

線形代数の教科書における挿図の利用について — KETpic 利用の可能性を中心に—

木更津工業高等専門学校・基礎学系 金子 真隆 (Masataka Kaneko)
阿部 孝之 (Takayuki Abe)
山下 哲 (Satoshi Yamashita)

Department of Fundamental Research,
電子制御工学科 泉 源 (Hajime Izumi)

Department of Control Engineering,
Kisarazu National College of Technology

呉工業高等専門学校・機械工学科 深澤 謙次 (Kenji Fukazawa)

Department of Mechanical Engineering,
Kure National College of Technology

工学院大学・工学部

北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)
Faculty of Engineering,
Kogakuin University

東邦大学・薬学部

高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Facluty of Pharmaceutical Sciences,
Toho University

1 はじめに

KETpic は数式処理システム (CAS) に付属するマクロパッケージであって、CAS の計算機能を生かしつつ、TeX 文書中に正確で美しい図を手軽に挿入するためのものである。当初は、Maple や Mathematica に対するパッケージから出発したが (1),5)、現在では、無償のソフトである Scilab、Maxima への移植がほぼ完成し (6),7),10)、数理解析の教材作成に対する利用可能性がより一層意識されるようになってきた。実際、我々開発グループのメンバーは、 KETpic を用いて作成された教材を実際の授業で使用してきている (10),11))。本稿の中でも、 KETpic により描かれた図を用いているが、主に用いたのは Scilab 版である。

Scilab 版では、混合リスト処理が必要になるなど細かな違いはあるが、どの CAS を用いるにせよ、作業手順に大差はない。CAS ごとの KETpic のパッケージは

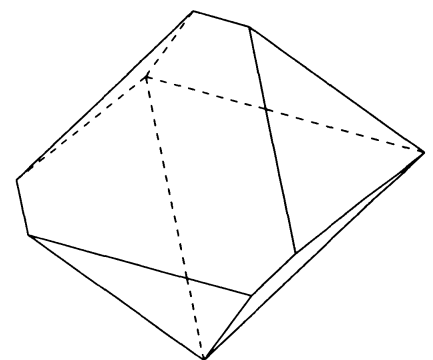


図 1 多面体とその切断

より無料でダウンロード可能である。

KETpic による描画の特徴は、まず TeX との親和性と (CAS の利用に基づいた) 図の正確さとを両立させていることである。

また、白黒の線画を基本とし、濃淡やカラーを使わないので、大量印刷媒体上にコピーしても品質を維持出来る。従って、学生の手元に残して繰り返し使わせることにより数学的な概念を定着させる教材の作成ツールとして、有効であることが指摘できる。

さらに、板書では困難な空間図形の描画も相当程度可能である。たとえば、多面体と平面による切断の描画機能 (図 1)、空間曲線の図に遠近感を持たせるための隠線処理機能 (図 2) や、曲面描画機能 (図 3) が装備されている。

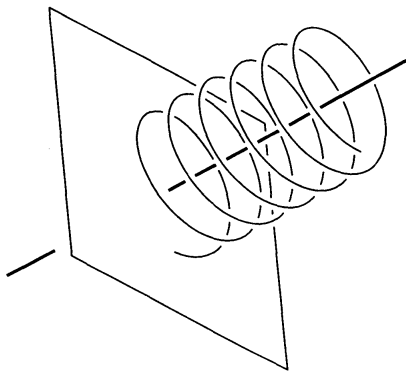


図 2 隠線処理

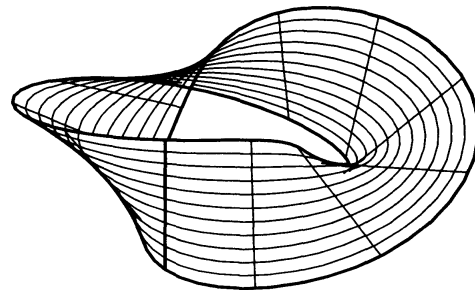


図 3 曲面描画

下図に示す通り、 KETpic を用いて TeX 文書中に図を挿入する際に、 KETpic を用いるのは次の 2 つの作業においてである：

1. KETpic のコマンドを使い、描画したい図形のプロットデータを計算すること。
2. 得られたプロットデータを TeX 形式の図ファイルとして書き出すこと。

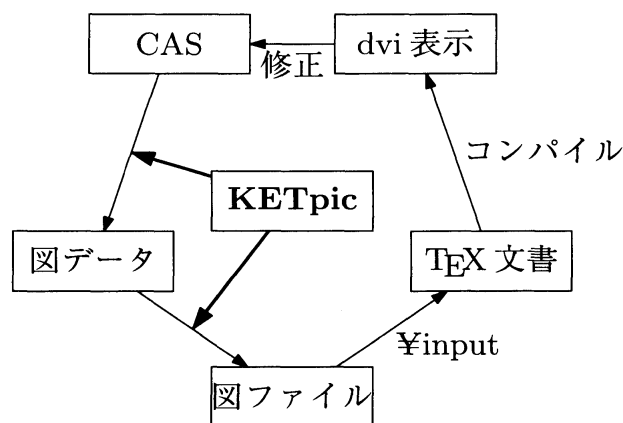


図 4 KETpic による描画プロセス

上記の 2 番目のプロセスが定型的であるのに加え、上に掲げた多面体やその切断の描画、隠線処理、曲面描画などでは 1 番目のプロセスも半ば自動化されているので (2),3),4)),

描画にかかる負担が非常に軽いのも魅力である。多面体や曲面の描画のために、CASによる直接描画では面画の手法を用いるのに対し、 $\text{KE}T_{\text{pic}}$ では線画の手法を用いる。

本稿では、このような特徴をもつ $\text{KE}T_{\text{pic}}$ によって、線形代数の教材中に挿入する図として、教育効果の高いものを作成できる可能性について言及したい。まず次節では、特に線形代数に注目するに到った経緯を説明する。

2 アンケート調査の実施

昨年度の本研究集会で、 $\text{KE}T_{\text{pic}}$ による曲面描画と教育への利用可能性について報告した。その最後に、今後 $\text{KE}T_{\text{pic}}$ をより有効な描画ツールとするために

現在数理科学教育の現場でどのような図入り教材が用いられているかという実態、そして、どのような図があるとより高い教育的効果が得られると考えられているかという教員サイドのニーズをもっと詳しく調査すること

という課題があることを指摘した(12))。このようなこともあって、我々研究グループでは、2008年の9月から12月にかけて、授業での図の利用状況や図入り教材の作成方法、図作成ソフトに関するニーズを主な内容とする全国的なアンケート調査を実施した。全国の高専で、数学を中心に物理・化学・専門科目を担当されている教員、および、一部の大学で初年級の数学を担当されている教員を対象とし、前者については56高専521人、後者については23大学146人から回答頂いた。

設問の詳細な内容は、前述のウェブサイトに掲載してあるが、その一部を拾い上げると

1. 教材の作成方法(手書き、ワープロ、スタディエイド、TeX など)
2. 板書以外で図を良く用いるか否か
3. 教材に入れる図の作成方法(手書き、表計算ソフト、CAS、描画ソフト、 TeX 描画 など)
4. 図を用いると効果的だと考えられる授業場面(自由記述形式で3つまで)

などの項目について尋ねている。

分析結果については、数式処理学会(2009年6月)や日本数学教育学会(2009年8月)で報告した(8))ので詳細を省略するが、平面図形に比べ、空間図形の図を教材に取り入れることに困難を感じている教員が多いことが明らかになった。特に、空間図形の描画の場合に TeX による描画の利用率が下がることが特徴的であった。

図を使いたい授業場面の回答例として挙げたのは、大別して次の2つである。

(I) 正確な図を見せたい場面

- 1 変数および2変数の関数のグラフ・極値(多数意見)
- フーリエ級数やテイラー展開の収束状況を示す図(少数意見)
- 2次曲線や2次曲面・微分方程式の解曲線(少数意見)

(II) 概念的な図を示したいが、板書が比較的難しい場面

- 微分係数・定積分・偏微分・全微分・重積分と累次積分の説明図(多数意見)
- 接平面・ベクトルの図(少数意見)

これを見て分かるとおりに、線形代数では図を使いたいという場面がなかなか挙がらず、図に対するニーズが低い。実際、アンケートで図をよく使う分野を尋ねたところ、「線形代数」という回答は「微分積分」という回答に比べかなり少ない。さらに、線形代数で図をよく使うと回答した人は、ほぼ例外なく解析系の科目でも図をよく使うと回答していて、もともと図を使うことに抵抗感が少ないとみられる。

線形代数では、教材への挿図に対するニーズがなぜ低いのか。アンケートでは「板書以外に図をあまり用いない場合、その理由は何か?」という、自由記述形式の問いかけをしている。分野ごとに分けて尋ねてはいないので、さまざまな回答が寄せられているが、線形代数におけるニーズの低さに結びつきそうな記述を拾うと

「教科書の図を見れば十分」

「図は補助として利用し、内容を文章で正確に表すことを大事にしている」

「手書きの概念図は時々板書するが、正確な図に対しては必要を感じない」

「視覚に頼りすぎることになると思われるから」

などが挙げられる。一見、教材中の図の利用について前向きとは言えない回答だが、よく見ると、「教育効果の高い図を」「手軽に」作成できるようになれば、利用する余地を残した回答とも読めるだろう。このように考えると、現状では図の利用が少ない線形代数のような分野が、かえって教育効果の高い図を作成する余地を残していると言えないだろうか。筆者が線形代数に注目した理由はここにある。

アンケートは配布教材を主たる対象としたものだが、線形代数などの場合、決まった教科書に沿った授業が行われるケースも多いであろう。そのため、教科書における図の利用状況も調べることにした。

3 線形代数の教科書における図の利用状況

本節では、高専から大学初年級向けの線形代数の教科書における図の利用状況を調査した結果を示す。調査内容の中心は

1. 図が何枚使われているか。
2. 図がどのような場面で使われているか。

の2点である。いくつかの教科書について、サンプルの形で示すことにしよう。

サンプル1

『入門線形代数』（三宅：培風館・148ページ・カラー刷り）

多くの大学で教科書として用いられており、ページ数からもわかる通り、かなりコンパクトにまとめられている。図の少なさはこうしたことにもよるのだろうが、同じ著者が同じシリーズで出版されている微積分の教科書では、同じ程度のページ数で107個の図を用いており、その差は大きいと言わざるを得ない。

章番号	章の内容	図の数	備 考
1	行列	0	
2	連立方程式	0	
3	行列式	0	
4	ベクトル空間	0	
5	線形空間	1	楕円を用いた固有ベクトルの説明図
6	内積空間	0	

サンプル 2

『線形代数キャンパス・ゼミ』（馬場・高杉：マセマ・223 ページ・カラー刷り）

標準的な教科書というよりも、例題とその解答という形式が軸となっており、例題の解説のために図を多用しているという色彩が強い。同じ著者が同じシリーズで出されている微積分のゼミでは130個の図が用いられているのと比べると、やはりかなり少ない。

章番号	章の内容	図の数	備 考
1	ベクトル	18	
2	行列	7	
3	行列式	0	
4	連立方程式	3	ランクの説明図
5	線形空間	8	
6	線形写像	12	点と点の対応がほとんど
7	対角化・計量線形空間	7	計量関係のもののみ
8	Jordan 標準形	0	

サンプル 3

『線形代数学』（佐武：裳華房・324 ページ・白黒印刷）

日本を代表する教養課程向け線形代数の教科書であるが、ベクトルの基本演算などの説明に見慣れた図が使っているものの、白黒であることもあってか、図の使用はかなり控え目である。

章番号	章の内容	図の数	備 考
1	ベクトルと行列の演算	0	
2	行列式	2	
3	ベクトル空間	3	
4	行列の標準化	3	
5	テンソル代数	0	
6	幾何学的説明	16	ベクトルの基本演算や外積の説明が中心 (平行六面体など)

サンプル4

『線形代数 30 講』（志賀：朝倉書店・206 ページ・白黒印刷）

今回調査した白黒印刷の線形代数の書籍の中では、かなり意識的に図を用いた異色作である。2次元に比べ3次元の場合に図の使用が少ないのは、アンケートの結果と一致する。

章番号	章の内容	図の数	備考
1	連立方程式	0	
2	関数・写像	7	
3	\mathbb{R}^2 の線形写像	23	
4	\mathbb{R}^3 の線形写像	9	3次元の図の遠近感に多少難ありか？
5	ベクトル空間	0	
6	線形写像	0	
7	核とランク	0	
8	行列式	0	
9	基底変換・固有値	8	

サンプル5

『線形代数の世界』（斎藤：東大出版会・278 ページ・白黒印刷）

対象として、数学科の学生を強く意識した教科書である。使われている図はすべて、部分空間を箱で表すなどした模式図ばかりであり、ベクトルを示す矢印を含む図は全く使われていない。

章番号	章の内容	図の数	備考
1	線形空間	4	
2	線形写像	3	
3	自己準同型	2	
4	双対空間	2	
5	双線形形式	0	
6	群と作用	1	
7	商空間	4	
8	テンソル積と外積	1	

これ以外に調査した書籍も含めると、線形代数では、配布教材のみならず、教科書においても図の使用が少ない実態が明らかになった。その原因として、教科書での図の使い方を見る中で、次の諸点を指摘できる：

1. 解析系に比べ直線的な図形が多いので、教科書中に描画せずとも板書で十分だと思われがちなこと。

2. 線形代数では一般次元の話が多く扱うが、教材中に描画できるのは高々3次元までであり、図を用いてしまうとうこうした一般性に対する理解を阻害するのではないかと考えられがちなこと。
3. 逆に概念図として、2次元の図では陳腐になりがちなので、最低でも3次元の図を用いたいというケースが少なくないが、見やすい図を描くのは必ずしも容易ではないこと。

4 $\text{KE}T\text{pic}$ を用いた線形代数テキストへの挿図例

本節では、第1節で説明した特徴を踏まえ、 $\text{KE}T\text{pic}$ による描画を含んだ線形代数の教材例を提示する。いずれも、高専4年生（大学1年生相当）に対する『線形代数続論』で用いた教材である。

ベクトルの図形的応用や2次曲線・2次曲面等の教材作成にも利用できるが、これらは解析系の教材における $\text{KE}T\text{pic}$ の利用と趣旨が相当程度重なると考えられる。そこで本節では、行列のランクや、線形変換の表現行列を考えることの図形的意味など、線形代数の基本概念の説明に用いた教材の例を提示する。

サンプル1 (連立方程式の解と行列のランク)

行列のランクは連立方程式の問題に関連して教えられるのが一般的だが、一言で説明するのが難しいので、3次正方行列(3元連立方程式)の場合に図形的な説明ができないかと考えた。連立方程式の解法を、 \mathbb{R}^3 中の平面の交わりを求める問題に言い換えて、ランクとは交わりを考える平面の枚数であると説明すべく、図5から図7を作成した。

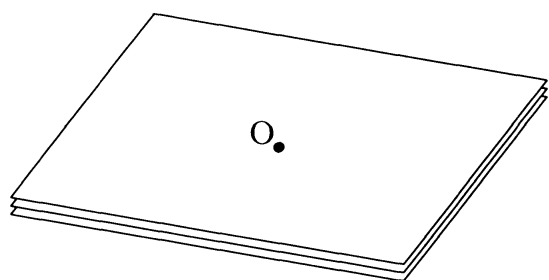


図5 ランク1の場合

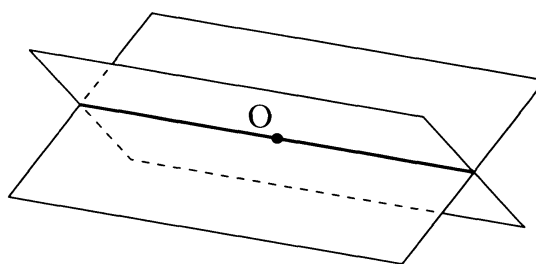


図6 ランク2の場合

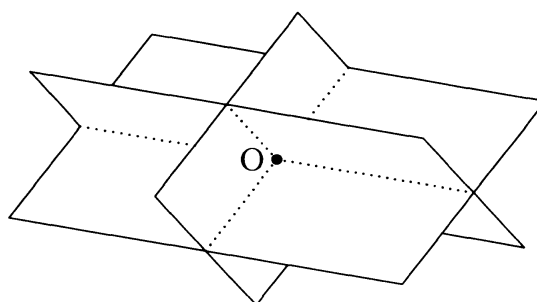


図7 ランク3の場合

ところが、実際に授業で用いたところ、図8の場合はどうなるのかという質問が学生から出て、慌てて図6を差し替えた。折角の質問なので、解空間の次元が1になる理由を、法線ベクトルの線形従属性と結びつけて、図9を用いて説明することにした。

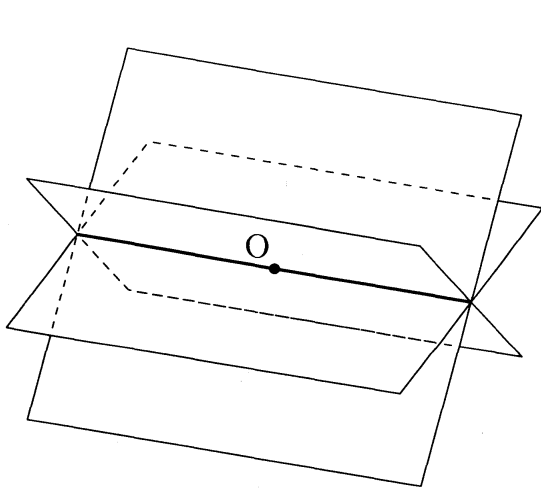


図8 図6の修正版

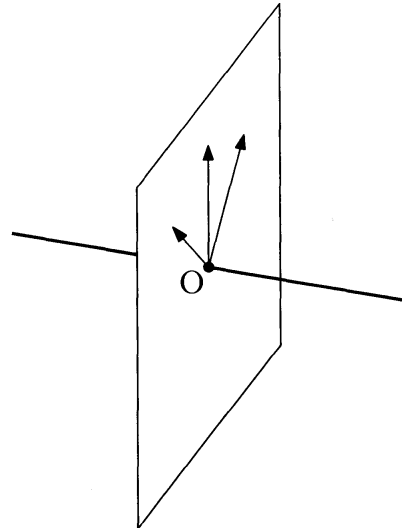


図9 法線ベクトルの状況

KEPic による描画は線画が基本で隠面処理の機能は装備されていないため、これらの図を作成する際、境界線の2次元への射影データを求めた後に交点で分割し、部分毎に実線や点線で描き分けるといふ、やや手数のかかる手続きを踏んでいる。

サンプル2 (平行投影を用いた基底の取替えの説明)

\mathbb{R}^n の線形変換を、標準基底以外の基底をとって行列表現することの意味は、代数的な取扱のみでは学生に納得されづらい。

そこで、 \mathbb{R}^3 内にある平面や直線に沿った平行投影を与える行列を計算させる例題を通して、図形的に説明することにした。図10はその例題で用いたものである。

当初この図は手書きで描いていたが、かなりわかりにくかった上に、自習した学生の中にはシュミットの直交化法の問題と混同する者も出たりしたため、正確で美しい KEPic による描画に切り替えた。とかく概念図というところ、正確さは必要ないと思われがちであるが、線形代数では正確な概念図を求められる場面が少なくないことを指摘しておきたい。

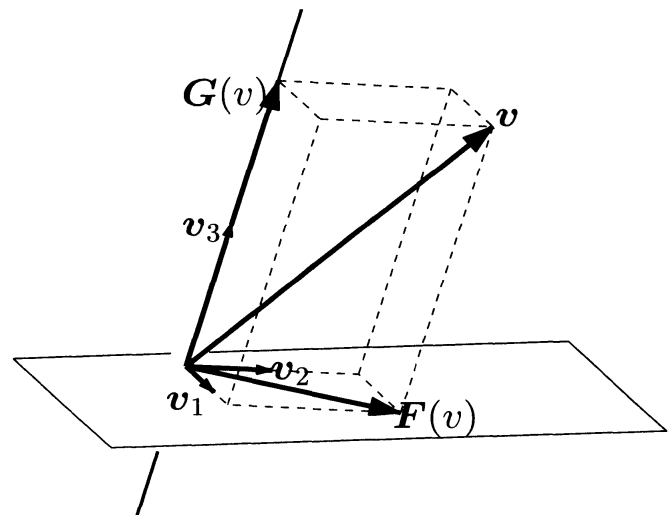


図10 平行投影

サンプル3 (固有値と固有ベクトルの図形的意味)

固有値・固有ベクトルの意味は、線形変換の構造を見易くするものとして説明されることが多い。実際、今回調査した教科書のほとんどで、ベクトルを使うか、平行四辺形や楕円を使うかという違いはあるものの、図11に類する2次元の説明図を用いている。

しかし、 R^2 の場合、多少見難くはなるが、あえて固有ベクトルを用いなくても、線形性に基づいた同様の絵を描くことはできる。このため、2次元の説明図を使うと、説得力に若干欠ける面が否めない。

そこで、3次元のケースを図示してはどうかと考へて作成したのが図12である。図12を作成するに当たっては、 $\text{KE}T\text{pic}$ の特徴である隠線処理の機能や、線の太さを変えられる機能を活用し、遠近感が出るように工夫されている。また、見る方向によってはこの図もかなり見づらくなるが、 $\text{KE}T\text{pic}$ による空間図形の描画では視点を簡単に換えられる機能も装備されており、微調整を繰り返してこの形に落ち着いた。

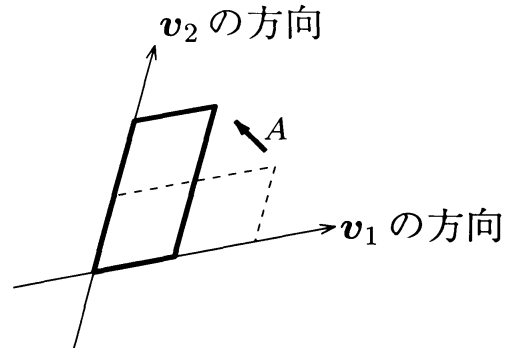


図11 固有値・固有ベクトルの説明図

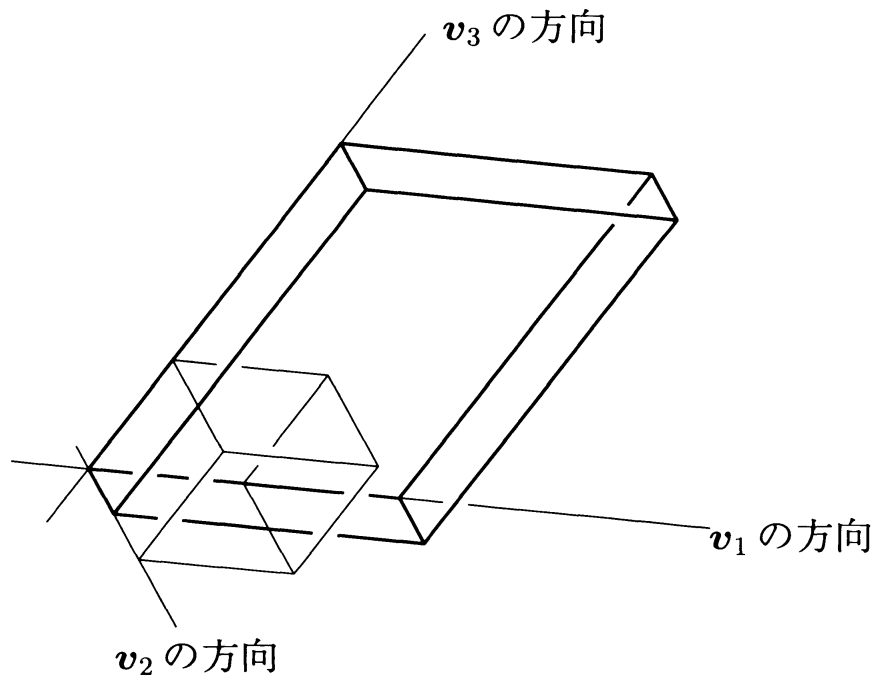


図12 固有値・固有ベクトルの説明図

図12と、固有ベクトル v_1 , v_2 , v_3 以外の基底、たとえば標準基底を用いた場合の図(図13)を見比べさせれば、はるかに説得力があると言えよう。

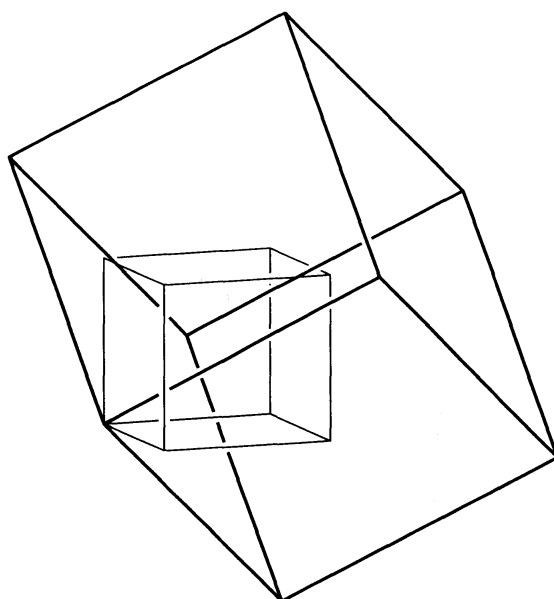


図 13 標準基底を用いた場合

サンプル 4 (複素数の固有値)

次の例は、複素数の固有値が出てくる線形変換の例として、座標軸以外の直線を軸とする R^3 の回転変換を扱ったものである。

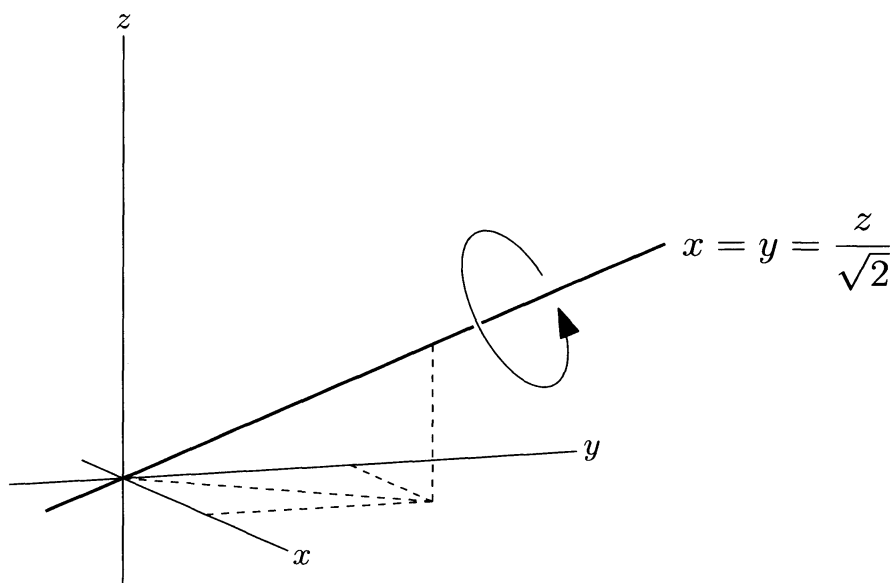


図 14 R^3 の回転変換

この変換の固有ベクトルとして回転軸に平行なものしかとれないことを説明するためには、それ以外のベクトルを回転すると、平行でないベクトルに写されてしまうことを示さなければならない。筆者の場合、その説明は口頭で行うのが常であったが、すぐには学生の理解を得られないケースが多かった。

このため、最近はこの図 15 を利用するようになっている。

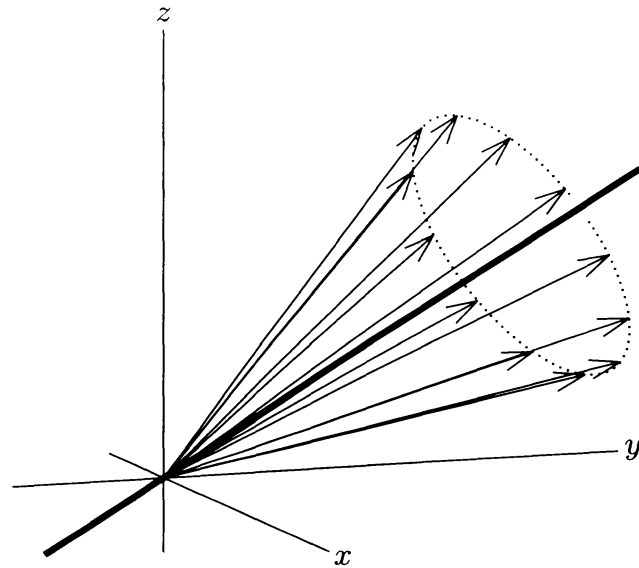


図 15 回転変換の固有ベクトル

手書きでこれと同じ質の図を描くのは困難だが、`KE_Tpic` を用いれば、下記のような比較的簡単な Scilab のコマンドラインで描けてしまう：

```
Setangle(80,-20);
L1=Spaceline(Mix([0,0,-1],[0,0,4]));
A1=Xyzax3data('[-1,3]','[-1,3]','[-0.5,3]');
C1=Spacecurve('cos(t),sin(t),3','t=[0,2*pi]');
R1=Rotate3data(L1,[0,0,1],[1,1,1]);
PR1=Projpara(R1);
R2=Rotate3data(C1,[0,0,1],[1,1,1]);
PR2=Skeletonparadata(R2,R1,1.5);
PA1=Projpara(A1);
P0=[1,0,3];
RP0=Rotate3pt(P0,[0,0,1],[1,1,1]);
PRP0=Projpara(RP0);
AL0=Arrowdata([0,0],PRP0);
MLk=AL0;
for k=1:12
    RPk=Rotate3pt(RP0,[1,1,1],2*pi*k/12);
    PRPk=Projpara(RPk);
    ALk=Arrowdata([0,0],PRPk);
    MLk=Joingraphics(MLk,ALk);
end
```

さらに、複素数の固有値が出てくる事情を説明するために、回転軸と直交する平面上のベクトルを描いた図 16 を用意した。

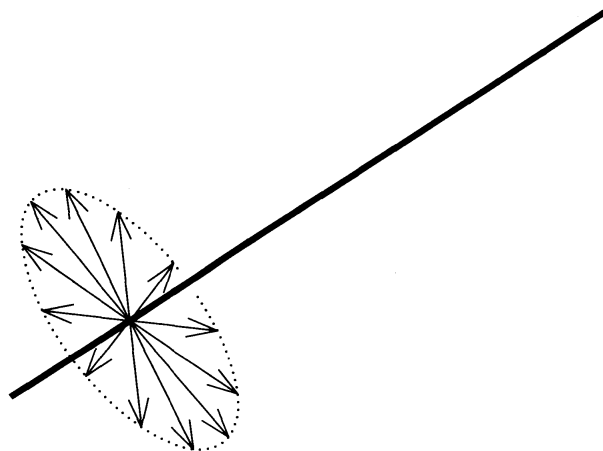


図 16 複素数の固有値

回転軸の方向ベクトル v_1 、および上記の平面上のベクトルの組で互いに直交するもの v_2, v_3 からなる R^3 の基底をとると、この基底に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となることを理解させ、固有値としては 1 以外に $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ が存在することを導くわけである。

5 結論と今後の課題

線形代数では、教科書や配布教材での挿図の利用が少ない。その理由としては、次の 2 点が大きいと考えられる。

1. 一般次元の話を理解させる上で、図の使用が邪魔になると考えられがちなこと。
2. 2次元の概念図では陳腐になりがちな一方、3次元の概念図をわかり易く描くのは、特に白黒の線画を基本とする TeX などのテキストで困難を伴いがちなこと。

しかし、 KpTpic を用いれば、色彩や濃淡を用いずらい TeX で作成されたテキスト中にも、正確でイメージ豊かな 3次元の概念図を挿入できる。

数物系の学生の教育についてはまた違った観点もありうるが、工学系などの線形代数を道具として用いる分野の学生にとっては、抽象的な概念を応用する際に、その概念の図形的なイメージが身に付いていることが欠かせない。 KpTpic は、教養課程や高専での線形代数の教育において、こうした能力を養成したいという潜在的なニーズに応えられる可能性を持つ。

今後の課題としては、まず技術的な面として、互いに交わりを持つ「平面どうし」や「平面と直線」を、より簡単に描画できるようにすることが挙げられる。 KpTpic は面画

でなく線画を基本とするため、このような描画に多少困難をとまなうのが現状で、隠線処理や多面体の描画と同様に自動化されるようであれば、線形代数で求められる様々な概念図の描画に利用できるケースが増えるであろう。ちなみに、互いに交わらない複数の曲面群の描画については、現在でも $\text{K}\epsilon\text{T}\text{pic}$ で相当程度描画が可能になっている。

教育的な観点での課題は、本稿で示したような、代数的な概念の習得を助けるための図形的なアイテムを更に発掘することである。一例として行列式を取り上げよう。その絶対値は平行四辺形の面積や平行六面体の体積としての意味づけがされ、教科書にもよく描画されている。しかし、その符号については、線形変換が空間の向きを保つか否かという説明をされるのがせいぜいで、図を用いた分かり易い説明はほとんど見ない。これは空間の「向き」をどう表現するかという問題に関わり、今後取り組むべき課題ではないかと思われる。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究C (課題番号 20500818) の補助を受けています。

参考文献

- 1) Kaneko M., Abe T., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Fukazawa K., Yamashita S. & Takato S.: “CAS-aided Visualization in $\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ documents for Mathematical Education”, to appear in Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. VIII, Issue I, 2010
- 2) Kaneko M., Abe T., Izumi H., Kitahara K., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: “A simple method of the TeX surface drawing suitable for teaching materials with the aid of CAS”, Lecture Notes in Computer Science 5102, pp. 35–45, Springer-Verlag, 2008
- 3) Sekiguchi M., Abe T., Izumi H., Kaneko M., Kitahara K., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: “Monochrome line drawings of 3D objects due to the programmability of $\text{K}\epsilon\text{T}\text{pic}$ ”, 2008 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 277–283, IEEE, 2008
- 4) Takato S., Akemi G., & Iglesias A.: “Use of ImplicitPlot in Drawing Surfaces Embedded in $\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ documents”, 2009 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 115–122, IEEE, 2009
- 5) 高遠節夫, 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 北原清志, 関口昌由, 深澤謙次, 山下哲: 「授業効果を高める挿図教材の作成」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第15号, pp.109-118, 2008
- 6) Abe T., Fukazawa K., Kaneko M., Kitahara K., Koshikawa H., Yamashita S., & Takato S.: “Migration of $\text{K}\epsilon\text{T}\text{pic}$ to Scilab and Comparison of Scilab with other CASs”, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第16号, pp.97–106, 2009
- 7) 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 北原清志, 越川浩明, 深澤謙次, 高遠節夫: 「空間曲面の稜線描画の一方法について—Scilab版 $\text{K}\epsilon\text{T}\text{pic}$ の改良—」 日本数学会 2009年度年会 応用数学分科会講演アブストラクト, 2009

- 8) 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 関口昌由, 山下哲, 北原清志, 深澤謙次, 高遠節夫: 「挿図教材の実態調査について」, 日本数学教育学会誌第 91 回総会特集号, p.543, 2009
- 9) 金子真隆, 阿部孝之, 関口昌由, 山下哲, 高遠節夫: 「 K_ETpic による曲面描画と教育利用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.1-10, 2009
- 10) 泉源, 深澤謙次: 「 K_ETpic の工学教育への利用と Maxima への移植」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.37-44, 2009
- 11) 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における K_ETpic で作成した挿図教材の使用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90-105, 2009