

軸流のある円柱渦と乱流との相互作用による崩壊過程について

電気通信大学 知能機械工学専攻

高橋直也, 宮崎武

Naoya Takahashi and Takeshi Miyazaki

Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems,

University of Electro-Communications

1 緒言

飛行機の翼の端から発生する翼端渦は、飛行機の離着陸に重大な影響を及ぼすことは良く知られている。例えば、翼端渦が消失する数分間は滑走路の使用を制限する措置が取られているが、そのために滑走路から離着陸できる回数は大幅に制限され、発着便数を増発できない主な要因ともなっている。滑走路利用の安全性・効率性のさらなる向上をはかるには、大気中に放出された翼端渦と大気乱流との相互作用によって引き起される様々な不安定性を解析し、翼端渦の寿命(崩壊過程)を精度よく予測する必要がある。

非粘性流において翼端渦の特徴である軸対称性を持つ渦に対し、これまで様々な 3 次元線形不安定性解析がなされてきた。軸流のない円柱渦は中立安定であるため、微小振動 (Kelvin 波) 自体は不安定ではないが、周辺ストレイン場との相互作用で Kelvin 波が共鳴的に励起されて不安定性をもたらす。二本の渦の対 (渦対 [1]) に対しては、Crow 不安定性 [2] が長波長領域に存在する。また、一本の渦が局所ストレイン場に置かれると、短波長領域では Widnall-Bliss-Tsai 不安定性 [3]、極長波長領域では波長に依存しない成長率を持つ楕円型不安定性 (Pierrehumbert-Bayly 不安定性 [4, 5]) の存在が知られている。

一方、軸流を伴う円柱渦は、軸流シアーのために線形不安定になり得る。翼端渦のモデルである q -vortex (安定な円柱渦で Navier-Stokes 方程式の厳密解の一つでもある Lamb-Oseen 渦に、ガウス型の軸流を伴ったもの) に対し、Lessen ら、Mayer らは、この渦の線形・弱非線形不安定性解析を行い、軸流の強さ (旋回パラメータ q) に依存した線形不安定性を示している。

さらに背景乱流の乱流強度が十分に強ければ、シアー流で「バイパス遷移」の原因の一つとして知られている非モード不安定性 (non-modal instability) が顕著になると期待される。この不安定性は、線形攪乱方程式が自己随伴でないために線形不安定性解析で全モードが指数関数的に減衰しても、過渡的に代数関数的な増幅を示す。(Trefethen *et al.* [6])。この間に非線形不安定相互作用を励起できれば、臨界レイノルズ数以下でも乱流へと遷移することが可能であることから、シアー流では「バイパス遷移」過程と知られている。このような非モード不安定性は、軸対称渦でも生じるため、翼端渦の崩壊促進に有効であると期待できる。翼端渦モデルの q -vortex について、Fabre and Jacquin [7] は粘性不安定性の解析を行ない、非モード不安定性を示す最適攪乱を線形攪乱方程式から選点法により数値的に求めた。その結果、翼端渦 (q -vortex) が受ける過渡的増幅の影響は、広い範囲のレイノルズ数・旋回パラメータに渡ることを示した。またこの非モード不安定性による過渡的な不安定増幅は $O(10^3)$ 程度もあり、指数関数型の増幅の場合 $O(10)$ と比べて大変大きい。

このように、翼端渦はレイノルズ数や背景乱流場の乱流強度によって様々な不安定性が発生するので、翼端渦の寿命を予測するためには、旋回パラメータ、背景乱流場の乱流強度、レイノルズ数への依存性を精度よく捉える必要がある。このために、本研究では様々な旋回パラメータの q -vortex に最適攪乱を励起した直接数値シミュレーションを行なった。特に背景にある乱流強度の

影響も考慮したうえで、非モード不安定性によるバイパス遷移への非線形過程に注目し、渦崩壊へと到る動力学を明らかにする。

2 数値計算法

2.1 支配方程式

秩序渦の変化をとらえるため、擬スペクトル法による直接数値計算を行なった。時間発展の離散化には4次精度のRunge-Kutta-Gill法を用いて離散化し、空間の離散化には擬スペクトル法を用いた。基礎方程式として支配方程式には非圧縮Navier-Stokes方程式とし、動粘性係数 ν を 2×10^{-3} 、解像度を 512^3 、計算領域として (x, y, z) 方向について周期的境界条件を持つ一辺が 4π の立方体を用いた。初期速度場として、十分に微細化が進んだ減衰乱流場を用意し、そこに秩序渦が周期的境界条件を満たすように配置した。配置は秩序渦の中心軸を立方体の一辺(z 軸)と並行に取り、 $x-y$ 平面を4分割して互いに逆回転するようにした[8]。この配置により、Crow不安定性やWidnall-Bliss-Tsai不安定性を起こす周回方向波数 $m=2$ のストレイン場は存在せず、またそのような不安定性も発生しないことを確認した。

2.2 秩序渦 (q -vortex)

q -vortexはBatchelor渦の軸流方向の変化を簡略化した渦[9]であり、円柱座標系で次のように定義される:

$$(U_r, U_\theta, U_z) = \left(0, \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right\}, \frac{\Gamma_0}{2\pi r_0 q} \exp\left\{-\frac{r^2}{r_0^2}\right\} \right) \quad (1)$$

ここで $r_0(=0.5)$ 、 Γ_0 、 q はそれぞれ初期条件における秩序渦の半径、循環、旋回パラメタである。本研究では q -vortexのバルクレイノルズ数 Γ_0/ν を20,000に設定した。また長さスケールとして半径 r_0 を、時間スケール T として秩序渦が一回転する時間 $2\pi r_0/(\Gamma/2\pi r_0)$ に取った。

Mayer and Powell[10](MPと略)は、周方向波数 $m=1$ のとき最も広い $q-k_z$ の領域で不安定であることを報告した。このとき $q=-0.45$ が最も大きな増幅率を持つことを報告している。この結果を基に、(1) 臨界安定な $q=-1.5$ の場合、(2) $q=-0.45$:最も線形増幅率の高い場合、について調べた。

解析には、次式で定義される2点エネルギースペクトルテンソル(2-Point Energy Spectrum Tensor, 2PESTと略)[11] $\Phi_{ij}(r, r, t; k_z, m)$ を用いた:

$$\langle\langle u_i(r_1, \theta_1, z_1, t) u_j(r_2, \theta_2, z_2, t) \rangle\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Phi_{ij}(r_1, r_2, t; k_z, m) e^{ik_z(z_1-z_2)+im(\theta_1-\theta_2)}, \quad (2)$$

ここで k_z, m はそれぞれ軸流方向・周方向の波数である。但し、本論文では半径(r)方向及び周(θ)方向の変化に注目するため、 k_z について積分した $\Phi_{ij}(r_1, r_2, t; m)$ を用いる。

3 $q = -1.5$, 臨界安定な場合

軸流の存在が渦崩壊過程へ与える影響を理解するため、臨界安定な旋回パラメタ $q=-1.5$ の場合について解析を行なった。可視化解析と統計解析を行い、軸流のないLamb-Oseen渦の解析結果(LOV, Phys. Fluids 2005)と比較を行った。

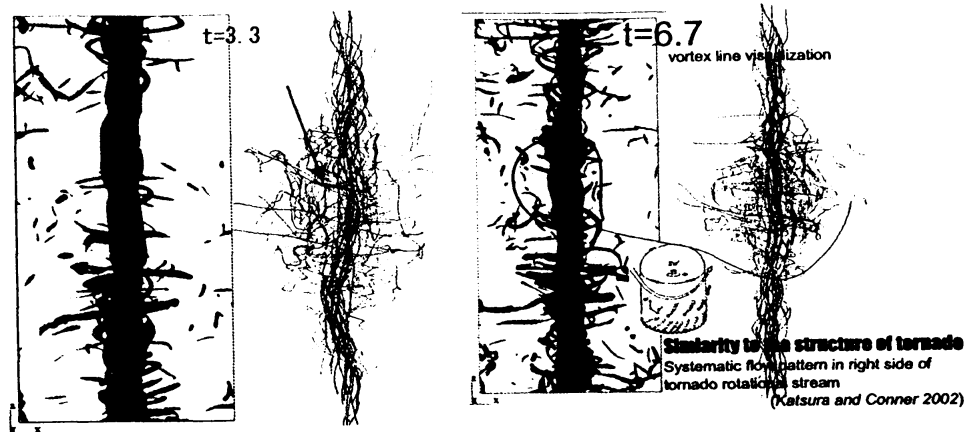


図 1: 臨界安定な場合のエンストロフィーの等値面と渦線による可視化解析結果。(a) $t = 3.3$, (b) $t = 6.7$.

3.1 可視化解析

可視化解析では円柱渦の屈曲や周辺微細渦の軸対称化のような LOV と定性的によく似た構造が観察できた。一方でこの場合に特有の構造が円柱渦表面に観察された。

エンストロフィーの等値面を用いた可視化解析結果を、図 1 に示す。まず、円柱渦本体に軸対称変形や、屈曲などの非軸対称変形が観察できた。また周辺の微細渦構造では、円柱渦周辺に軸対称化する様子が見られた。

一方、この場合に特有の構造として、円柱渦表面に微細な渦構造が観察された。この微細な渦構造はスパイラル状の形を取った。この構造の渦線の様子を可視化解析を行なった。その結果、この構造をとり囲むように渦管を形成する様子を捉えた。このため、この微細渦構造は周辺の微細渦構造を巻きとったものではなく、円柱渦の内部から発生したものと考えられる。

3.2 統計解析

計算された流れ場を、速度・渦度の z 成分の半径方向分布やエネルギー密度といった統計関数や、LOV で用いたスペクトル関数 2PEST(式 2) などの時間変化を解析し、LOV と定量的に比較する。

まずエネルギースペクトルについて、図 2 に、鉛直方向 z の波数 k_z についてのエネルギースペクトル $E(k_z)$ を示す。 $E(k_z)$ の時間変化について、全波数で増加するものの、波数によってその振舞いが異なる。まず低波数では $t \approx 3$ まで増加し、その後ほとんど変化しない。一方、中波数では $t \approx 3$ の変化よりも、それ以降の増加が目立つ。これにより、エネルギースペクトルの“へこみ”が発生している。また高波数では一様に増加する様子が見てとれる。

次に平均量について調べる。まず速度ベクトルの z 成分 u_z と渦度ベクトルの z 成分 ω_z の変化を調べ、円柱渦の変化の様子を大雑把に捉える。 u_z と ω_z はそれぞれ、周期的境界条件である周方向 θ と z 方向に平均をとり、 $\langle u_z \rangle(r)$ と $\langle \omega_z \rangle(r)$ として r 方向分布の時間変化を調べた。図 3 にあるように、両者ともによく似た変化をした。形はガウス型の形を保ちつつ、円柱渦中心 $r/r_0 = 1$ では $|\langle u_z \rangle(r)|$ と $|\langle \omega_z \rangle(r)|$ ともに減衰をした。一方、渦核外 ($r/r_0 > 1$) では、 $|\langle \omega_z \rangle(r)|$ では変化ほとんどないが、 $|\langle u_z \rangle(r)|$ は時間について増加した。このように u_z と ω_z では時間変化の様子が異なる。

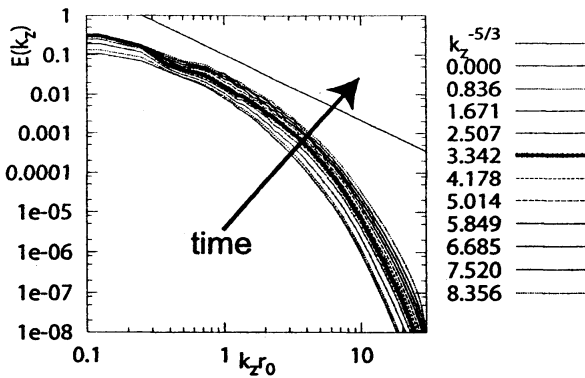


図 2: エネルギースペクトル.

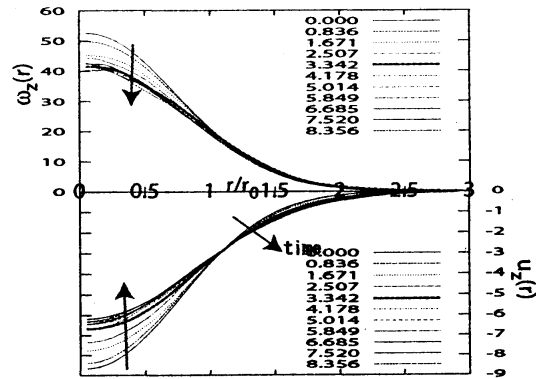


図 3: (上) $\langle \omega_z \rangle(r)$ vs r , (下) $\langle u_z \rangle(r)$ vs r .

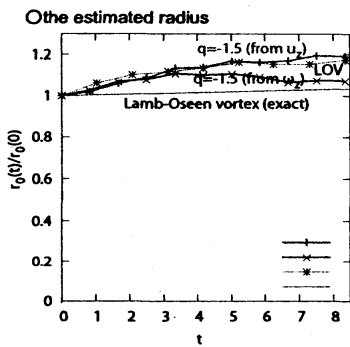


図 4: 円柱渦半径の見積り.

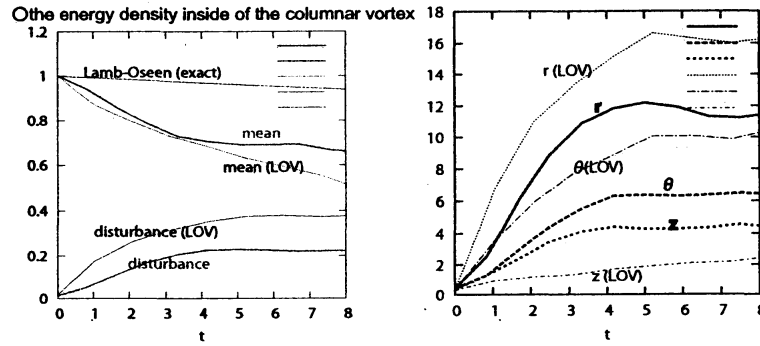


図 5: 円柱渦内部におけるエネルギー密度の時間変化。(左) 平均エネルギー密度、(右) 速度攪乱から求めた各成分のエネルギー密度.

またこのときの様子を捉えるため、円柱渦の半径の時間変化を見積もった。 $\langle \omega_z \rangle(r)$ から見積もった半径 r_0^0 と $\langle u_z \rangle(r)$ の r 分布から見積もった半径 r_0^u の時間変化を図 4 に示す。ここでフィッティング関数として $\langle \omega_z \rangle(r)$ には $\Gamma/(2\pi r_0^u(t)) \exp\{-r^2/r_0^u(t)^2\}$ とし、また $\langle u_z \rangle(r)$ には

$\Gamma/(2\pi r_0^u(t)q) \exp\{-r^2/r_0^u(t)^2\}$ を用いた。これらは q -vortex の式 (1) に基いた。この図に示すように、どちらも $t/T < 3$ までは単調増加を示し、おおむね一致した値を取る。一方で $t/T > 3$ で両者の違いが顕著になる。 r^u は単調増加を示し、またその値は LOV とほぼ一致する。一方 r^ω は $t/T \approx 3$ で最大値を取った後に減衰する。この違いは $1 < r/r_0 < 2$ での $\langle \omega_z \rangle(r)$ と $\langle u_z \rangle(r)$ の違い: $\langle \omega_z \rangle(r)$ はほとんど変化しないが、 $|\langle u_z \rangle(r)|$ は増加、による。

次に、流れ場のエネルギー密度の時間変化を解析した。円柱渦内部 ($r/r_0 \lesssim 1$) における平均速度から求めたエネルギー密度を図 5 左に、速度攪乱の各成分から求めたエネルギー密度を 5 右にそれぞれ示す。

平均成分のエネルギー密度の時間変化は、 $t \approx 4$ までは LOV とほぼ同じ値を取るが、それ以降に違いが現れる: LOV は単調減衰するが、臨界安定の場合は減衰しなくなり、一定の値を取るようになる。このように臨界安定の場合、軸流のない LOV と比べ、円柱渦の減衰が遅くなると言える。

速度攪乱各成分のエネルギー密度について、渦核内では全ての成分で増幅が見られる。LOV と比較すると、 r と θ の各成分は LOV に比べて増幅が小さい。一方、LOV に比べて z 成分の増幅は大きい、これは軸流の存在によると思われる。LOV では速度の $r \cdot \theta$ 成分が支配的に振舞った

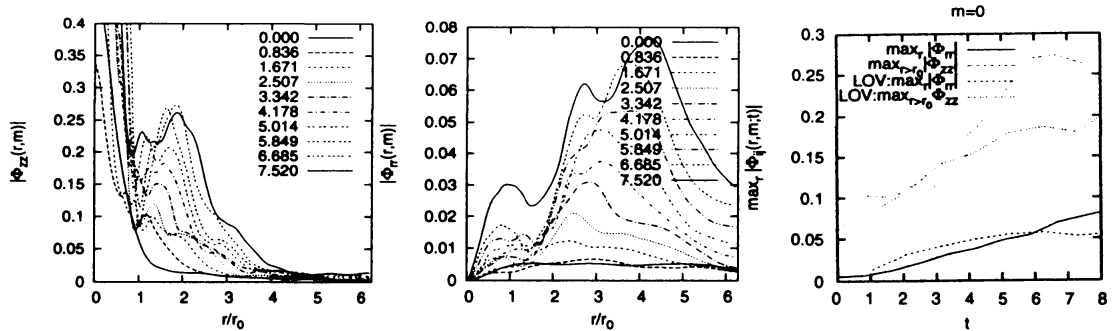


図 6: 2PEST($m = 0$) の時間変化。(左) $|\Phi_{zz}(r)|$, (中) $|\Phi_{rr}(r)|$, (右) 極大値を LOV と比較したものの: $\max_{r>r_0} |\Phi_{zz}(r)|$ と $\max_{r<r_0} |\Phi_{rr}(r)|$ 。

め Taylor-Proudman の定理から説明できた。一方、軸流が存在することにより速度の $r \cdot \theta$ 成分は支配的な成分とは言えず、この定理の成立条件が満たせなくなり、速度の z 成分の増幅が LOV と比べて大きいと考えられる。

次に、2PEST(式 2) を用いてより細かな構造のスペクトル解析を調べる。波数 k_z それぞれについて解析を行なったが明確な特徴を捉えることができなかつたため、LOV に倣い k_z について和を取り、周方向波数 m について調べる。

軸対称攪乱 $m = 0$ の 2PEST のうち、 $|\Phi_{zz}|$ と $|\Phi_{rr}|$ の半径方向分布を図 6 に示す。ここで Φ_{zz} について $k_z = 0$ 成分は平均流であり、他の波数成分と比べて非常に大きいため、 k_z の和を取るときに除外した。

軸対称攪乱 $m = 0$ の $|\Phi_{zz}|$ の振舞いを、図 6 左に示す。円柱渦中心 ($r/r_0 < 1$) では大きな値を取り、表面 $r/r_0 \simeq 1$ で一旦極小値を取り、そのすぐ外側 ($r/r_0 \simeq 2$) で極大値を取っている。この形は LOV の $|\Phi_{zz}|$ の振舞い (LOV の図 15(a)) と酷似していて、Blocking 効果 (円柱渦の内側に流体粒子を入れ難くする効果) の発生を示す。同様に $|\Phi_{rr}|$ の振舞いを図 6 中に示す。こちらも LOV のもの (LOV の図 15(b)) と定性的に同じ振舞いを示し、軸対称波の発生を示す。

これらの強さを LOV と比較する。Blocking 効果の強さを $\max_{r>r_0} |\Phi_{zz}(r)|$ 、軸対称波の振幅を $\max_{r<r_0} |\Phi_{rr}(r)|$ として図 6 右に示す。この図にあるように、Blocking 効果は q -vortex の方が LOV よりも強いことがわかる。一方、軸対称波の振幅について、時間変化の仕方も異なる。LOV では一様増加を行う。大きさも $t/T \lesssim 5$ まではほぼ同じ値を取る。一方、 q -vortex は $t/T \simeq 5$ で極大値を取ったあと、減衰する。このように、発生した軸対称攪乱の振舞いは LOV の場合と定性的に一致する。

一方、攪乱の屈曲成分 $m = 1$ について、同様に 2PEST の振舞いを調べる。 Φ_{zz} 、 Φ_{rr} ともに定性的には良く似た半径方向分布を示す。 Φ_{zz} (図 7 左) について、円柱渦表面 $r/r_0 \simeq 1$ で最大値を取り、その後減衰する半径方向分布を持つ。また屈曲波に対応する Φ_{rr} (図 7 中) も、ガウス型の分布の形とその時間変化は LOV と定性的に一致する。一方これらの大きさを比較する (図 7 右) と、LOV に比べ $|\Phi_{zz}|$ は大きく、屈曲波 $|\Phi_{rr}|$ は小さい。

最後に微細構造の発生について、最適化攪乱との関連を調べる。図 1 にあるように、渦核にある特徴的な渦構造が発生する。この構造は Lamb-Oseen 渦に対する最適化攪乱が形成する渦構造 (Antkowiak and Brancher[12] の図 2) とよく似ている。このことから、Antkowiak and Brancher に倣

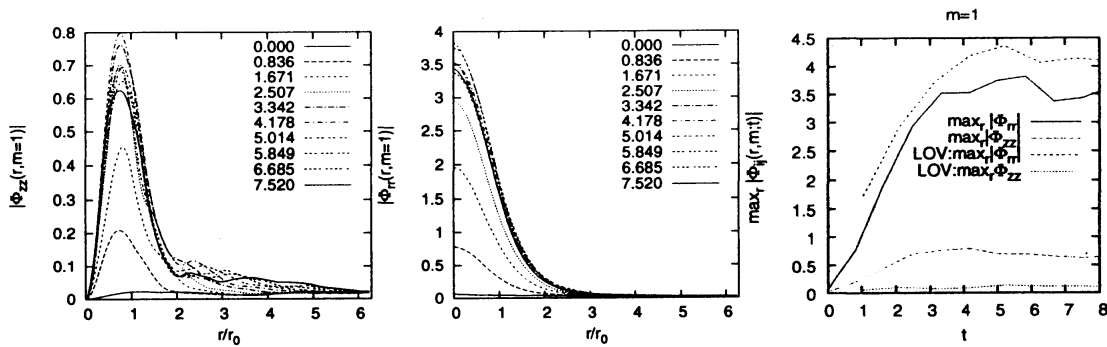


図 7: 2PEST($m = 1$) の時間変化。(左) $|\Phi_{zz}(r)|$, (中) $|\Phi_{rr}(r)|$, (右) 極大値を LOV と比較したものの $\max_r |\Phi_{zz}(r)|$ と $\max_r |\Phi_{rr}(r)|$ 。

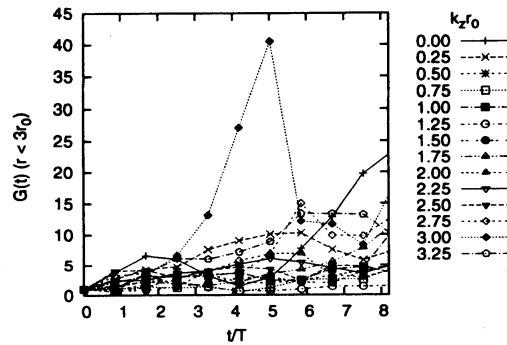


図 8: ゲイン関数.

い、ゲイン関数 $G(k_z, m)$ を

$$G(k_z, m; t) \equiv E_V(k_z, m; t)/E_V(k_z, m; 0), \quad (3)$$

$$E(k_z, m; t) \equiv \int_V |\tilde{u}(r, k_z, m; t)|^2 r dr, \quad (4)$$

と定義し、その振舞いを観察する。この流れ場の $m = 1$ についての $G(k_z, m)$ を図 8 に示す。この図に示すように、 $k_z r_0 = 3.0$ のモードが過渡的な増幅を示す。またその時間依存性は代数関数的な増幅を示唆する。このため、図 1 に見られたフィラメント構造は、最適化攪乱によるものと考えられる。

4 $q = -0.45$: 線形不安定な場合

線形不安定な増幅過程から渦崩壊への過程を捉えるため、 $q = -0.45$ における直接数値計算を行った。臨界安定の場合と同じように計算を行なったところ、計算直後に非常にはやく円柱渦は崩壊してしまった。このため乱流強度を $1/100$ と非常に弱くすることにより、線形増幅過程とそれ以降の過程を捉えやすくした。便宜上、表 1 のように計算時間をステージ 1~4 と分ける。

線形不安定な場合の渦構造の可視化 (エンストロフィーの等値面) を図 9 に示す。

表 1: 線形不安定の場合での計算時間と対応するステージ数 ($q = -0.45$).

ステージ数	1	2	3	4
対応時間	$0 \leq t \lesssim 1.6$	$1.6 \lesssim t \lesssim 2.0$	$2.0 \lesssim t \lesssim 3.3$	$t \gtrsim 3.3$

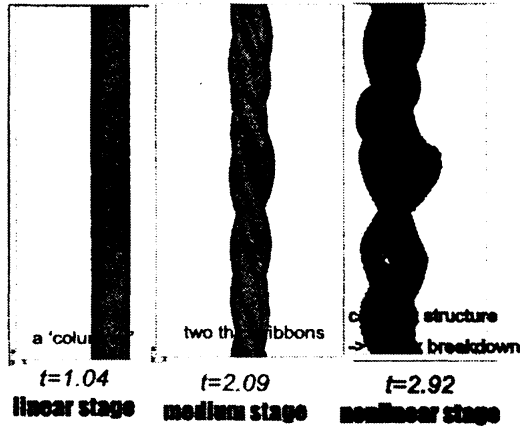


図 9: 線形不安定な場合の可視化結果.

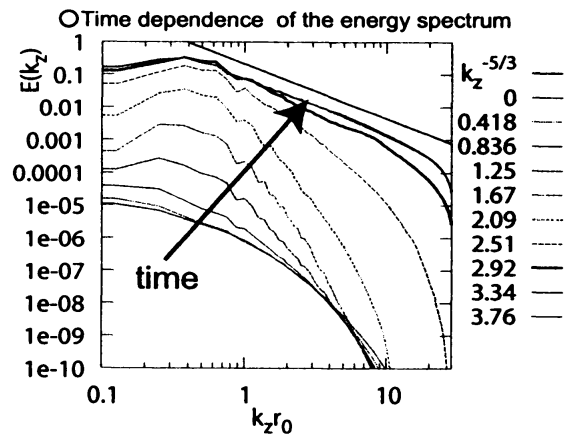


図 10: エネルギースペクトルの時間変化.

ステージ2までは可視化画像は円柱のままである。次のステージ3において、円柱渦はヘリカル構造へと変化した。この攪乱は $m = 1$ に対応することから、線形不安定モードが増幅し、有限な振幅を持ったためと考えられる。次のステージ3ではヘリカル構造それぞれの表面に渦構造が突発的に微細化し、渦が突発的に崩壊する様子を捉えた。

このときのエネルギースペクトル (k_z) を図 10 に示す。ステージ2までは初期分布とほぼ一致したが、このステージ終盤に低波数モードの増加が観察できた。次にステージ3において中・高波数モードの増幅が確認でき、ステージ4ではエネルギースペクトルは $k_z^{-5/3}$ に比例した。このことから、最終段階では円柱渦は乱流化したと言える。

次にエネルギー密度の時間変化を図 11 に示す。平均流と攪乱成分の変化の仕方から、ステージ2までは平均流の運動エネルギーにほとんど変化はないが、攪乱成分に指数関数的な増幅を確認できる。ステージ3において平均流には減衰が開始される。またこのとき増加の仕方が指数関数からはずれはじめる。ステージ4において平均流はあきらかな減衰、つまり崩壊を示す。またこの成分とほぼ同じオーダーに攪乱成分も成長する。

線形増幅モードについて、速度の z 成分 u_z のフーリエ成分 $\tilde{u}_z(r, k_z, m; t)$ の時間変化を図 12 に示す。ここにあるように、 $t/T \approx 2$ までは $|\tilde{u}_z(r, k_z, m; t)|$ の形は $r/r_0 \approx 0.5$ に極大値を一つ持ち、相似性を保ちつつ振幅が増加していく。この相似性は $t/T \approx 2$ 前後で崩れる。それ以降は複数の極大値を持つようになる。これらの振舞いから、 $t/T \approx 2$ (ステージ2) までは線形増幅過程が支配的に振る舞うが、それ以降は非線形相互作用が影響を持つようになることが推測できる。

更に、様々なモードのエネルギーの時間変化を調べるため、

$$E(k_z, m; t) \equiv \max_r |\tilde{u}(r, k_z, m; t)|^2$$

を k_z - m 平面で調べたものを図 13 に示す。この図にあるように、 $t/T \approx 1.04$ (ステージ2) においては低波数モードでのみ励起を示す。これらのモードは線形増幅モード (およびその高調波) に対応す

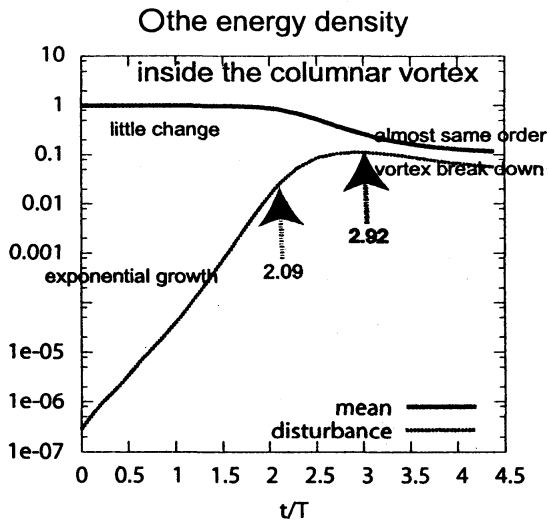


図 11: エネルギー密度の時間変化

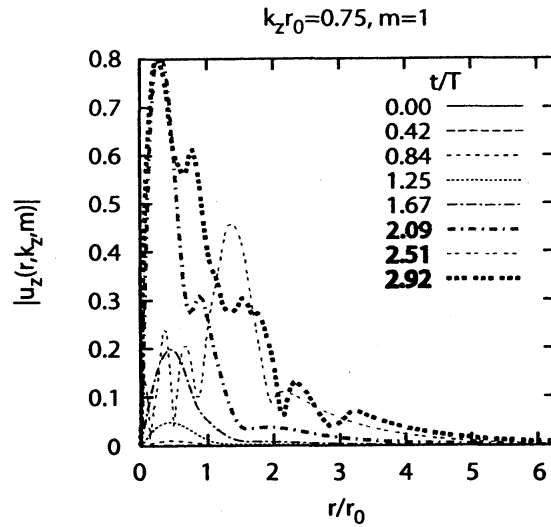


図 12: 線形増幅モードのフーリエ成分の時間変化: $|\tilde{u}_z(r, k_z = 0.75, m = 1; t)|$.

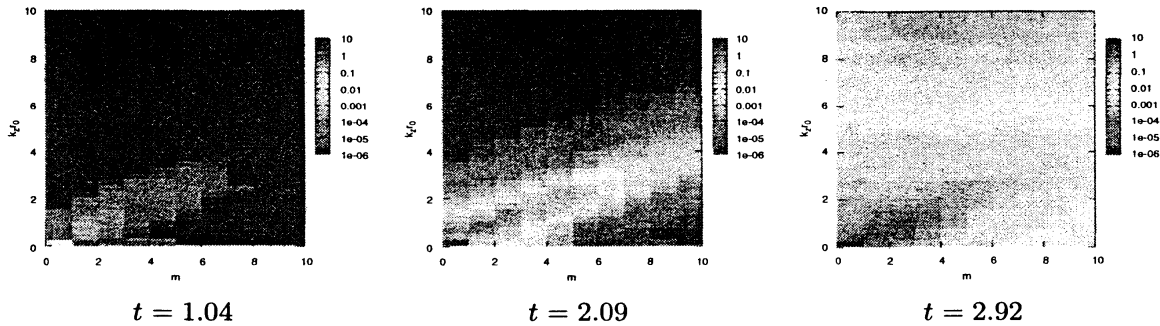


図 13: 各モードのエネルギーの時間変化

る。これらのモードの励起に加え、 $k_z r_0 \approx (2/5)m$ に沿ったモードが $t/T \approx 2.09$ (ステージ 3) において特に顕著になる。これは線形増幅モードの増幅が飽和した状態に対応する。また $k_z r_0 \approx (2/5)m$ の周辺のモードでの励起も確認できることから、線形増幅モードから他のモードへのエネルギー分配が活発になったものと考えられる。

最後に、この流れ場の循環について調べる。図 14 に、局所循環 $\gamma(r) \equiv r\langle u_\theta \rangle(r)$ の時間変化を示す。この図にあるように、 $t/T \approx 2.09$ で初期分布から離れ始め、 $t/T \approx 2.92$ ではオーバーシュート ($|\gamma(r', t)| > |\gamma(r, t)|$ かつ $r' < r$) を発生させる。

$\gamma(r)$ の時間変化は非圧縮 Navier-Stokes 方程式を変形して

$$\frac{\partial r\langle u_\theta \rangle(r)}{\partial t} = -\frac{\partial \langle r u_r u_\theta \rangle}{\partial r} + \text{viscous term} \quad (5)$$

と表せる。この式にあるクロスターム $\langle r u_r u_\theta \rangle(r)$ の時間発展を調べた。図 14 右に、この時間変化を示す。この図にあるように、 $t < 2$ (ステージ 2 まで) は値をほとんど持たないが、 $t = 2.09$ において渦表面 ($r/r_0 \approx 1$) 付近で変化がはじまり、 $t = 2.92$ で激しく変化があらわれ、非線形相互作用によって局所循環にオーバーシュートが現れたことがわかる。このようなオーバーシュートは円柱渦が乱流状態 [13] となった場合であることから、円柱渦は渦崩壊をしたと言える。

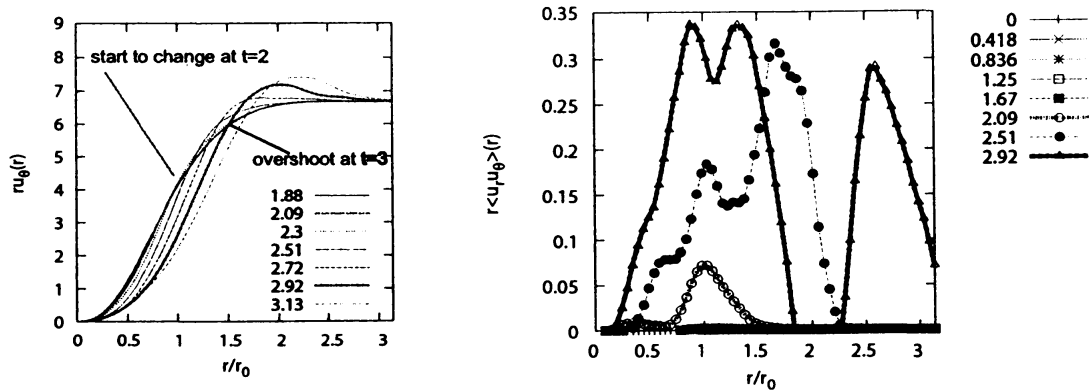


図 14: 局所循環 $\gamma(r)$ の半径方向分布の時間変化.

5 結論

軸流を持つ秩序渦の崩壊過程を調べるため、直接数値シミュレーションを行い、統計解析を行った。

臨界安定 ($q = -1.5$) の場合、LOV と類似する振る舞いが観察された。可視化では秩序渦の屈曲、微細渦構造の軸対称化などである。統計的にもエネルギー密度の変化など、定性的に LOV と良く似た振る舞いを示し、またブロック効果の発生も確認された。一方で LOV と異なる特徴も観察された。可視化解析では秩序渦構造の微細化 (フィラメント構造) が起こった。統計的には、秩序渦半径の時間変化は一旦増加した後、緩やかに減少した。エネルギー密度の変化では、平均エネルギー密度の減少は LOV よりも遅く、攪乱エネルギー密度の増加は LOV の約半分程度であった。

線形不安定 ($q = -0.45$) の場合、線形増幅波の有限振幅化の影響により、LOV と全く異なる振る舞いが観察された。秩序渦構造は二本の太いリボン状の構造 (ブレード構造) を形成した。このような特徴的な渦構造が捉えられた時、攪乱エネルギー密度が最大値を取り、半径が増加するなど、統計的にも特徴的な変化が見られた。また局所循環が初期状態から変化を始め、時間経過とともにオーバーシュートする様子も捉えられた。このような状態は円柱渦が乱流状態になった場合に形成されることから、秩序渦構造の突発的な崩壊を捉えたものと考えられる。

参考文献

- [1] B-727 in flight during vortex study with wingtip smoke generators, <http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/B-727/HTML/ECN-3831.html>, 1973, NASA Dryden Flight Research Center, ECN-3831.
- [2] S. C. Crow, Stability theory for a pair of trailing vortices, *AIAA Journal* **8**, 2172 (1970).
- [3] S. E. Widnall, D. B. Bliss, and C.-Y. Tsai, The instability of short waves on a vortex ring, *J. Fluid Mech.* **66**, 35 (1974).
- [4] R. T. Pierrehumbert, Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986).

- [5] B. J. Bayly, Three-dimensional instability of elliptical flow, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986).
- [6] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll, Hydrodynamic stability without eigenvalues, *Science* **261**, 578 (1993).
- [7] D. Fabre and L. Jacquin, Viscous instabilities in trailing vortices at large swirl numbers, *J. Fluid Mech.* **500**, 239 (2004).
- [8] N. Takahashi, H. Ishii, and T. Miyazaki, The influence of turbulence on a columnar vortex, *Phys. Fluids* **17**, 035105 (2005).
- [9] M. Lessen, P. J. Singh, and F. Paillet, The stability of a trailing line vortex. part 1: Inviscid theory, *J. Fluid Mech.* **63**, 753 (1974).
- [10] E. W. Mayer and K. G. Powell, Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex, *J. Fluid Mech.* **245**, 91 (1992).
- [11] T. Miyazaki and J. C. R. Hunt, Linear and nonlinear interactions between a columnar vortex and external turbulence, *J. Fluid Mech.* **402**, 349 (2000).
- [12] A. Antkowiak and P. Brancher, Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex, *Phys. Fluids* **16**, L1 (2004).
- [13] S. P. Govindaraju and P. G. Saffman, Flow in a turbulent trailing vortex, *Phys. Fluids* **14**, 2074 (1971).