数理解析研究所講究録
第 1672 巻 2010 年 17-30

Feynman-Kac 半群の増大度の L^p 独立性 及びそれに関する諸問題

長岡工業高等専門学校一般教育科 田原 喜宏
(Yoshihiro TAWARA)
Division of General Education,
Nagaoka National College of Technology

1 序

L^p 独立性大偏差原理の証明方法として, Gärtner-Ellis の定理が知られている. Gärtner-Ellis の定理を応用するには対数モーメント母函数の存在とその微分可能性を確認する必要がある. 加法汎函数の場合, 対応する Feynman-Kac 半群の増大度の L^p 独立性を示せば対数モーメント母函数の存在を証明できる. 本論文では, 一般化された Feyman-Kac 半群の増大度の L^p 独立性と幾つかの応用例に付随する, 諸問題に関する考察を行った. 一般に有界変動な加法汎函数は連続加法汎函数と純不連続汎函数に分解される. 連続加法汎函数は Revuz 対応によりあるクラスに属する測度によって表現され, 純不連続加法汎函数は状態空間の直積空間上の函数によって表現される. 逆に測度として与えられる局所的ポテンシャル, および状態空間の直積空間上の函数として与えられる非局所的ポテンシャルそれぞれに対応する加法汎函数の和によって有界変動な加法汎関数は表現されることになる. この意味で一般化された Feynman-Kac 半群の増大度が p に依存しない (以下, 簡単のため L^p 独立性と称する) ための必要十分条件が得られる (定理 2.1).

L^p 独立性についての歴史的経緯を幾つか述べると, Euclid 空間上の Brown 運動に対しては Simon [11] において加藤クラスに属するようなポテンシャルについて L^p 独立性が成立することが証明されている. その後に Sturm [12, 13] において Riemann 多様体上で同様の定理が証明されている. 更に近年になって竹田 [14] によって, 過渡的な Hunt 過程に Green 緊密であるような局所的なポテンシャルを摂動させた Feynman-Kac 半群に対して, L^p 独立性が成立する必要十分条件が L^2 半群の増大度が 0 以下であることが示された. 竹田-田原 [17] では Euclid 空間上の安定過程に対して非局所的なポテンシャルを持つ場合にも同じ定理が成立することを示した. また, 田原 [18] では, [17] での結果を一般の飛躍を持つ対称 Hunt 過程へと拡張している. 田原 [19] では, Green 緊密性をやや緩めた条件の下で, 再帰性・過渡性の何れも許す状況で有界変動な Feyman-Kac 半群に対して同様の定理を示した. 更に最近の結果として, De Leva-金-桑江 [8] によって, 有界変動でなくともエネルギー零の連続加法汎函数に関しても同様の定理が得られることが示された.

以下では定理 2.1 を詳しく紹介する. X を局所コンパクト距離空間, m を X 上の Radon 測度とする. $\mathbb{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を m に関して対称な Hunt 過程とし, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\{p_t\}_{t>0}$ および $(N(x,dy), H_t)$ をそれぞれ $\mathbb{M}$ に対応する対称 Dirichlet 形式, 半群および Lévy 系とする. μ を加藤クラスに属する符号付き測度で, Green 緊密性と呼ばれる条件を課したものとする. また, F を $X \times X$ の有界可測函数で, $F(x,x) = 0$ であるものとする. 函数 F に対して測度 $\mu_F(dx)$ を $\left(\int_X F(x,y)N(x,dy)\right) \mu_H(dx)$ で定義するとき, 測度 μ_F が Green 緊密性 (定義 2.1) を満たしているものとする. ただし, μ_H は正値連続加法汎函数 H_t に Revuz 対応する測度である. このとき, Feynman-Kac 半群 $\{p_t^{\mu+F}\}_{t>0}$ は以下で表される:

$$p_t^{\mu+F}f(x) = \mathbb{E}_x\left[\exp(A_t(\mu+F))f(X_t)\right] = \mathbb{E}_x\left[\exp(A_t(\mu)+A_t(F))f(X_t)\right].$$

ここで $A_t(F) = \sum_{0<s\le t} F(X_{s-}, X_s)$, $(X_{s-} = \lim_{s\uparrow t} X_s)$ である. また, $F_1(x,y)$ は $e^{F(x,y)}-1$ で定義される函数とし, μ_{F_1} は μ_F の定義における F に F_1 を代入したものである. $A_t(F)$ はその定義からわかる様に, Markov 過程 $\mathbb{M}$ が F の台上で飛躍するときにのみ変動する. Feyman-Kac 半群 $\{p_t^{\mu+F}\}_{t>0}$ の L^p 増大度 $\lambda_p(\mu+F)$ を

$$\lambda_p(\mu+F) = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|p_t^{\mu+F}\|_{p,p}$$

で定義する. ただし $\|\cdot\|_{p,p}$ は $L^p(X;m)$ から $L^p(X;m)$ への作用素ノルムである. 定理 2.1 の主張は, "Hunt 過程の半群に保存性, 既約性, 強 Feller 性, そして無限遠方で 0 に収束する連続函数をそれ自身に写すという意味での Feller 性の 4 条件を仮定する. このとき Feynman-Kac 半群の L^p 増大度 $\lambda_p(\lambda+F)$ が p に依らず一定である (L^p 独立性が成立する) 必要十分条件は, Feyman-Kac 半群の L^2 増大度が 0 以下である" というものである. この定理は, あるクラスのポテンシャルに対しては, "L^p 独立性は L^2 増大度によって完全に制御される" ことを主張している.

§3 においてこの定理が適用出来る例について述べる. 一次元拡散過程の場合, 境界がともに Feller の境界分類の意味で自然境界でなければ, L^p 独立性が成立する. また逆に少なくとも一方が自然境界である場合は, 本論文の主定理が適用出来る. 一次元拡散過程の場合には, L^2 増大度が 0 より大きい必要十分条件は知られており, 主定理と併せて全ての一次元拡散過程に対して, L^p 独立性が成立する必要十分条件を与えられる. さらに一次元拡散過程の結果を利用して, 次元が 3 以上の Euclid 空間において $-(1/2)|x|^\alpha\Delta$ によって生成される確率過程の L^p 独立性が成立する必要十分条件は $\alpha \neq 2$ であることが従う. この結果は "特別の場合を除いて Markov 半群は L^p 独立となる" ことを示している. さらに α 安定過程の生成作用素に Green 緊密なポテンシャルを与えても L^p 独立性が保たれることを示している. また, 次元が 2 以上の双曲空間上における Brown 運動に subordination の手法を用いて構成された "α 安定過程" に対しては, 対応する半群の L^2 増大度正であることから, L^p 独立性が成立しないのであるが, ポテンシャルを加えることにより, $\lambda_2(\mu+F) \le 0$ とできること, すなわち L^p 独立性が回復することが起こり得ることを述べている. このとき, いわゆる局所的なポテンシャルを増大させた場合は L^2 増大度を負の値とする, つまり L^p 独立性を回復させることは容易である. しかし, 非局所的なポテンシャルのみを増大させた場合, Dirichlet 形式の飛躍部分も同時に増大する. そのために L^p 独立性が回復する

ことは明らかではないが, 非局所的なポテンシャルのみを増大させた場合であっても, L^p 独立性が回復することを述べている.

また, §4 において Markov 半群の L^p 独立性が成立する条件を拡散過程の立場から述べている. これにより, やや口語的ではあるが "Markov 半群では L^p 独立性が成立する場合が殆どである" という主張を得られる.

2 基礎事項の準備及び主定理

X を局所コンパクトな完備可分距離空間, m を X 上の Radon 測度とする. $\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \theta_t, X_t, \mathbb{P}_x, \zeta)$ を m 対称 Hunt 過程とする. ここで, $\{\mathcal{M}_t\}_{t>0}$ は $\mathbb{M}$ を許容する最小の完備フィルターとし, (N, H) は $\mathbb{M}$ の Lévy 系, 即ち N は $X \times \mathcal{B}(X_\infty)$ 上の核で, H は $\mathbb{M}$ の正値連続加法汎函数であり, $F \in \mathcal{B}_+(X_\infty \times X_\infty\ x \in X_\infty)$, $f(x,x) = 0$, $x \in X_\infty$ ならば,

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{0<s\leq t} F(X_{s-}, X_s)\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^t \int_{X_\infty} N(X_s, dy) F(X_s, y) dH_s\right]$$

が成立するものとする.

$\{p_t\}_{t>0}$ を $\mathbb{M}$ の半群, 即ち $p_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ とする.

仮定. 本論文では, $\mathbb{M}$ は過渡的であるものとする. 更に半群 $\{p_t\}_{t>0}$ に以下を仮定する:

(I) (既約性) Borel 集合 A が p_t 不変, 即ち任意の $f \in L^2(X;m) \cap \mathcal{B}_b(X)$, $t > 0$ に対し $p_t(1_A f)(x) = 1_A(x) p_t f(x)$ m-a.e. x であれば, $m(A) = 0$ 又は $m(X \setminus A) = 0$ である.

(II) (保存性) $p_t 1 = 1$.

(III) (強 Feller 性) $p_t(\mathcal{B}_b(X)) \subset C_b(X)$.

(IV) ($C_\infty(X)$ の不変性) $p_t(C_\infty(X)) \subset C_\infty(X)$. ここで, $C_\infty(X) = \{f \in C(X) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ である.

注意 2.1. 仮定 (III) により, 半群 $\{p_t\}_{t>0}$ には m に関して絶対連続な積分核 $\{p(t,x,y)\}_{t>0}$ が存在する.

$\mathbb{M}$ の見本路の右連続性により, $\{p_t\}_{t>0}$ は $L^2(X;m)$ 強連続半群 $\{T_t\}_{t>0}$ に拡張出来る ([4, Lemma 1.4.3]). $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbb{M}$ によって生成される $L^2(X;m)$ 上の Dirichlet 形式, 即ち以下で定義される閉対称二次形式とする:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \left\{u \in L^2(X;m) : \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - T_t u, u)_m < \infty\right\}, \\ \mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - T_t u, v)_m, \quad u, v \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

仮定 (IV) により, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は正則であるから全ての $u \in \mathcal{F}$ に対し準連続修正 $\tilde{u}$ が存在する ([4, Theorem 2.1.3]). これを受けて, 常に u は準連続であるものとする.

Borel 測度 X が**滑らかな測度**であるとは, 以下の条件を満たすときに言う:

(i) $\mathrm{Cap}(A) = 0$ であれば $\mu(A) = 0$.

(ii) 任意のコンパクト集合に対して $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cap}(K \setminus F_n)$ となるようなある閉集合の増大列 $\{F_n\}$ が存在して, 全て n に対して $\mu(F_n) < \infty$ である.

滑らかな測度 μ に Revuz 対応する正値連続加法汎函数を $A_t(\mu)$ と表記する. Hunt 過程の保存性と Beurling-Deny の公式により Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ は以下の表現を持つ ([4, Section 3.2]):

$$\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}^{(c)}(u,u) + \frac{1}{2}\int_{X\times X}(u(x)-u(y))^2 N(x,dy)\mu_H(dx).$$

$\mathcal{E}^{(c)}$ は $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の連続部分, μ_H は正値連続加法汎函数 H の Revuz 測度である.

$\{G_\beta(x,y)\}_{\beta>0}$ を $\mathbb{M}$ のレゾルベント核, 即ち,

$$G_\beta(x,y) = \int_0^\infty e^{-\beta t} p(t,x,y)dt, \quad \beta > 0.$$

とする. また, Green 函数 $G_0(x,y)$ を簡単のため $G(x,y)$ と書く.

定義 2.1 (加藤クラス, Green 緊密性). μ を滑らかな符号付き Radon 測度, $A_t(\mu)$ を μ に Revuz 対応する連続加法汎函数とする.

(i) μ が**加藤クラスに属する**($\mu \in \mathcal{K}$ と書く) とは,

$$\lim_{t\to 0}\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x[|A_t(\mu)|] = 0$$

が成立することを言う.

(ii) 加藤クラスに属する測度 μ が **Green 緊密性を持つ** ($\mu \in \mathcal{K}_\infty$ と書く) とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対しあるコンパクト集合 K が存在して

$$\sup_{x\in X}\int_{K^c} G(x,y)|\mu|(dy) \le \epsilon$$

が成立することを言う.

定義 2.2 (クラス $\mathcal{J}_\infty$). F を $X \times X$ 上の有界可測函数で, 対角線集合 $\triangle = \{(x,x) : x \in X\}$ 上で 0 になるものとする. F が**クラス $\mathcal{J}_\infty$ に属する** ($F \in \mathcal{J}_\infty$ と書く) とは, 以下の条件を満たすときに言う.

$$\mu_F(dx) = \left(\int_X F(x,y)N(x,dy)\right)\mu_H(dx) \in \mathcal{K}_\infty. \tag{2.1}$$

以下は, F は対称, 即ち $F(x,y) = F(y,x)$ となることを仮定する. $F \in \mathcal{J}_\infty$ に対し, 対称 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}_F,\mathcal{F})$ を以下で定める:

$$\mathcal{E}_F(u,u) = \mathcal{E}^{(c)}(u,u) + \frac{1}{2}\int_{X\times X}(u(x)-u(y))^2 e^{F(x,y)} N(x,dy)\mu_H(dx).$$

更に $F_1 = e^F - 1 \in \mathcal{J}_\infty$, と置く. Schrödinger 形式 $\mathcal{E}^{\mu+F}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{\mu+F}(u,u) &= \mathcal{E}_F(u,u) - \left(\int_X u^2 d\mu + \int_X u^2 d\mu_{F_1}\right)\\ &= \mathcal{E}(u,u) - \left(\int_X u^2 d\mu\right.\\ &\quad \left. + \int_{X\times X} u(x)u(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)\right), \quad u \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

で定める. $(\mathcal{E}^{\mu+F}, \mathcal{F})$ は下半有界閉対称形式である (Albeverio-Ma [1, Theorem 4.1], [2, Proposition 3.3]). $\mathcal{H}^{\mu+F}$ を $(\mathcal{E}^{\mu+F}, \mathcal{F})$ に対応する自己共役作用素, $\{p_t^{\mu+F}\}_{t>0}$ を $\mathcal{H}^{\mu+F}$ に対応する L^2 強連続半群: $p_t^{\mu+F} = \exp(t\mathcal{H}^{\mu+F})$ とする. このとき半群 $\{p_t^{\mu+F}\}_{t>0}$ は

$$p_t^{\mu+F} f(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_t(\mu+F))f(X_t)]$$

と表される. 但し, $A_t(\mu+F) = A_t(\mu) + \sum_{0<s\leq t} F(X_{s-}, X_s)$ である.

$\|p_t^{\mu+F}\|_{p,p}$ を Feynman-Kac 半群 $\{p_t^{\mu+F}\}_{t>0}$ の $L^p(X;m)$ 空間上の作用素ノルムとする. Feynman-Kac 半群 $\{p^{\mu+F}\}_{t>0}$ の**増大度**を以下で定める:

$$\lambda_p(\mu+F) = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|p_t^{\mu+F}\|_{p,p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{2.2}$$

竹田 [15], 田原 [18] の結果を併せて以下の定理を得る:

定理 2.1 ([19, Theorem 4.5]). $\mu + F \in \mathcal{K}_\infty + \mathcal{J}_\infty$ とする. 任意の $p \in [1,\infty]$ に対して $\lambda_2(\mu+F) = \lambda_p(\mu+F)$ (Feynman-Kac 半群の増大度の L^p 独立性) が成立する必要十分条件は $\lambda_2(\mu+F) \leq 0$ となることである.

3 幾つかの例とそれに付随する問題

此の節に於いては定理 2.1 によって得られる幾つかの例, 及びそれらの例から生じた問題について述べる.

3.1 1 次元拡散過程

$\mathbb{R}$ の開区間 $I = (r_0, r_1)$ 上に狭義単調増加連続函数 $s(x)$ と狭義単調増加右連続函数 $m(x)$ を与える.

$$D_s^+ f(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{s(x+h) - s(x)}, \quad D_m f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{m(x+h) - m(x)},$$

と定義する. Feller の境界分類と小倉-金子-富崎 [7] を用いれば (I)-(IV) を仮定しなくとも, $D_m D_s^+$ によって生成される 1 次元拡散過程 $\mathbb{M}$ の L^p 独立に対する必要十分条件が得られる. また, この結果は "Markov 半群については殆どの場合 L^p 独立性が成立する" ことを主張するものと言える.

定義 3.1 (Feller の境界分類 (伊藤-McKean [6, p.108])). 定数 $c \in (r_0, r_1)$ を固定する.

$$\rho(x) = \int_c^x \left(\int_c^y dm(z)\right) ds(y), \quad \sigma(x) = \int_c^x \left(\int_c^y ds(z)\right) dm(y).$$

と置く.

(i) $\rho(r_i) < \infty$, $\sigma(r_i) < \infty$ のとき, r_i は**正則境界**であると言う.

(ii) $\rho(r_i) < \infty$, $\sigma(r_i) = \infty$ のとき, r_i は**流出境界**であると言う.

(iii) $\rho(r_i) = \infty$, $\sigma(r_i) < \infty$ のとき, r_i は**流入境界**であると言う.

(iv) $\rho(r_i) = \infty$, $\sigma(r_i) = \infty$ のとき, r_i は**自然境界**であると言う.

$\mathbb{M}$ によって生成される $L^2(I, m)$ 上の Dirichlet 形式は

$$\mathcal{E}(u, v) = -\int_{r_0}^{r_1} D_m D_s^+ u \cdot v dm = \int_{r_0}^{r_1} D_s^+ u(x) \cdot D_s^+ v(x) ds(x).$$

と表される.

定理 3.1 (竹田 [16, Theorem 5.1]). $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ とする. 両方の境界が自然境界で無いとき, $\lambda_p(\mu)$ は常に p 独立である. 少なくとも一方の境界が自然境界であるとき, 1 次元拡散過程 $\mathbb{M}$ は仮定 (I)–(IV) を満たす. 即ち, $\lambda_p(\mu)$ が p 独立である必要十分条件は $\lambda_2(\mu) \leq 0$ となることである.

今後, 簡単のため $s(x) = x$ とする. これは,$\tilde{m}(x)$ を $\tilde{m}(x) = m(s^{-1}(x))$ 定義することにより, 一般性を失わないことに注意すると, $c \in [r_0, r_1]$ を任意に固定し,

$$\begin{aligned} A_0(m; c) &= \sup_{x \in (r_0, c)} (x - r_0) m((x, c]), \\ A_1(m; c) &= \sup_{x \in (c, r_1)} (r_1 - x) m((c, x]). \end{aligned}$$

と定義すると以下の定理が得られる:

定理 3.2 (金子-富崎-小倉 [7, Theorem 2]). $\lambda_2(0) > 0$ となる必要十分条件は $A_0(m; c) < \infty$ かつ $A_1(m; c) < \infty$ となることである.

定理 2.1, 3.1, 3.2 を併せて, 以下の定理を得る:

定理 3.3. $\mathbb{M}$ を開区間 $I = (r_0, r_1)$ 上の 1 次元拡散過程とする. Markov 半群の増大度が L^p 独立である必要十分条件は以下の 2 条件のうち何れかが成立することである:

(i) r_0, r_1 は共に自然境界でない,

(ii) r_i が自然境界であれば, $A_i(m; c) = \infty$ となる.

3.2 多次元拡散過程への一般化

前節の定理 3.3 を多次元に一般化することを考える. $\alpha \geq 0$ に対し以下のように函数を定める.

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Dirichlet 形式 $L^2(\mathbb{R}^d; \rho_\alpha dx)$ 上の Diriclhet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を以下に定める.

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \cdot \nabla v) dx, \\ \mathcal{F} = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}^{(\mathcal{E}(\cdot,\cdot)+\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\rho_\alpha dx)})^{1/2}}. \end{cases}$$

この Diriclhet 形式に対応する拡散過程 $\mathbb{M}$ は, d 次元 Brown 運動 $(B_t, \mathbb{P}_x)$ を正値連続加法汎函数

$$A_t^\alpha = \int_0^t \rho_\alpha(B_s) ds.$$

による時間変更過程である.

定理 3.4 (田原 [19, Theorem 5.4]). 上によって構成された $\mathbb{M}$ の Markov 半群が L^p 独立である必要十分条件は $\alpha \neq 2$ となることである.

この定理は前節の 1 次元拡散過程の場合と同様に, "殆どの Markov 半群に対しては L^p 独立性が成立する" ことを主張している.

3.3 Euclid 空間上の対称安定過程

$\mathbb{M}^{(\alpha)} = (X_t^{(\alpha)}, \mathbb{P}_x^{(\alpha)})$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α 安定過程とする $(0 < \alpha < 2, d > \alpha)$. すなわち, 分数羃 Laplace 作用素 $\frac{1}{2}(-\Delta)^{\alpha/2}$ を生成作用素とする純飛躍 Hunt 過程である. $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ を $\mathbb{M}^{(\alpha)} = (X_t^{(\alpha)}, \mathbb{P}_x^{\alpha})$ によって生成される Dirichlet 形式:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,v) = \dfrac{K(d,\alpha)}{2} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} \dfrac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy, \\ \mathcal{F}^{(\alpha)} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle} \dfrac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy < \infty \right\}, \end{cases}$$

とする. ここで,

$$K(d,\alpha) = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{2^{1-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$$

である.

定理 3.5 ([17, Theorem 3.8],[19, Theorem 5.6]). 任意の $\mu + F \in \mathcal{K}_\infty + \mathcal{J}_\infty$ に対して

$$\lambda_p(\mu + F) = \lambda_2(\mu + F), \quad 1 \leq \forall p \leq \infty.$$

である.

3.3.1 一様性と L^p 独立性の保存

本論文では簡単のため, Hunt 過程が過渡的であることを仮定している. しかしながら再帰的であっても同様の定理が成立する. 例えば定理 3.5 は $d \le \alpha$ であっても成立する. この場合は, Green 緊密性という仮定をやや緩めたクラスについてのものである.

定義 3.2 (β-Green 緊密性). $\beta > 0$ とする. 加藤クラスに属する測度 μ が **β-Green 緊密性を持つ** ($\mu \in \mathcal{K}_{\infty,\beta}$ と書く) とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対しあるコンパクト集合 K が存在して

$$\sup_{x\in X} \int_{K^c} G_\beta(x,y)|\mu|(dy) \le \epsilon$$

が成立することを言う. また, $X \times X$ 上の函数 F が

$$\mu_F(dx) = \left(\int_X F(x,y)N(x,dy)\right)\mu_H(dx) \in \mathcal{K}_{\infty,\beta}$$

を満たすとき, クラス $\mathcal{J}_{\infty,\beta}$ に属すると言う.

レゾルベント方程式によりこのクラスが $\beta > 0$ の値に依存しないことは直ちに解る. このとき以下の定理が成立する.

定理 3.6. $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \le 2)$ を Euclid 空間上の対称 α 安定過程, 又は Brown 運動とする. 任意の $\mu + F \in \mathcal{K}_{\infty,\beta} + \mathcal{J}_{\infty,\beta}$ に対して, $\lambda_2(\mu+F) \le 0$ である. 即ち, L^p 独立性が成立する.

これは "L^p 独立性の保存" というべき主張である. L^p 独立性を持つ Markov 半群に対して Green 緊密性を持つ測度やクラス $\mathcal{J}_\infty$ に属する函数をポテンシャルとして加えてもその L^p 独立性は変化しないことを示している. これは Brown 運動や安定過程は空間に対しての一様性が非常に強いことから成立するものである. 一般に Hunt 過程が再帰的な場合, Markov 半群の L^2 スペクトル下限が 0 であっても, L^p 独立性が保存されるとは限らない. 実際, Hunt 過程が過渡的であり, 狭義の意味での Green 緊密測度或いはクラス $\mathcal{J}_\infty$(定義 2.1, 2.2) に属する場合において, "$\lambda_2(0) = 0$ であれば, $\lambda_2(\mu + F) \le 0$ が成立する" という主張の証明には Green 有界性, 即ち

$$\|G\mu\| = \sup_{x\in X} \int_X G(x,y)|\mu|(dy) < \infty$$

という性質を利用しているからである.

Hunt 過程に再帰性を許し, ポテンシャルとして β-Green 緊密性まで許す場合は以下のような仮定を要請することになる. コンパクト集合 $K \subset X$ に対して, $\mathcal{F}$ の部分空間 $\mathcal{F}_{K^c}$

$$\mathcal{F}_{K^c} = \{u \in \mathcal{F} : u = 0 \text{ q.e. on } K\}.$$

で定義する. $L^2_{K^c}(X;m) = \{u \in L^2(X;m) : u = 0\ m\text{-a.e. on } K\}$ と $L^2(K^c;m)$ が同一視可能であることに注意すれば, $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{K^c})$ は $L^2(K^c;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式である. この Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{K^c})$ を **Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の開集合 K^c 上の部分**と呼ぶ. $\mathcal{L}_{K^c}$ を Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_{K^c})$ に対応する自己共役作用素とする.

定理 3.7. $\sigma(\mathcal{L}_{K^c})$ を $\mathcal{L}_{K^c}$ のスペクトルとする. 任意のコンパクト集合 K に対し

$$\inf \sigma(\mathcal{L}_{K^c}) = \inf\{\mathcal{E}(u,u) : u \in \mathcal{F}_{K^c}, \|u\|_2 = 1\} = 0. \tag{3.1}$$

であり, なおかつ $\lambda_2(0) = 0$ であれば, 任意の $\mu + F \in \mathcal{K}_\infty$ に対し, $\lambda_2(\mu + F) \leq 0$ である.

実際, 明らかに $\mathcal{F}_{K^c} \subset \mathcal{F}$ であるから

$$\begin{aligned}\lambda_2(\mu) &= \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) + \int_X u^2 d\mu : u \in \mathcal{F}, \|u\|_2 = 1\right\}\\ &\leq \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) + \int_X u^2 d\mu : u \in \mathcal{F}_{K^c}, \|u\|_2 = 1\right\}\end{aligned}$$

であり, 仮定 (3.1) により右辺は

$$\inf\left\{\int_X u^2 d\mu_{K^c} : u \in \mathcal{F}_{K^c}, \|u\|_2 = 1\right\}$$

となる. ただし, $\mu_{K^c}(\cdot) = \mu(K^c \cap \cdot)$ である. $\int_X u^2 d\mu_{K^c} \leq \|G_1\mu_{K^c}\|_\infty \cdot \mathcal{E}_1(u,u)$ であるが故に, 右辺は $K \uparrow X$ としたとき, 0 に収束する.

Euclid 空間上の Brown 運動や安定過程は上記の仮定を満たすものであるし, 過渡的で, ポテンシャルが狭義の意味で Green 緊密である場合においては, そのような仮定を置かずとも, Green 有界性により,

$$\mathcal{E}(u,u) + \int_X u^2 d\mu \leq \mathcal{E}(u,u) + \|G\mu\|\mathcal{E}(u,u)$$

が成立する.

3.4 双曲空間上の Brown 運動

本節では, Markov 半群が L^p 独立でない例として, 双曲空間上の Brown 運動を挙げる. $\mathbb{H}^d$ $(d \geq 2)$ d 次元双曲空間, v 体積要素を持つとする. 即ち,

$$\begin{cases}\mathbb{H}^d = \{x = (y,z) : y \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad 0 < z < \infty\},\\ v(dx) = z^{-d-2} dydz.\end{cases}$$

である. 更に Δ を双曲空間上の Laplace-Beltrami 作用素

$$\Delta = z^2\left(\Delta_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - (d-2)z\frac{\partial}{\partial z}$$

とする. 此処で Δ_y は Euclid 空間 $\mathbb{R}^{d-1}$ 上の通常の意味での Laplace 作用素である. $\mathbb{M}$ を $\mathbb{H}^d$ 上の Brown 運動とする. このとき, $\mathbb{M}$ に対応する Dirichlet 形式は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$:

$$\begin{cases}\mathcal{E}(u,u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{H}^d} (\nabla u, \nabla u) dv, \quad u \in \mathcal{F},\\ \mathcal{F} = \overline{C_0^\infty(\mathbb{H}^d)}^{\mathcal{E}_1(\cdot,\cdot)^{1/2}}\end{cases} \tag{3.2}$$

となる．ただし，$\mathcal{E}_1(\cdot,\cdot)^{1/2} = (\mathcal{E}(\cdot,\cdot) + (\cdot,\cdot))^{1/2}$ である．このとき，Brown 運動は $\mathbb{M}$ は仮定 (I)–(IV) を満たす (Grigor'yan [5, Example 3.3])．

これにより，L^p 独立でない Markov 半群の例を得る:

例 3.1. $\mathbb{H}^d$ 上の Brown 運動 $\mathbb{M}$ に対する (3.2) で定義される Dirichlet 形式について，Davies[3, p.177] により，

$$\lambda_2(0) = \inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : u \in \mathcal{F}, \int u^2 dv = 1\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)}{2}\right)^2 > 0 \tag{3.3}$$

となる．他方で，$\lambda_\infty(0) = 0$ である．これは，Brown 運動の保存性により得られる．故に，L^p 独立性は**成立しない**．しかしながら，μ を $\mathcal{K}_\infty$ に属する正の測度とすると，下の補題 3.8 により，十分に大なる $\theta > 0$ に対して

$$\inf\left\{\mathcal{E}^{\theta\mu}(u,u) : u \in \mathcal{F}, \int_{\mathbb{H}^d} u^2 dv = 1\right\} < 0$$

が成立する．即ち，十分大なるポテンシャルを加えることにより，L^p 独立性を得られるものである．

補題 3.8. μ を $\mathcal{K}_\infty$ に属する正の測度とする．このとき，

$$\lambda_2(\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}^{\mu}(u,u) : u \in \mathcal{F}, \|u\|_2 = 1\right\} \leq 0$$

となる必要十分条件は

$$\lambda(\mu) = \inf\{\mathcal{E}(u,u) : u \in \mathcal{F}, \int_X u(x)^2\mu(dx) = 1\} \leq 1$$

である．

3.5 双曲空間上の "安定過程"

前節に続き，Markov 半群が L^p 独立でないが，Feynman-Kac 汎函数の増大により L^p 独立性を得る例を挙げる．但し本節で挙げるものは純飛躍過程である．先づ Brown 運動から従属操作によって双曲空間上の "α 安定過程" を構成する．

$\mathbb{M} = (B_t, \mathbb{P}_x)$ を $\mathbb{H}^d$ 上の Brown 運動とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $\mathbb{M}$ によって生成される Dirichlet 形式とする．本節では，Dirichlet 形式のスペクトル分解による表現を用いる:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \left\{u \in L^2(X;m) : \displaystyle\int_0^\infty \lambda(dE_\lambda u, u) < \infty\right\}, \\ \mathcal{E}(u,v) = \displaystyle\int_0^\infty \lambda(dE_\lambda u, v) \quad u, v \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

正値連続函数 $\gamma_t^\alpha(s)$ $(s > 0, 0 < \alpha < 2)$ を

$$e^{-ta^{\alpha/2}} = \int_0^\infty e^{-as}\gamma_t^{(\alpha)}(s)ds, \quad a, t > 0$$

(Yosida [20, Chapter IX §11]) によって定め, Brown 運動 $\{B_t\}$ の γ_t^α による従属操作

$$p_t^{(\alpha)}f(x) = \int_0^\infty \mathbb{E}_x[f(B_s)]\gamma_t^{(\alpha)}(s)ds, \quad t>0.$$

によって強連続 Markov 半群 $\{p_t^{(\alpha)}\}_{t>0}$ を定める. このとき, $\{p_t^{(\alpha)}\}_{t>0}$ によって生成される Dirichlet 形式はスペクトル分解を利用して以下のように表現される.

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) = \int_0^\infty \lambda^{\alpha/2} d(E_\lambda u, u), \quad u \in \mathcal{F}^{(\alpha)}, \\ \mathcal{F}^{(\alpha)} = \left\{ u \in L^2(X;m) : \int_0^\infty \lambda^{\alpha/2} d(E_\lambda u,u) < \infty \right\}. \end{cases} \tag{3.4}$$

更に, $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ に対応する Hunt 過程 $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ が一意的に存在する ([9, Theorem 3.2]). このスペクトル分解を用いた表現は Euclid 空間上の Brown 運動と対称安定過程の関係と一致する. これを鑑みて, $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ は双曲空間上の安定過程と看做すことが出来る.

以下の二定理は $\mathbb{M}$ が Brown 運動でない場合にも成立する.

定理 3.9 ([10, Theorem 3.2]). $\mathbb{M}$ が過渡的であれば $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ もまた過渡的である.

定理 3.10 ([18, Theorem 5.3]). Hunt 過程 $\mathbb{M}$ が仮定 (I)–(IV) を満たすのであれば, $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ もまた仮定 (I)–(IV) を満たす.

例 3.2. $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ を Dirichlet 形式 (3.4) に対応する Hunt 仮定とする. 定理 3.10 により, $\mathbb{M}^{(\alpha)}$ には定理 2.1 を適用出来る. また, (3.3) と (3.4) によって,

$$\inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) : u \in \mathcal{F}^{(\alpha)}, \int u^2 dv = 1\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)}{2}\right)^\alpha.$$

即ち, 例 3.1 同様に L^p 独立性は成立しない.

命題 3.11. F を $\mathcal{J}_\infty$ に属する正値函数とする. このとき, 十分大なる $\theta>0$ に対し

$$\inf\left\{\mathcal{E}^{(\alpha),\theta F}(u,u) : u \in \mathcal{F}^{(\alpha)}, \int_{\mathbb{H}^d} u^2 dv = 1\right\} < 0$$

上記の命題は $\lambda_2(F)$ 非負ポテンシャル F として, $\lambda_2(F)$ を 0 以下にする, 即ち L^p 独立性を齎すものが存在することを主張している. このことは補題 3.8 と同じ主張をしているものと解釈可能であるが, 非局所的なポテンシャルの場合, 決して自明なる主張では無い. これは, Schrödinger 形式について以下のような表示を持っていることに起因する.

$$\mathcal{E}^{\theta F}(u,u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{H}^d\times\mathbb{H}^d}(u(x)-u(y))^2 e^{\theta F(x,y)}N(x,dy)\mu_H(dx) - \int_{\mathbb{H}^d} u(x)^2 d\mu_{\theta F_1}.$$

即ち, θ を大とすれば, 第二項は減少するが, 第一項は増加する.

これを解決するには, 命題 3.11 を更に詳しく見る必要がある.

補題 3.12.

$$\inf\left\{\mathcal{E}(u,u) : u\in\mathcal{F},\ \int_{X\times X} u(x)u(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)=1\right\}<1 \tag{3.5}$$

ならば

$$\inf\left\{\mathcal{E}^F(u,u) : u\in\mathcal{F},\ \|u\|_2=1\right\}<0$$

が成立する.

(証明). $\mathcal{E}(\phi,\phi)<1$ かつ

$$\int_{X\times X}\phi(x)\phi(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)=1.$$

となる $\phi\in\mathcal{F}$ を取る. $\psi=\phi/\|\phi\|_2$ とおくと,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^F(\psi,\psi)&=\mathcal{E}(\psi,\psi)-\int_{X\times X}\psi(x)\psi(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)\\&=\frac{1}{\|\phi\|_2^2}\left(\mathcal{E}(\phi,\phi)-\int_{X\times X}\phi(x)\phi(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)\right)<0.\end{aligned}$$

□

補題 3.13. F を $\mathcal{J}_\infty$ に属する正値函数とする. $F_1^\theta=e^{\theta F}-1$ とすると, ある $u\in\mathcal{F}$ が存在して, 十分大なる θ に対して

$$\mathcal{E}(u,u)<1 \text{ かつ } \int_{X\times X}u(x)u(y)F_1^\theta(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)=1. \tag{3.6}$$

(証明).

$$\int v(x)v(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)=1.$$

となる非負函数 $v\in\mathcal{F}$ を取る.

$$\begin{aligned}k(\theta)&=\frac{\int v(x)v(y)F_1(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)}{\int v(x)v(y)F_1^\theta(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)}\\&=\frac{1}{\int v(x)v(y)F_1^\theta(x,y)N(x,dy)\mu_H(dx)}\end{aligned}$$

と置くと, 明らかに $\theta\to\infty$ としたとき, $k(\theta)\to 0$ である.

そこで u として $u=\sqrt{k(\theta)}v$ とすれば, 十分大なる θ に対し (3.6) が成立する. □

4 おわりに

前節 3 において, Markov 半群が L^p 独立性が成立する例としない例について述べたが, これらは Laplace 作用素に対する係数を考えると, 或る程度統一的に述べることが可能である. 以下の様な $\mathbb{R}^d(d \geq 3)$ 上の Dirichlet 形式について考察してみる:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u, u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha(\nabla u(x), \nabla u(x))dx, \\ \mathcal{F} = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\mathcal{E}_1(\cdot,\cdot)}. \end{cases}$$

この Dirichlet 形式は強局所性により $\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程が対応する. このとき, $\alpha > 2$ の場合は保存的でなく, L^p 独立性は常に成立する. また, $0 \leq \alpha \leq 2$ の場合は保存的であるが, $0 \leq \alpha < 2$ の場合は L^2 増大度が 0 である. $\alpha = 2$ のときが丁度保存的であり, L^2 増大度が 0 でない例となっている. これは §3.1 における自然境界の状況, §3.2 における $\alpha = 2$ の状況と本質的に同じものである. また, §3.4 では双曲空間上の Brown 運動について述べているが, これは, 双曲空間上の Laplace-Beltrami 作用素が Euclid 空間上の Laplace 作用素に係数 x^2 が付与されていることが本質的な要因となっていることに注意されたい.

参考文献

[1] S. Albeverio and Z.-M. Ma. Perturbation of Dirichlet forms—lower semiboundedness, closability, and form cores. *J. Funct. Anal.*, 99(2):332–356, 1991.

[2] S. Albeverio and Z.-M. Ma. Additive functionals, nowhere Radon and Kato class smooth measures associated with Dirichlet forms. *Osaka J. Math.*, 29(2):247–265, 1992.

[3] E. B. Davies. *Heat Kernels and Spectral Theory*, volume 92 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, volume 19 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[5] A. Grigor'yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(2):135–249, 1999.

[6] K. Itô and H. P. McKean, Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.

[7] J.-i. Kaneko, Y. Ogura, and M. Tomisaki. On the principal eigenvalue for one-dimensional generalized diffusion operators. *Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga Univ. Math.*, 15(1):3–13, 1987.

[8] G. De Leva, D. Kim and K. Kuwae, L^p-independence of of spectral bounds of Feynman-Kac semigroups by continuous additive functionals, 2009, preprint.

[9] I. McGillivray. A recurrence condition for some subordinated strongly local Dirichlet forms. *Forum Math.*, 9(2):229–246, 1997.

[10] H. Ôkura. Recurrence and transience criteria for subordinated symmetric Markov processes. *Forum Math.*, 14(1):121–146, 2002.

[11] B. Simon. Brownian motion, L^p properties of Schrödinger operators and the localization of binding. *J. Funct. Anal.*, 35(2):215–229, 1980.

[12] K.-T. Sturm. On the L^p-spectrum of uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.*, 118(2):442–453, 1993.

[13] K.-T. Sturm. Schrödinger semigroups on manifolds. *J. Funct. Anal.*, 118(2):309–350, 1993.

[14] M. Takeda. L^p-independence of the spectral radius of symmetric Markov semigroups. In *Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays, II (Leipzig, 1999)*, volume 29 of *CMS Conf. Proc.*, pages 613–623. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[15] M. Takeda. L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups. *J. Funct. Anal.*, 252(2):550–565, 2007.

[16] M. Takeda. A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional. 2009. preprint.

[17] M. Takeda and Y. Tawara. L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups. *Forum Math.* to appear.

[18] Y. Tawara. L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger-type operators with non-local potentials. *J. Math. Soc. Japan.* to appear.

[19] Y. Tawara. *L^p-independence of Growth Bounds of Generalized Feynman-Kac Semigroups.* PhD thesis, Tohoku University, 2009.

[20] K. Yosida. *Functional Analysis.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.