

壁なし壁乱流の直接数値計算

水野吉規 (Yoshinori Mizuno)¹, Javier Jiménez^{1,2}

¹ E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid (Spain)

² Center for Turbulence Research, Stanford University (USA)

1 はじめに

壁乱流の大きな特徴の一つは、壁が存在することにより乱れのスケールが壁垂直方向 (y 方向) に非一様となることである。流れ方向の平均流速 $U(y)$ の分布はその基本的なアイデアを与える。壁の近傍および遠方において、あるレイノルズ数によらない普遍関数 f と F が存在して、以下の相似則が成り立つことが知られている [1].

$$U^+ = f(y^+), \quad U_\infty^+ - U^+ = F(y/h).$$

ここで、上付の $+$ は動粘性係数 ν と壁摩擦速度 $u_\tau \equiv (\nu dU/dy)^{1/2}|_{wall}$ を用いて規格化された量を表す。また、 U_∞ は無限遠方での流速 (平行二平板間のチャンネルの場合は中心における平均流速)、 h は境界層厚さ (チャンネルの場合は平板間の距離の半分) である。以上の相似則が成り立つ領域をそれぞれ、内層、外層と呼ぶことにする。これらの相似則は、流れの大きさはいずれの領域においても u_τ であるのに対し、流れの特徴的な長さスケールはそれぞれ、 ν/u_τ と h であることを示している。しかしながら、内層と外層は異なるスケールの乱れが支配する互いに独立な領域というわけではない。例えば、内層における u の乱流強度 $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ (ここで $\langle \rangle$ は平均を表す) は u_τ では規格化できず、レイノルズ数への依存性が現れることが知られている。これは、外層の大きな乱れが内層に侵入することが原因であると考えられており [2, 3], このような意味で内層は外層から独立ではないと言える。一方で、その反対、すなわち内層が外層に及ぼす影響についても、粗面に対する壁乱流に関連して、これまでに多くの研究がなされている [4]. 古くは、粗面による壁面付近の流れの変化は外層には影響しないとする Townsend の仮説 [5] に遡るが、現在のところは、境界層とチャンネル、パイプなどの内部流れでは粗面が流れに与える影響が異なり、前者は外層にまでその影響が及び、後者では外層は粗面には影響されない傾向があるということがわかってきている [6]. 特に、壁面に攪乱を加えた人工的な粗面に対するチャンネル乱流の DNS の結果では、外層におけるレイノルズ応力やスペクトルの分布が壁面の乱れには影響されないことが明確に示されている [7].

そこで次に、壁もしくは内層から外層への本質的な寄与とは何かを考える。前述したように壁乱流の大きな特徴の一つとして、長さスケールの非一様性がある。長さスケールは壁から遠ざかるにつれて、 ν/u_τ から h まで連続的に変化し、特に対数層では壁からの距離に比例する [5]. ここでは、内層を取り除き、その代わりにこの長さスケールの変化を実現するような境界条件を用いた、外層のみからなるチャンネル乱流の直接数値計算 (DNS) を試みる。

2 数値計算法

ここでは、壁付近の領域を以下で述べる手法を用いて取り除いた、半開放チャンネル（壁と自由表面に挟まれたチャンネル）を考える。流れ方向、壁垂直方向、スパン方向の座標をそれぞれ x, y, z とし、壁の位置を $y = 0$ 、自由表面の位置を $y = h$ とする。自由表面は変形しないものとし、表面におけるせん断応力は 0 であるとする。ここでは非圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式を数値的に解いた。時間発展は、粘性項を陰的に取り扱う 3 次の Runge-Kutta 法を用いた。空間の離散化については、壁に平行な方向には、流れは統計的に一様であると仮定し、フーリエ・スペクトル法、壁垂直方向には不等間隔格子上の 8 次コンパクト差分法を適用した。

壁垂直方向の境界は、壁面 $y = 0$ ではなく $y = y_b > 0$ に置き、境界条件として $y = y_r > y_b$ における速度場を rescale したものを与えることにより、壁乱流における長さスケールの非一様性を再現する。境界条件のために速度場を参照する面 $y = y_r$ を以下では reference plane と呼ぶことにする。境界 y_b と reference plane y_r がともに対数層にあると仮定し、(長さスケール) \sim (壁からの距離) の関係を瞬時場に適用すると、

$$\hat{u}(y_b, k_x, k_z; t) = \hat{u}(y_r, \alpha k_x, \alpha k_z; t) \quad (1)$$

となる。ここで、 $\hat{u}(y, k_x, k_z; t) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})(y, k_x, k_z; t)$ は高さ y 、時刻 t におけるフーリエ係数を表す。また、 $\alpha = y_r/y_b$ である。この関係式を用いて、各時刻の境界条件を与える。ただし、流れ方向の $(k_x, k_z) = (0, 0)$ のモードに対してはせん断を与えるため $\hat{u}(y_b, 0, 0) = \hat{u}(h, 0, 0) - U_d$ (U_d は定数) を境界条件として与える。また、せん断を考慮し、壁に平行な方向に境界条件を

$$\delta_x(t) = \int_0^t (\hat{u}(y_b, 0, 0; s) - \hat{u}(y_r, 0, 0; s)) ds, \quad \delta_z(t) = \int_0^t (\hat{w}(y_b, 0, 0; s) - \hat{w}(y_r, 0, 0; s)) ds$$

だけ移動する。この操作と上で述べた rescaling を組み合わせて、境界条件を以下のように作成する。

$$\hat{u}(y_b, k_x, k_z) = \hat{u}(y_r, \alpha k_x, \alpha k_z) \exp[i\alpha(\delta_x k_x + \delta_z k_z)]. \quad (2)$$

実際の数値計算では、右辺の各物理量には 1 つ前の時間ステップにおける値を用いる。

式 (1) のように統計的な性質を瞬時場に当てはめて境界条件に用いる手法は、統計的に一様な方向に周期境界条件を適用する場合や、空間発展する境界層の流入条件に内部の速度場を相似則にしたがって rescale した場を適用する場合 [8, 9] などと同じ考え方に基づいている。すなわち、これらは、目標とする統計的性質の空間依存性を満足するように、計算領域内の他の位置における速度場を境界条件として（必要な場合は変形した後）与えるという点で共通している。ここで重要なのは、境界における速度場とそれが参照する速度場が空間的に十分に離れていることである。そうでなければ、両者が結合することで速度場に影響を与えてしまい、望ましいシミュレーション結果を得ることができない [9]。ここで述べた手法を用いる場合も、速度場の相関距離がより短い高レイノルズ数の流れに適用するほうが望ましい。

なお、式 (2) の境界条件は、 $\alpha = 1$ として一様せん断乱流の DNS にも適用が可能である [10]。

3 結果

ここでは、試験的に行った小計算領域かつ低解像度のシミュレーションの結果を示す。壁に平行な方向の計算領域のサイズは $L_x \times L_z = 2\pi h \times \pi h$ 、全格子点数は $N_x \times N_y \times N_z = 384 \times 277 \times 384$ である。壁側の境界条件 (2) におけるパラメータは、それぞれ、 $y_b = 0.1h$ 、 $y_r = 0.2h$ 、 $\alpha = 2$ とし

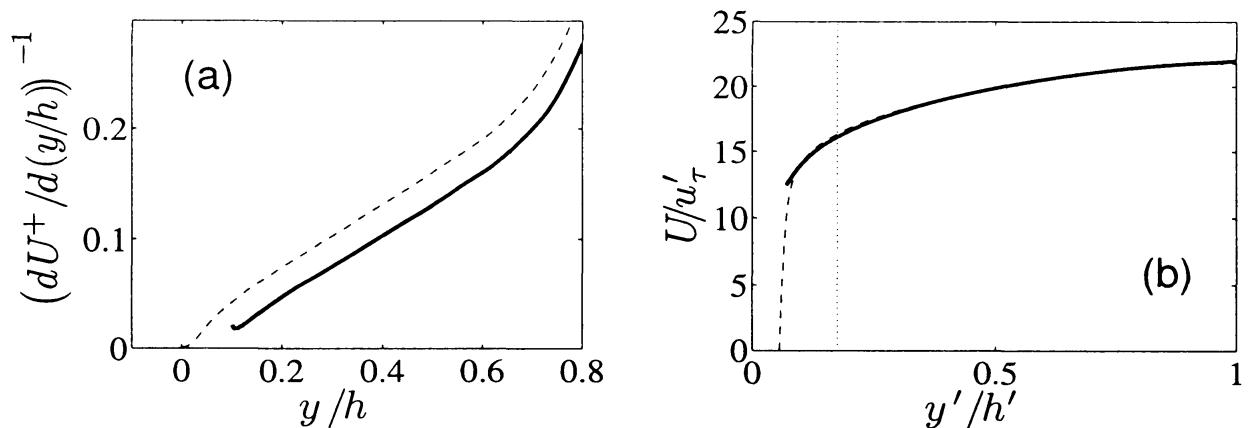


図 1: (a) $(dU/dy)^{-1}$ の分布. (b) 流れ方向の平均流速 U の分布. 点線は reference plane の位置を示す. いずれの図においても実線は壁なしチャンネル, 破線は通常のチャンネルを表す.

た. DNS によって実現される一様なせん断乱流は乱れが時間とともに増加し続けるが, 本 DNS によるせん断流れは定常な状態に達する. したがって, 境界条件 (2) 長さスケールの非一様性はせん断乱流を安定化する役割を果たすことがわかる. 得られた速度場における Kolmogorov 長 $\eta(y)$ に対する格子間隔は, $2\eta < \Delta_x (= 2\Delta_z) < 6\eta$, $1.1\eta < \Delta_y < 1.6\eta$ であり, 壁側の境界付近の壁に平行な方向の解像度が不十分である.

以降では, 壁近傍領域を除いたチャンネルを「壁なし」チャンネルと呼ぶことにする. この壁なしチャンネルでは, 壁面上で定義される壁摩擦速度 u_τ は平均せん断応力 (これは y の線形関数である) を外挿して求められる. 結果として得られた u_τ から決まるレイノルズ数 $Re_\tau \equiv u_\tau h / \nu$ は 960 である. 以下では, 本 DNS の結果を同程度のレイノルズ数 $Re_\tau = 934$ におけるチャンネル乱流の DNS[11] の結果と比較する.

3.1 オフセット

ここから示す統計量はすべて, 統計的に一様な x, z 方向の空間平均, および, 時間平均によって得られたものである. 壁なしチャンネルと通常のチャンネルを比較するために, まずここで y の原点を再定義する. 粗面の壁乱流などでは, y の原点を対数則の原点, すなわち

$$U^+ = \kappa^{-1} \log \left(\frac{y - y_{off}}{y_0} \right)$$

(ここで, κ はカルマン定数, y_0 は roughness-length と呼ばれる) における y_{off} とするが [12], ここでも同様の方法をとる. 平均流速 U の分布に対数則が現れているかどうかを調べるために, ここでは $(dU/dy)^{-1}$ の分布を用いる. 平均流速が対数則にしたがう範囲では, これは y についての線形関数となる. ここで対象としているチャンネルはレイノルズ数が低いので対数層は存在しないのだが, 図 1(a) に示すように, これらのチャンネルにおいても平均流速が「対数則」に従う範囲が外層に存在していることがわかる. この分布から求められた オフセット y_{off} は壁なし, および通常のチャンネルにおいてそれぞれ, $0.0321h$, $-0.0596h$ となった. これらを用いて, 壁垂直方向の座標 y とスケール h, u_τ を以下のように再定義する.

$$y' = y, \quad h' = h(1 - y_{off}/h), \quad u'_\tau = u_\tau(1 - y_{off}/h)^{1/2} \quad (3)$$

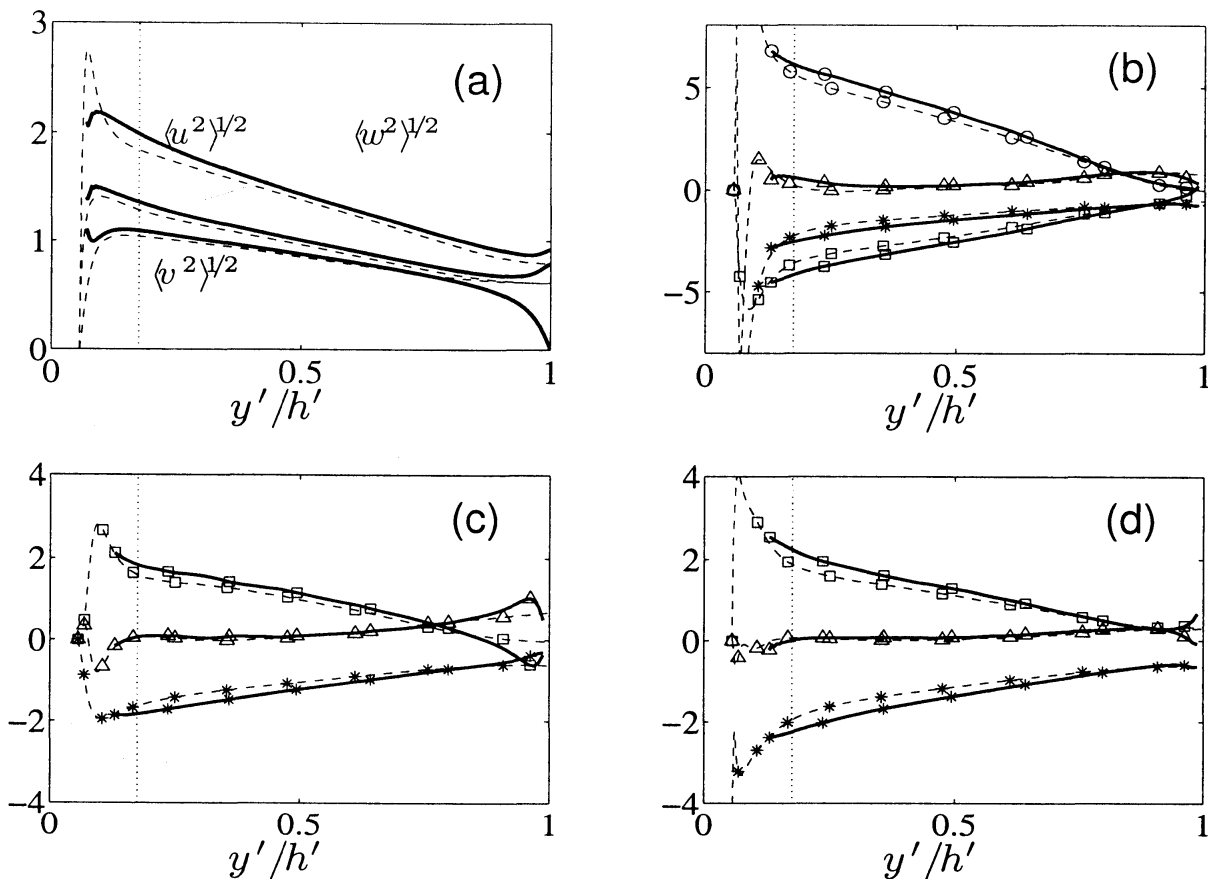


図 2: (a) 各成分の乱流強度. いずれも u'_r で規格化してある. (b-d) はそれぞれ, $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$ に対するエネルギー収支を示し, シンボル \circ は生成項, $*$ は散逸項, \square は圧力項, \triangle は輸送項を表す. これらはいずれも $u'_r{}^3/h'$ で規格化してある. 拡散項は外層においては他の項に比べて非常に小さいので, これらの図では省かれている. いずれの図においても, 実線は壁なしチャンネル, 破線は通常のチャンネルを表す. また, 点線は reference plane の位置 y_r を示す.

これらの座標およびスケールを用いると, 図 1(b) が示すように, 二つのチャンネルにおける平均流速の分布は一致する. 以下では, これらを用いて他の統計量を比較する.

3.2 乱流強度とエネルギー収支

以下では, 速度の平均からのずれを (u, v, w) で表す. この節ではこれらの乱流強度 (root-mean-square) を比較する. 図 2(a) は各方向成分の乱流強度の分布を示す. 下の境界 $y = y_b$ 付近では, 二つのチャンネルの分布は異なるが, 概ね外層に相当する $y' > 0.2h'$ では両者はよく一致していることがわかる. ただし, 今回の壁なしチャンネルは $y = h$ が開放端になっているため, こちらの境界付近においても両者の分布は異なる.

次に, エネルギー収支を比較する. 各成分の二乗平均のラグランジュ微分は以下のようにかける.

$$\frac{D\langle u_i u_j \rangle}{Dt} = P_{ij} + \epsilon_{ij} + T_{ij} + \Pi_{ij} + V_{ij} \quad (4)$$

ここで, $(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ である. 右辺の P_{ij} を生成項, ϵ_{ij} を散逸項, T_{ij} を輸送項, Π_{ij} を圧力項, V_{ij} を拡散項と呼ぶことにし, それぞれの定義は以下で与える.

$$P_{ij} = -\langle u_i u_k \rangle U_{j,k} - \langle u_j u_k \rangle U_{i,k}, \quad \epsilon_{ij} = -2\nu \langle u_{i,k} u_{j,k} \rangle,$$

$$T_{ij} = \langle u_i u_j u_k \rangle_{,k}, \quad \Pi_{ij} = -\langle u_i p_{,j} \rangle - \langle u_j p_{,i} \rangle, \quad V_{ij} = \nu \langle u_i u_j \rangle_{,kk}$$

ここで, $i, j = 1, 2, 3$, U_i は平均, p は圧力, 下付のコンマのあとの添え字 i は x_i での微分を意味する. これらは, 乱流エネルギーの入力と出力を表し, 乱流状態を維持するダイナミクスに関係する量である. 統計的に定常な状態では, 式 (4) の右辺の各項がバランスする. 流れ方向成分 u に対するこれらの項の分布を図 2(b) に示す. 外層では各収支項は小さな値をとるため, 比較を容易にするために y' を乗じた値を表示している. 流れ方向成分の収支において主要な項は, 生成項, 圧力項, 散逸項である. 壁乱流では, せん断によって乱流エネルギーがまず u に供給され, その一部は粘性によって散逸し, 残りは圧力を通じて他の成分に分配される. これらのいずれの量の分布も壁なしと通常のチャンネルの両者でよく一致している. ただし, $y = h$ 付近では流れのタイプの違いにより, 収支も異なる. 図 2(c,d) は v, w に対するエネルギー収支の分布を示す. 主要な項は圧力項と散逸項であり, u から分配されてきたエネルギーが粘性によって散逸している様子が示されている. これらについても, $y = h$ 付近を除き, 二つのチャンネルはよく一致している.

以上から, 壁なしチャンネルは, 通常のチャンネルの外層における乱れの強さをよく再現していることがわかる. また, エネルギー収支も一致していることから, 乱れを維持するダイナミクスも再現していることが期待される.

3.3 スペクトル

最後に乱れのスペクトル

$$\phi_u(y, k_x, k_z) = |\hat{u}(y, k_x, k_z)|^2$$

を比較する (他の速度成分の定義も同様である). これは乱れのエネルギーの波数空間における分布を与えるもので, 乱れの特徴的な長さスケールを知ることができる. 今回のシミュレーションで用いた境界条件 (2) は境界付近に目標とする長さスケールの勾配, すなわち (壁からの距離) \sim (長さスケール) を再現する為のものであった. まずは, 実現された流れにおける長さスケールの振る舞いを調べる. 図 3(a) は k_x について積分した v の一次元スペクトル,

$$\sum_{k_x} \phi_v(y, k_x, k_z)$$

を示す. 横軸はスパン方向の波長 λ_z/h' , 縦軸は y'/h' であり, いずれの方向も対数軸を用いている. また, この図に示されているスペクトルは各高さ y における $\langle v^2 \rangle$ で規格化し, k_z を乗じている. 実線の等高線は壁なしチャンネル, 影付きの等高線は通常のチャンネルのスペクトルを表す. また, 水平の破線は reference plane の位置を示す. この図から, 壁なしチャンネルでは上の境界 $y = h$ の付近を除く広い範囲で線形の長さスケールの勾配が実現されていることがわかる. ただし, 式 (1) の rescaling は reference plane と境界がともに対数層にあってはじめて物理的な意味を持つが, ここで対象としているチャンネルのレイノルズ数は対数層が現れるほど大きくない. したがって, 壁側の境界 $y = y_b$ 付近の領域は, 通常のチャンネルではバッファ層に相当しており, 長さスケールの分布が異なっている. また, 他方の境界 $y = h$ 付近では, 流れのタイプが異なるために違いが現れている. しかしながら, $0.2 < y'/h' < 0.7$ では両者のスペクトルはほぼ一致している.

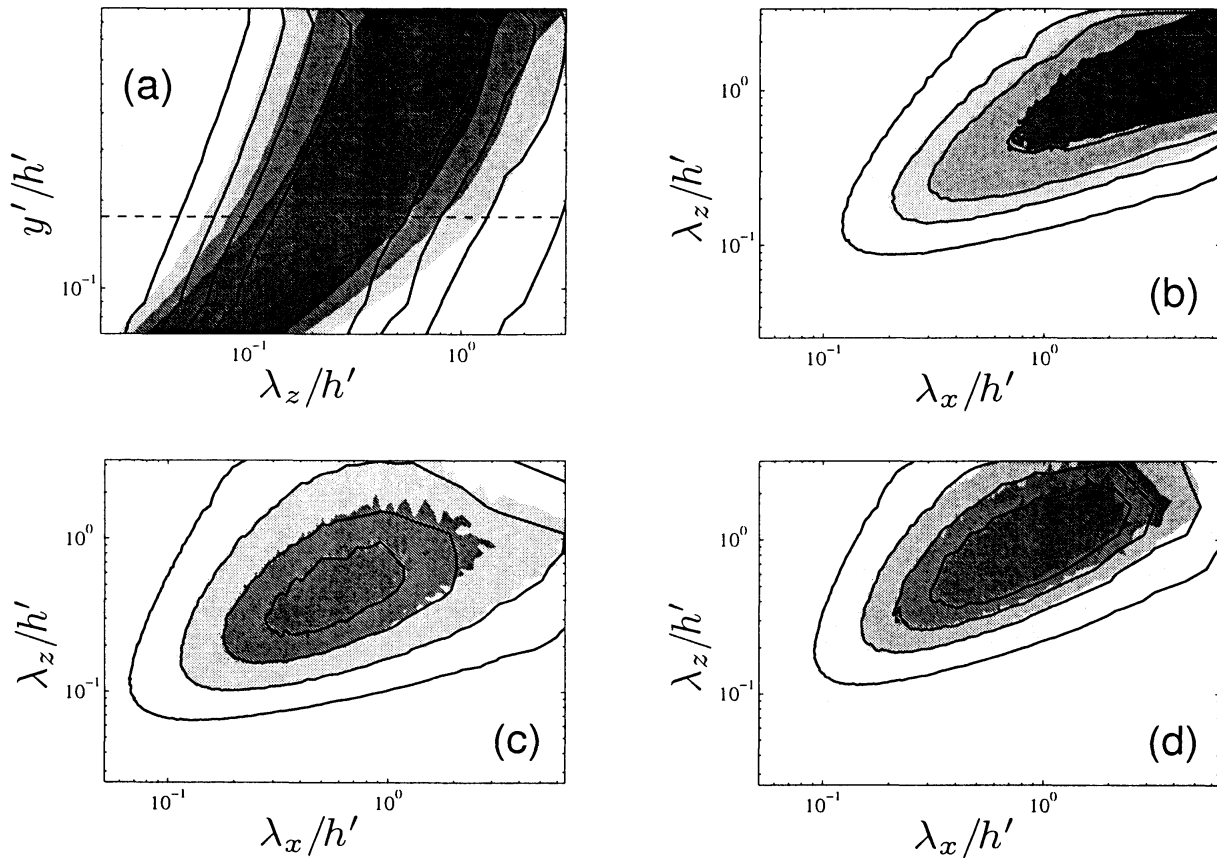


図 3: 乱れのスペクトル. (a) 壁垂直方向 v の k_x について積分された一次元スペクトル. 横軸はスパン方向の波長 λ_z , 縦軸は y' . 各高さにおける $\langle v^2 \rangle$ で規格化し, k_z を乗じてある. 破線は reference plane の位置を示す. (b-d) 高さ $y' \approx 0.5h'$ における u, v, w の二次元スペクトル. 横軸は流れ方向の波長 λ_x , 縦軸は流れ方向の波長 λ_z . これらは, $u'_r{}^2$ で規格化し, $k_x k_z$ を乗じてある. いずれの図においても, 実線の等高線は壁なしチャンネル, 影つきの等高線は通常のチャンネルのスペクトルを表す.

次に、 v の一次元スペクトルにおいて一致が見られた外層における二次元スペクトルを比較する。図 3(b) は $y' \approx 0.5h'$ における流れ方向成分 u の二次元スペクトル ϕ_u を示す。横軸は流れ方向の波長 λ_x 、縦軸はスパン方向の波長 λ_z である。二つのチャンネルのスペクトルは非常によく一致していることがわかる。この成分には大きなスケールの構造が現れ、その特徴的な長さスケールは、およそ $\lambda_x > 5h$ 、 $\lambda_z \approx h$ である [11]。比較対象としている通常のチャンネルの計算領域の壁に平行な方向のサイズは $L_x \times L_z = 8\pi h \times 3\pi h$ であり、これらの構造を十分に捉えることができるが、今回の壁なしチャンネルの計算領域のサイズは十分に大きくない。そのため、この図では二つのチャンネルのスペクトルに $\lambda_x > 3h'$ 、 $\lambda_z > 2h'$ の大スケールの領域においてわずかに違いが現れており、壁なしチャンネルでは、特にスパン方向のサイズが不足していることがわかる。しかしながら、大規模構造の平均的なスケールである $\lambda_x > 5h$ 、 $\lambda_z \approx h$ 周辺のスペクトルには大きな違いが現れてはならず、可視化によっても構造の差異は確認されなかった。一般には構造を長さスケールのみで特徴付けることはできないが、壁なしチャンネルではこれら大規模構造も再現されているものと期待される。大きさが計算領域に達するような構造が顕著に現れない他の成分 v, w のスペクトルについては、図 3(c,d) に示されているように波数空間全体で二つのチャンネルがきわめてよく一致している。

以上から、壁なしチャンネルは、乱れの強さのみならず、大規模構造を含めた乱れの長さスケールも非常によく再現していることがわかる。

4 議論とまとめ

前節では、壁付近の領域を除いたチャンネルの DNS の結果を通常のチャンネルの DNS の結果と比較した。通常のチャンネルにおける外層に相当する領域では、乱流強度、エネルギー収支、そして乱れのスペクトルのいずれにおいてもよい一致を得た。すなわち、壁なしチャンネルの DNS は、少なくとも 2 次の統計までに関しては、通常のチャンネルをよく再現することがわかった。したがって、チャンネル乱流において、壁あるいは壁近傍領域から外層への本質的な寄与は、長さスケールの変化であるということが結論できる。また、この結果は、壁付近の流れが外層へ与える影響は非常に小さいとする過去の粗面のチャンネルなどの研究の結果とも一致する。

二つのチャンネルの比較はすべて、式 (3) にしたがって再定義された座標とスケールの下で行われた。今回は、レイノルズ数が低いため、本来の対数則の原点としての オフセット y_{off} を用いることができなかったが、対数層を持つ高いレイノルズ数のデータ [2, 3] によると、 y_{off} は wall unit、 ν/u_τ で規格化でき、およそ $y_{off}^+ \approx 15$ であることがわかった。一方で、壁なしチャンネルにおける y_{off} のレイノルズ数への依存性は、現在のところはまだ明らかではない。また、 y_b, y_r に依存することも考えられる。しかし、壁なしチャンネルと実際のチャンネルとの対応を考える上でオフセットは不可欠であるので、シミュレーションを実行する前にその見積もりが可能となることは重要である。

今回のシミュレーションでは 2 節で述べたように、壁から離れた位置 $y = y_b$ における境界条件として、 $y = y_r$ における速度場を適当に変換したものを与えたが、これは 3 節で示されたように、実際のチャンネルの $y = y_b$ における速度場の統計的な性質を完全に再現しているわけではない。実際の流れとの大きな違いの一つとして、境界条件 (2) では inactive motions が考慮されていないことが挙げられる。壁に平行な速度成分 u, w には、壁に平行な方向の長さスケールが壁からの距離に対して比較的大きいモードが現れることが知られており、これらのモードが表す運動が inactive motions である [5]。この inactive motions はスケージング則 (1) に従わないため、rescaling によって作成された境界における速度場では inactive motions は再現されていない。これは境界付近の乱流強度が二つのチャンネルで異なる一因と考えることができる。しかしながら、図 2 のスペクトルからわかるように、外層では inactive motions を含めるすべてのモードが再現されている。し

たがって、外層の流れを再現することに限れば、境界付近で inactive motions を再現する必要がないことがわかる。その理由は、これらのモードが $y \sim \lambda$ の分布から外れていることにより、壁垂直方向の運動量輸送を担う $\langle uv \rangle$ には寄与しないため（この意味で ‘inactive’ と呼ばれる）、これらのモードの有無があまり他所に影響しないためであると考えられる。

我々は、壁近傍を除いたものと通常のチャンネルの違いをより明らかにするために、開水路ではなく二平板間のチャンネルに対して同様のシミュレーションを行った。その結果、およそ $y > y_r$ の外層に相当する全域で、ここで示した統計がやはり非常によく一致することを確認した。また、現在は、境界付近における統計の不一致の原因を明確にするために、境界と reference plane がともに対数層に収まるような高レイノルズ数の DNS を行っている。これらの結果の詳細については他に機会を譲りたい。

本研究は、Spanish CICYT grant (TRA2006-08226) の支援を受けて行われた。また、著者の一人である水野吉規はスペイン文科省の Juan de la Cierva program の支援を受けている。

参考文献

- [1] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, (MIT Press, 1972).
- [2] D. B. DeGraaff and J. K. Eaton, “Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer,” *J. Fluid Mech.* **422**, 319 (2000)
- [3] S. Hoyas and J. Jiménez, “Turbulent fluctuations above the buffer layer of wall-bounded flows,” *J. Fluid Mech.* **611**, 215 (2008).
- [4] J. Jiménez, “Turbulent flows over rough walls,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 173 (2004).
- [5] A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1976).
- [6] O. M. Bakken, P. A. Krogstad, A. Ashrafian and H. I. Andersson, “Reynolds number effects in the outer layer of the turbulent flow in a channel with rough walls,” *Phys. Fluids* **17**, 065101 (2005).
- [7] O. Flores and J. Jiménez, “Effect of wall-boundary disturbances on turbulent channel flows,” *J. Fluid Mech.* **566**, 357 (2006).
- [8] T. S. Lund, X. Wu, and K. D. Squires, “Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations,” *J. Computat. Phys.* **140** 233 (1998).
- [9] M. P. Simens, J. Jimenez, S. Hoyas and Y. Mizuno, “A high-resolution code for turbulent boundary layers,” *J. Comput. Phys.* (in press),
- [10] J. Jiménez, “Simulation of homogeneous and inhomogeneous shear turbulence,” *CTR Ann. Res. Briefs*, 367 (2007).
- [11] J. C. del Álamo, J. Jiménez, P. Zandonade, and R. D. Moser, “Scaling of the energy spectra of turbulent channels,” *J. Fluid Mech.* **500**, 135 (2004).
- [12] M. R. Raupach, R. A. Antonia and S. Rajagopalan, “Rough-wall turbulent boundary layers,” *Appl. Mech. Rev.* **44**, 1 (1991).