| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

は radial solution を持つ。この解を U_i(cf. [4], [5]) とおく。 U_i は唯一の正値解である。さらに U_i は $I_i(U_i) = c_i = \min\{I(v) : v \in \mathcal{S}_i\}$ をみたすことが知られている。ここで、I_i は問題 (P_i) に関連する汎関数で

$$I_i(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{\mu_i} - \frac{1}{4}\left|v^+\right|^4_4 \qquad \forall\, v \in H \tag{1.2}$$

と定義される。また $\mathcal{S}_i$ は以下の集合である

$$\mathcal{S}_i = \left\{v \in H : \|v\|^2_{\mu_i} = \left|v^+\right|^4_4\right\} \qquad \text{for } i = 1, 2.$$

各 $x \in \mathbb{R}^3$ および $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して、 $U_{i,x}(\cdot) = U_i(\cdot - x)$ とおく。すると

$$|U_i(x)|_{\mu_i}\, |x| \exp(\sqrt{\mu_i}\,|x|) \longrightarrow c > 0, \text{ as } |x| \longrightarrow \infty \qquad \forall\, i \in \{0, 1, 2\}. \tag{1.3}$$

であることはよく知られている。([5]) 各 $u \in L^4(\mathbb{R}^3)$ に対して $\widehat{u}(x) = \int_{B_1(x)} |u(x)|^4\, dx$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ と定義する。 以上の準備のもとで、主結果を述べる。 我々は $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合を考えているので、 $\mu_2 < \mu_1$ として一般性を失わない。.

Theorem 1. $\sqrt{\mu_1/\mu_2}$ が無理数であると仮定する。このとき、各 $i \in \{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$ に対して $\beta_i \in (-1, 0)$ が存在して存在して以下のような条件を満たす。すなわち、 $\forall \beta \in (\beta_i, 0)$ に対して *positive solution* $\mathcal{U}_i \in \mathbb{H}$ *of* (P) で次の条件を満たすようなものがある。

（１） $ic_1 + c_2 < \Phi(\mathcal{U}_i) < ic_1 + 2c_2$

（２） $\mathcal{U}_i$ は以下のようにあらわされる

$$\mathcal{U}_i = (U, V) = (\sum_{j=1}^{i} U_{1,x_j} + u, U_2 + v) \tag{1.4}$$

ここで $\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$ は $\mathbb{R}^3$ において regular i−polyhedra を形成する。また、 $u, v \in H$ は $\|(u, v)\|$ が十分に小さく

$$\widehat{U}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{U}\right|_\infty \ \text{ for } \forall z \in \mathbb{R}^3 \backslash (\cup_{j=1}^{i} B_{R_0}(x_j)) \text{ および} \tag{1.5}$$

$$\widehat{V}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{V}\right|_\infty \ \forall\, z \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{R_0}(0).$$

を満たす。

Remark 1. $\mathcal{U}_i = (U, V)$ の表現 (1.4) は一意に決まる。すなわち各 $\mathcal{U}_i$ に対して、$(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ は一意に決定される。

REMARK 2. *Theorem 1* の結論から、$\beta < 0$ で $|\beta|$ が十分小さければ、問題 (P) は少なくとも 6 個の *positive solution* を持つといえる。. *[15]* においては、 (P) の *ositive solution* についてｈ、*(1.4)* の形が $\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$ が *regular cube* もしくは *tetrahedra* を形作るばあいについて、条件

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} < \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} & \textit{cube} \text{ の場合} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \textit{tetrahedra}. \text{の場合} \end{cases}$$

のもとで得られている。

THEOREM 2. $\sqrt{\mu_1/\mu_2}$ が無理数だと仮定する。このとき、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\widetilde{\beta}_k \in (-1, 0)$ が存在して次の条件を満たす。各 $\beta \in (\widetilde{\beta}_k, 0)$ に対して問題 (P) は次の条件を満たすような解 $\widetilde{\mathcal{U}}_k$ を持つ。

(1) $kc_1 + c_2 < \Phi(\widetilde{\mathcal{U}}_k) < kc_1 + 2c_2$

(2) $\widetilde{\mathcal{U}}_k$ はつぎのように表わされる。すなわち、

$$\widetilde{\mathcal{U}}_k = (U, V) = (\sum_{j=1}^{k} U_{1, x_j} + u, U_2 + v) \tag{1.6}$$

ここで、 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset \mathbb{R}^3$ は regular k-polygon を $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間で形成する。また、 $u, v \in H$ は $\|(u, v)\|$ が十分小さく、

$$\widehat{U}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{U}\right|_\infty \ \forall z \in \mathbb{R}^3 \backslash (\cup_{j=1}^k B_{R_0}(x_j)) \text{ および } \widehat{V}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{V}\right|_\infty \ \forall z \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{R_0}(0).$$

を満たす。

REMARK 3. 問題 (P) の *positive solution* については、*Lin & Wei [15]* によって、*2* 次元空間においては示されている。彼らは μ_1, μ_2 が以下の条件を満たすことを仮定している。

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} < \sin\frac{\pi}{k}.$$

2. 議論の概略

以下では $\sqrt{\mu_1/\mu_2}$ が無理数であると仮定する。各 $u, v \in H = H^1(\mathbb{R}^3)$ に対して、$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} uv$ とする。 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mu_i}$ は H の内積で以下のように定義されたものとする：$\langle u, v\rangle_{\mu_i} = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u \cdot \nabla v + \mu_i uv)\ \forall u, v \in H \quad (i \in \{0, 1, 2\})$. $\mathbb{H}$ の内積は $\langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\rangle_{\mathbb{H}} = \langle U_1, U_2\rangle_{\mu_1} + \langle V_1, V_2\rangle_{\mu_2}\ \forall \mathcal{U}_1 = (U_1, V_1), \mathcal{U}_2 = (U_2, V_2) \in \mathbb{H}$ で与えられるものとする。各 $u \in L^4(\mathbb{R}^3)$ に対して t $\Omega(u) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \widehat{u}(x) \geq \frac{|\widehat{u}|_\infty}{2}\right\}$ および

$$\mathcal{B}(u) = \frac{\int_{\Omega(u)} x(\widehat{u}(x) - \frac{|\widehat{u}|_\infty}{2})dx}{\int_{\Omega(u)}(\widehat{u}(x) - \frac{|\widehat{u}|_\infty}{2})dx}$$

とおく。 $\mathcal{B}$ は generalized barycenter と呼ばれる（[11]、[2]）. 各 $a \in \mathbb{R}$ および汎関数 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ に対して，F^a はレベルセットを表すものとする。すなわち、 $F^a = \{v \in \mathbb{H} : F^a(v) \leq a\}$. ed on H.

各 $u \in H\setminus\{0\}$ （ただし、$u^+ \not\equiv 0$ を満たすもの）に対して、 $tu \in \mathcal{S}_i$ を満たすような $t > 0$ がただ一つ存在することは容易に確かめられる。 U_i の定義から $U_i(x) = \sqrt{\mu_i}U_0(\sqrt{\mu_i}x), \forall x \in \mathbb{R}^3$ も容易に確かめられる。これより、

$$c_1 = \sqrt{\mu_1}c_0 > c_2 = \sqrt{\mu_2}c_0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。 $i \in \{0,1,2\}$ とする。このとき、$\left\{U_{i,x} : x \in \mathbb{R}^3\right\}$ は nondegenerate critical set of I_i であることが知られている ([15]). ここで、(P) に関する汎関数 $\Phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{U}) &= \frac{1}{2}(\|U\|^2_{\mu_1} + \|V\|^2_{\mu_2}) - \frac{1}{4}(\left|U^+\right|^4_4 + \left|V^+\right|^4_4) - \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(U^+)^2(V^+)^2 \\ &= \Phi_1(\mathcal{U}) + \Phi_2(\mathcal{U}) \qquad \forall\, \mathcal{U} = (U,V) \in \mathbb{H},\end{aligned}$$

ここで

$$\Phi_1(\mathcal{U}) = \frac{1}{2}\|U\|^2_{\mu_1} - \frac{1}{4}\left|U^+\right|^4_4 - \frac{\beta}{4}\int_{R^3}(U^+)^2(V^+)^2$$

および

$$\Phi_2(\mathcal{U}) = \frac{1}{2}\|V\|^2_{\mu_1} - \frac{1}{4}\left|V^+\right|^4_4 - \frac{\beta}{4}\int_{R^3}(U^+)^2(V^+)^2$$

である。簡単な計算から次が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}\langle\nabla\Phi(\mathcal{U}),\mathcal{V}\rangle_{\mathbb{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix}\nabla_u\Phi(\mathcal{U})\\ \nabla_v\Phi(\mathcal{U})\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}W\\ Z\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \left\langle -\Delta U + \mu_1 U - (U^+)^3 - \beta U^+(V^+)^2, W\right\rangle \\ &\quad + \left\langle -\Delta V + \mu_2 V - (V^+)^3 - \beta(U^+)^2V^+, Z\right\rangle\end{aligned}$$

$\forall\, \mathcal{U} = (U,V), \mathcal{V} = (W,Z) \in \mathbb{H}$. 次に

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_+ = \{(U,V) \in \mathbb{H}\setminus\{0\} : \|U\|^2_{\mu_1} &= \left|U^+\right|^4_4 + \beta\int_{\mathbb{R}^3}(U^+)^2(V^+)^2, \\ \|V\|^2_{\mu_2} &= \left|V^+\right|^4_4 + \beta\int_{\mathbb{R}^3}(U^+)^2(V^+)^2\}\end{aligned}$$

とおく。すると、$\mathcal{U} = (U,V) \in \mathcal{M}_+$ が Φ の critical point であることと、$\mathcal{U}$ が (P) の positive solution であることは同値である。. 一方、各 $\mathcal{U} = (U,V) \in \mathcal{M}_+$ に対して $(s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ で $(sU,tV) \in \mathcal{M}_+$ を満たすものがあることがわかる。実際、各 $\mathcal{U} = (U,V)$ に対して $U \not\equiv 0, V \not\equiv 0$ および $(sU,tV) \in \mathcal{M}_+$ が成り立つことと

$$\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\|U\|^2_{\mu_1}\\ \|V\|^2_{\mu_2}\end{pmatrix}$$

となることは等しい。ここで、

$$A = \begin{pmatrix}\left|U^+\right|^4_4 & \beta\int_{\mathbb{R}^3}(U^+)^2(V^+)^2\\ \beta\int_{\mathbb{R}^3}(U^+)^2(V^+)^2 & \left|V^+\right|^4_4\end{pmatrix}$$

である。$\beta \in (-1,0)$ であることに注意すれば、Schwartz's inequality より A^{-1} が存在して $(s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ が唯一定まることが見て取れる。各 $\mathcal{U} = (U,V) \in \mathbb{H}$ （$U \not\equiv 0, V \not\equiv 0$) に対して $\mathcal{N}\mathcal{U} = \mathcal{N}(U,V) = (\mathcal{N}_1U, \mathcal{N}_2V) = (sU,tV) \in \mathcal{M}_+$ とおくことにする。

以下では Theorem 1 において $i = 2$ のばあいについて議論する。ここで、$H_2 \subset H$, $\mathbb{H}_2 \subset \mathbb{H}$ および $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_+$ を以下のように定義する。

$$H_2 = \left\{u \in H : u(x) = u(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3\right\}, \qquad \mathbb{H}_2 = H_2 \times H_2,$$

および

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_+ \cap \mathbb{H}_2.$$

$\sqrt{\mu_1/\mu_2}$ は無理数と仮定しているので, $\delta_2 \in (0, c_2)$ で以下の条件を満たすようなものがとれる。

(2.2) $$c_1 + kc_2 \notin [2c_1 + c_2 - \delta_2, 2c_1 + c_2 + \delta_2] \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1. 与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、以下の条件を満たす $\beta_\varepsilon \in (\beta_1, 0)$ が存在する。すなわち、各 $\beta \in (\beta_\varepsilon, 0)$ および $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して

(2.3) $$\Phi(\mathcal{N}(U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2)) < 2c_1 + c_2 + \varepsilon$$

および

(2.4) $$\Phi(\mathcal{N}(U_1, U_2)) < \frac{7}{4}c_1 + c_2$$

が成り立つ。

3. Theorem 1 の証明(i = 2)

以下では $\beta \in (\beta_1, 0)$ を仮定する。

$$b_R(U) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |U|_{\mu_1}^2 \qquad \forall U \in H,\ R > 0$$

および

$$\Lambda_{2,\varepsilon}(R) = \left\{\mathcal{U} = (U, V) \in \Phi^{2c_1+c_2+\varepsilon} \cap \mathcal{M}_2 : b_R(U) \geq 8c_1 - \min\left\{\frac{1}{2m_4^4}, c_1\right\}\right\}$$

とおく。ここで $\varepsilon > 0$ および $R > 0$ とする。

Proposition 1. $\varepsilon > 0$ が十分小さければ、$(R_\varepsilon, \delta_\varepsilon, \alpha_\varepsilon, \gamma_\varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^4$ が存在して次の条件を満たす。すなわち、$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = 0$ および各 $\mathcal{U} = (U, V) \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon)$ は次の形で表わされる。

(3.1) $$\mathcal{U} = (\alpha(U_{1,x} + U_{1,-x}) + u, \gamma U_2 + v)$$

ここで $\alpha \in (1 - \alpha_\varepsilon, 1 + \alpha_\varepsilon), \gamma \in (1 - \gamma_\varepsilon, 1 + \gamma_\varepsilon)$.

(3.2) $$|x| \geq R_\varepsilon, \quad x = \mathcal{B}(U|_{B_{R_0}(x)}), \quad \widehat{U}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{U}\right|_\infty \quad \forall z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=\pm 1} B_{R_0}(ix),$$

(3.3) $$\widehat{V}(z) < \frac{1}{2}\left|\widehat{V}\right|_\infty \quad \forall z \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_0}(0).$$

かつ

(3.4) $$(u, v) \in \{U_{1,x}, U_{1,-x}\}^\perp \times \{U_2\}^\perp \quad \text{および} \quad \|u\|_{\mu_1}^2 + \|v\|_{\mu_2}^2 \leq \delta_\varepsilon.$$

平野　載倫（横浜国立大学）

REMARK 4. *By (3.2) and the definition of $\mathcal{B}$, one can see that for each* $\mathcal{U} \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon)$, $(x,-x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *in (3.1) is uniquely determined, and the mapping* $\mathcal{U} \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon) \to (x,-x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *is continuous. We define a continuous mapping* $\eta : \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *by*

$$\eta(\mathcal{U}) = |x| \qquad \text{for } \mathcal{U} \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon). \tag{3.5}$$

さらに次の命題が成り立つ。

PROPOSITION 2. $M_0 > 0$ が存在して次の条件を満たす。すなわち、$\varepsilon > 0$ が十分小さければ,

$$\Phi(\mathcal{U}) \geq 2c_1 + c_2 - \beta M_0 e^{-2\sqrt{\mu_2}|x|} \qquad \forall \mathcal{U} \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon),$$

ここで $x \in \mathbb{R}^3$ は $\mathcal{U}$ が *(3.1)* の形をしているものとする。

ここで各 $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ に対して、class $\Gamma_2(x) \subset C([0,1], \mathcal{M}_2)$ を次のように定義する。

$$\Gamma_2(x) = \{p \in C([0,1], \mathcal{M}_2) : p(0) = \mathcal{N}(U_1, U_2), p(1) = \mathcal{N}(U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2)\}$$

さらに

$$c_2(x) = \inf_{p \in \Gamma_2(x)} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(p(t))$$

とおく。$\mathcal{N}$ および Φ の定義から $\mathcal{N}(U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2) - (U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2) \longrightarrow 0$ in $\mathbb{H}$ as $|x| \longrightarrow \infty$ であり、よって

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \Phi(\mathcal{N}(U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2)) = 2I_1(U_1) + I_2(U_2) = 2c_1 + c_2. \tag{3.6}$$

上記の結果を使うことによって Theorem 1 $(i = 2)$ を証明することができる。

PROOF OF THEOREM 1. $\varepsilon \in (0, \delta_2/2)$ とする。$\beta \in (\beta_\varepsilon, 0)$ を固定する。定理の証明を完成するには、$\delta > 0$ および $R > 0$ が存在して以下の不等式を満たすことを示せばよい。

$$2c_1 + c_2 + \delta < c_2(x) < 2c_1 + c_2 + \delta_2/2 \qquad \text{for } |x| > R. \tag{3.7}$$

事実、上の不等式が成り立てば (3.6) により、$x \in \mathbb{R}^3$ で $|x| > R$ および

$$\Phi(\mathcal{N}(U_{1,x} + U_{1,-x}, U_2)) < 2c_1 + c_2 + \delta$$

を満たすものがとれる。すなわち $\Phi(p(1)) < c_2(x)\ \forall p \in \Gamma_2(x)$ である。また $\Phi(p(0)) < \frac{7}{4}c_1 + c_2$ も得られる。Palais-Smail condition が満たされることは示すことができるので、mountain pass argument を用いれば、Φ の critical point $\mathcal{U}$ で $\Phi(\mathcal{U}) = c_2(x)$ を満たすものがあることが示される。一方、ε の定義および Lemma 1 より以下で定義されたパス $p \in \Gamma_2(x)$,

$$p(s) = \mathcal{N}(U_{1,sx} + U_{1,-sx}, U_2), \quad s \in [0,1]$$

が不等式 $\max_{s \in [0,1]} \Phi(p(s)) \leq 2c_1 + c_2 + \varepsilon$ を満たしていることがわかる。よって、(3.7) の第 2 の不等式が成立することがわかる。次に (3.7) の第 1 の不等式が成り立つことを示そう。. まず、$\overline{R} > 2R_\varepsilon$ となる $\overline{R}$ で以下の不等式を満たすものがあることを見よう。

$$b_{R_\varepsilon}(U) \geq 8c_1 - \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2m_4^4}, c_1\right\} \quad \forall\, \mathcal{U} = (U,V) \in \Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon) \text{ with } \eta(U) \geq \overline{R}, \tag{3.8}$$

ここで η は (3.5) で定義された関数。.Proposition 1 より各 $\mathcal{U}=(U,V)\in\Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon)$ は次のような形をしていることがわかる。

$$\mathcal{U}=(\alpha(U_{1,x}+U_{1,-x})+u,\gamma U_2+v) \tag{3.9}$$

ここで $\alpha\in(1-\alpha_\varepsilon,1+\alpha_\varepsilon),\gamma\in(1-\gamma_\varepsilon,1+\gamma_\varepsilon)$ および $(u,v)\in\{U_{1,x},U_{1,-x}\}^\perp\times\{U_2\}^\perp$ で $\|u\|^2_{\mu_1}+\|v\|^2_{\mu_2}\le\delta_\varepsilon$ を満たすものである。$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\delta_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\alpha_\varepsilon=0$ が成り立つので、 $\varepsilon>0$ は十分小さく以下の不等式を満たしているとしてよい。

$$8\alpha_\varepsilon^2c_1-\delta_\varepsilon>8c_1-\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2m_4^4},c_1\right\}. \tag{3.10}$$

$\mathcal{U}$ は (3.9) で与えられるので、

$$\begin{aligned}b_{R_\varepsilon}(U)&=\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\varepsilon}(0)}|U|^2_{\mu_1}\\&=\|\alpha(U_{1,x}+U_{1,-x})+u\|^2_{\mu_1}-\int_{B_{R_\varepsilon}(0)}|U|^2_{\mu_1}\\&\ge\alpha^2\|U_{1,x}+U_{1,-x}\|^2_{\mu_1}-\|u\|^2_{\mu_1}-2\int_{B_{R_\varepsilon}(0)}|U_{1,x}+U_{1,-x}|^2_{\mu_1}\end{aligned}$$

がなりたつ。ここで

$$\|U_{1,x}+U_{1,-x}\|^2_{\mu_1}\longrightarrow 8c_1 \text{ および } \int_{B_{R_\varepsilon}(0)}|U_{1,x}+U_{1,-x}|^2_{\mu_1}\longrightarrow 0,\ \text{as } |x|\longrightarrow\infty,$$

が成り立つことに注意すると、 (3.10) よりある $\overline{R}$ が存在して、 $\eta(\mathcal{U})\ge\overline{R}$ を満たすような各 $\mathcal{U}=(U,V)\in\Lambda_{2,\varepsilon}(R_\varepsilon)$ に対して (3.8) が成り立つことがわかる。 ここで $x\in\mathbb{R}^3$ を $|x|>\overline{R}$ を満たすように十分大きくとる。すると

$$b_{R_\varepsilon}(\mathcal{N}_1(U_{1,x}+U_{1,-x}))\ge 8c_1-\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2m_4^4},c_1\right\}.$$

$p=(p_1,p_2)\in\Gamma_2(x)$ で $\sup_{t\in[0,1]}\Phi(p(t))\le 2c_1+c_2+\varepsilon$ となるものをとろう。定義から、

$$\eta(p_1(1))=\eta(\mathcal{N}_1(U_{1,x}+U_{1,-x}))>\overline{R} \text{ および } b_{R_\varepsilon}(p_1(1))\ge 8c_1-\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2m_4^4},c_1\right\}.$$

一方、 $\Phi_2(\mathcal{U})\ge c_2$ であったから、 (2.4) より $\Phi_1(\mathcal{U})\le\frac{7}{4}c_1$ を得る。すると、ε の定義および $b_{R_\varepsilon}(p_1(0))<7c_1\le 8c_1-\min\left\{\frac{1}{2m_4^4},c_1\right\}$ より、ある $t\in(0,1)$ が存在して $b_{R_\varepsilon}(p_1(t))=8c_1-\min\left\{\frac{1}{2m_4^4},c_1\right\}$ を満たすことがわかる。よって、(3.8) より $\eta(p_1(t))<\overline{R}$. それゆえ、ある $t_0\in(0,t)$ が存在して $\eta(p_1(t_0))=\overline{R}$ を満たすことがわかる。 Proposition 2 より

$$\Phi(p(t_0))\ge 2c_1+c_2+\beta M_0e^{-2\sqrt{\mu_2}\overline{R}}$$

をうる。よって $\sup_{t\in[0,1]}\Phi(p(t))>2c_1+c_2+\beta M_0e^{-2\sqrt{\mu_2}\overline{R}}$ をえる。すなわち the mountain pass theorem により、Φ の critical point $\mathcal{U}$ で $\Phi(\mathcal{U})=c_2(x)$ となるものがある。 □

References

1. A. Ambrosetti and E. Colorado, *Bounded and ground states of coupled nonlinear schrodinger equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), 453–458.
2. T. Bartsch and Tobias Weth, *Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equatuions on domanis without topology*, Ann. I. H. Poincare **22** (2005), 259–281.
3. M. Mitchell D. N. Christodoulides, T. H. Coskun and M. Segev, *Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 646–649.
4. B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions fo nonlinear elliptic equation in r^n*, Adv. Math. Suppl. Stud. **7** (1981), 369–402.
5. M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $-\delta u - u + u^p = 0$ in r^n*, Arch. Rat. Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.
6. T. C. Lin and J. Wei, *Ground state of n coupled nonlinear schrodinger equations in r^n*, Communications in Mathematical Physics **255** (2005), 629 653.
7. ———, *Solitary and self-similar solutions of two-component system of nonlinear schrodinger equations*, Phys. D **2** (2006), 99–115.
8. L.A. Maia, E. Montefusco, and B. Pellacci, *Positive solutions for a weakly coupled nonlinear schrodinger system*, preprint.
9. C. R. Menyuk, *Nonlinear pulse propagation in birefrignent optical fibers*, IEEE J. Quantum Electron **23** (1987), 174–176.
10. ———, *Pulse propagation in an elliptically birefringernt kerr medium*, IEEE J. Quantum Electron **25** (1989), 2674–2682.
11. G. Cerami & D. Passaseo, *The effect of concentrating potentials in some singulerly perturbed problems*, Carc. Var. PDE. **17** (2003), 257–281.
12. A. Pomponio, *Coupled nonlinear schrodinger systems with potentials*, J. Diff. Equations **227** (2006), 258–281.
13. Z. Q. Wang T. Bartsch and J. Wei, *Bound states for a coupled schrodinger system*, J. Fixed Point Theory Appl. **2** (2007), 353–367.
14. W. C. Troy, *Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations*, J. Diff. Equations **42** (1981), 400–413.
15. J. Wei, *On the construction of single-peaked solutions to a singularly perturbed semilinear dirichlet problem*, J. Diff. Equations **129** (1996), 315 333.
16. J. Wei and T. Weth, *Existence of nonraidal symmetric bound states for a system of coupled schrodinger equations*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **18** (2007), 279–293.
17. X. Zhu, *A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, J. Diff. Equations **92** (1991), 163 178.

Department of Mathematics, Graduate School of Enviornment and Information Sciences, Yokohama National University, Tokiwadai, Hodogayaku, Yokohama, Japan

E-mail address: hirano@math.sci.ynu.ac.jp