数理解析研究所講究録
第 1674 巻 2010 年 99-111



# 作図ツール Geometric Constructor を使った探究事例と教育実践について

愛知教育大学・数学教育講座　　飯島　康之 (Yasuyuki Iijima)
Department of Mathematics Education,
Aichi University of Education

## 1 「作図ツール Geometric Constructor について

Geometric Constructor は，筆者が開発した作図ツール，つまり初等幾何的な意味での作図・測定・軌跡等が行えるソフトである。1989 年に DOS 版 (GC/DOS) を，1996 年に，Windows 版 (GC/Win) を，そして 2000 年には，飯島と (株) ゼータの共同開発による GC/Java を公開した。(以下，総称として GC と略す。最新版は GCWiki 等で入手可能。)

作図ツールには，cabri geometry や Geometer's SketchPad，シンデレラ，GeoGebra など，様々なものがあるが，GC の特徴としては，次のような点が挙げられる。

(1) かなり早い時期 (1989 年) から開発している。
(2) マウスによる操作の他，(変形なども含めて) ほとんどの操作に関してキーボードで操作可能である。
(3) フリーソフトで，国内での教育実践の蓄積が多い。
(4) 学校の授業での利用を想定して開発しつつ，複数の学習環境に対応している。
(5) PukiWiki 内での GC/Java の表示・GC/Java からの作図データ保存等を可能にしたので，Java が動作し，標準的なネットワーク環境があれば，どこでも使える。

実際，愛知教育大学の大学院・学部の授業では，PukiWiki を使いながら，教材研究・授業設計を学生が行っている。

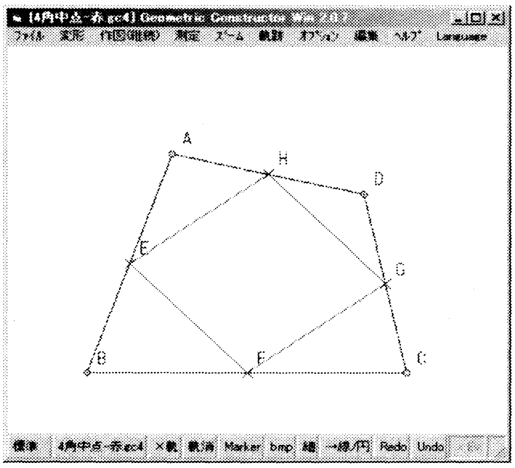



図 1 GC/Win

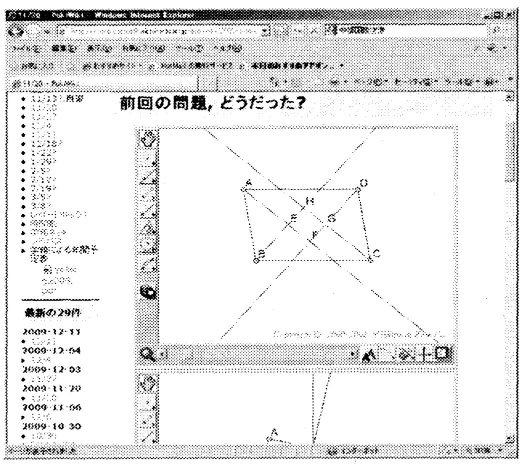



図 2 PukiWiki 内に組み込まれた GC/Java

## 2　作図等の機能や特徴と限界

GC では，幾何的対象として，変数，点，線（直線/線分/半直線），円の 4 種類を扱っている。そして,「何（幾何的対象）を元に何をつくるのか」を意識化することで，図形を構成的に作図する。結果として，図形は独立変数としてのいくつかの点と，従属変数としてのその他に位置づけられ，独立変数を変化させたときの不変要素や関数関係を調べるためのツールとして機能する。(一般に，初等幾何的な作図が可能であると同時に，測定や変形等が行えるツールを，作図ツールという。)

作図のインターフェイスとしては,「作図するものの種類」→「作図の方法」→「元にするもの」を順次指定していく。

何を元にして何をつくるのか」という意識が明確であれば，作図可能であることを重視しているために，定木・コンパスによる作図に限定してはいない。たとえば,「2 点」に対して「$n$ 等分」や「(3 点で指定される) 角」に対する「$n$ 等分」なども可能にしている。これは,「三角形の三つの角の二等分線を引くことで共点性（内心)」が得られるのに対して,「3 等分に変えたらどうなるか」という探究がそのまま行えて，実験結果としてモーレーの定理を観察可能であるようにしている。

2 次曲線は軌跡として描画することはできるが，基本的な幾何的対象としては構成できず，それを元にした作図もできない。

また, (シンデレラで解決している) 円と直線の交点等の整合性の問題 (リヒター・ゲバート他 (2003),4.1 で指摘している動的問題) に関しては，便宜的な対処はしているが，根本的な解消をしてはいない。

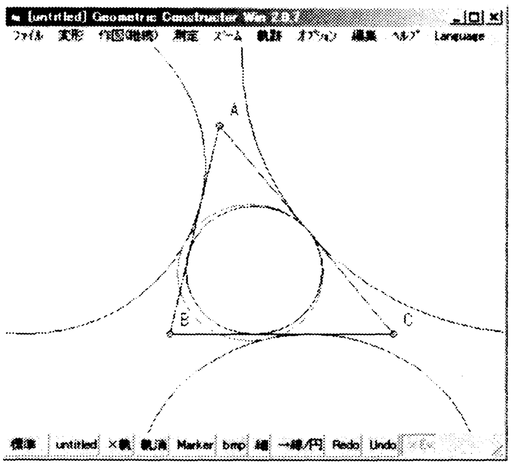



図 3 フォイエルバッハの定理

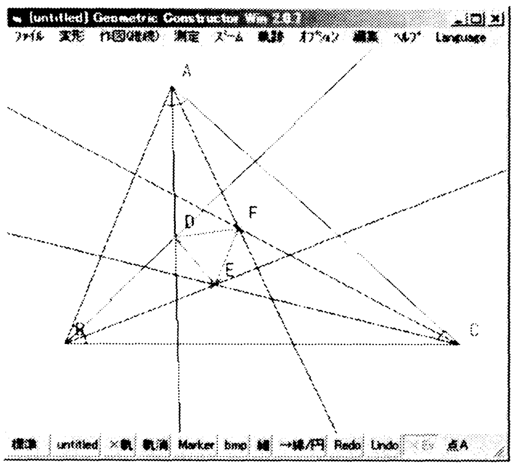



図 4 モーレーの定理

## 3　測定や軌跡の機能の特徴と限界

GC では，基本的な量（長さ/面積/角度等）の測定を行える。また，それらに関する四則演算程度の数式機能を持っている。

また，幾何的対象の「記録」としての軌跡の機能を持っている。点のみでなく，線・円の描画も残す。ただし，点や線の軌跡は単なる集合であって，それらが新しい幾何的

対象を構成する手段にはなっていない。 測定値も数の記録として保存可能で，html 表示や csv ファイルでの保存が可能。

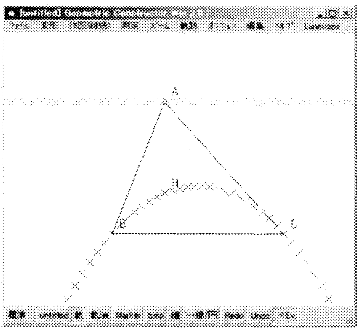


図 5 点（垂心）の軌跡

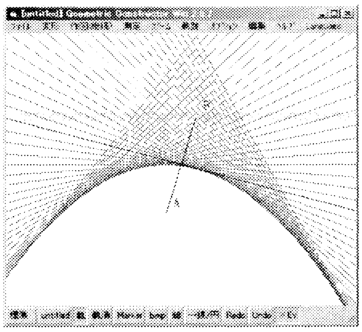


図 6 垂直二等分線の軌跡

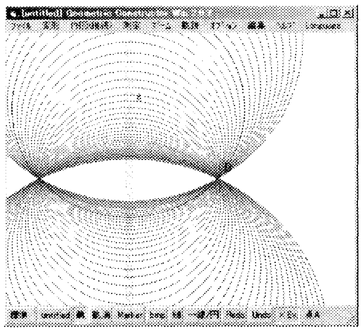


図 7 （定点を通る）円の軌跡

平面内の動く点 P に依存する $f(\mathrm{P})$ を測定する場合には，関数 $f : R^2 \rightarrow R$ となる。そのため，$f(x) > 0$ と $f(x) < 0$ の境界値として，$f(x) = 0$ を素描する機能を GC/Win は持っている。また，伊藤徹氏のフリーソフトである Graph-R と連携することで，図 9 のように，3D グラフとしての表示を行うことができる。

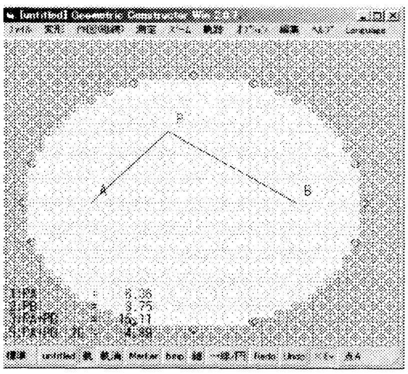


図 8 PA + PB = 20

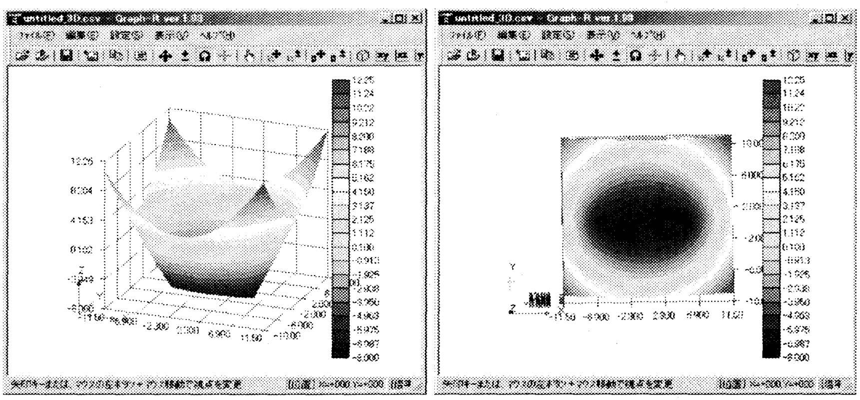


図 9 $f(\mathrm{P}) = \mathrm{PA} + \mathrm{PB} - 20$ の様子（3D 表示と等高線）

## 4　授業を想定した機能

GC を含めて多くの作図ツールはインターラクティブな利用を想定しているものが多い。さらに，GC では授業での利用を想定して，次のような特徴を持っている。

### (1) メニュー表示等の切り換え

GC/Win では，フルメニューと，簡易メニューがあり，GC/Java では，アプレットモード（アイコンなし），アプレットモード（アイコンあり），ウィンドウモード（メニューあり）の 3 つのモードがある。これは，単なる提示での利用や，初心者にとっては基本的な使い方に制限した方が適切であることなどを配慮したものである。一方，cabriJava や JavaSketchPad などと異なって，解説用として作成したコンテンツであっても，モー

ドを切り換えることによって，さらに作図を継続したり,（事前の設定があれば）そのデータを保存することも可能になる。

これは，たとえ授業の中で解説のために使うと想定している図形であっても，生徒の気づきに対応して,「ここに補助線をいれたらどうなる?」等の指摘があったとき，その場ですぐに対応できるようにする配慮でもある。

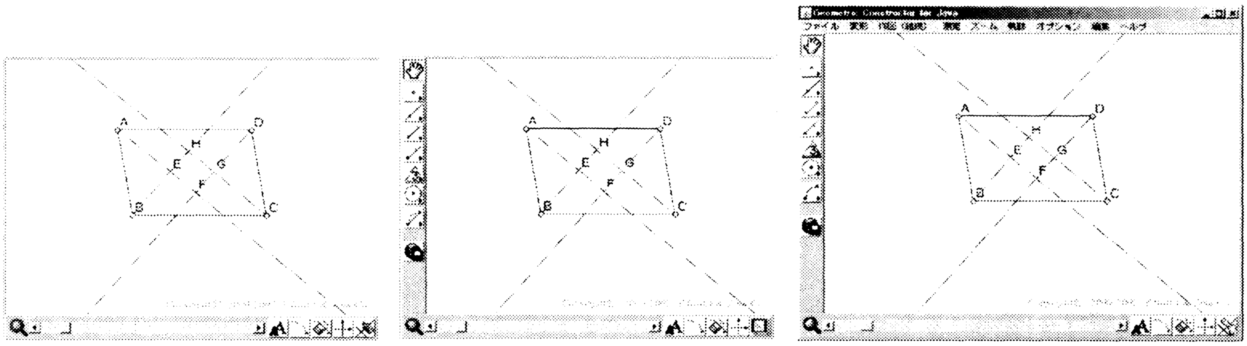


図 10 GC/Java の 3 つのモード

**(2) 線の太さ/文字の大きさなどをアイコン操作**

個人的な利用では，たとえば線の幅は 1 ドット分が最も適しているといえるが，教室でのプレゼン的な利用では，それでは細過ぎる。測定値も個人探究用で使う場合には小さな文字の方が適しているが，プレゼン的に使う場合には，教室の後ろからでも観察可能な大きさでなければいけない。状況に合わせて線の太さや文字の大きさを切り換えられる方がよい。GC の場合，細かな設定はオプションメニューで行えるが，代表的な 3 種類に関しては，アイコンのクリックで切り換えることができる。

**(3) シフト＋変形で，近接の対象に射影等が行える**

GC では，点の束縛条件があり，直線や円など，他の幾何的対象の上に動きを制限することができる。それは作図時に設定する他，作図後に点のプロパティを変えることによっても変更できるが，さらに簡便な方法として,「シフトキーを押しながら変形（ドラッグ）する」ことによって，近接の幾何的対象に射影することができる。

たとえば，円周角の定理について調べるときに，最初点 P を自由に動かしておき,「円周上だったら ∠APB は一定になるのではないか」という予想が立ったとき，シフトキーを押して確かめるだけで，それを確認することができる。

同様の予想が立ったときに，点のプロパティを逐次変えなければならない状況と比較すると，授業の流れをより自然なものにする上で効果的な機能の一つになっている。また，この「近接の幾何的対象への射影」は，オプションでの設定によって,「格子点への射影」に変えることもできる。

**(4) キーボードによる変形や対象の選択**

マウスによるドラッグは直観的で直接的操作の実現という観点からはよいのだが，たとえば,「点 A を水平に動かしたい」とか「等間隔で動かしたい」ということは少なくない。授業をしながら教師自身が操作する場合に,「キーボードの『→』を数回押すのに応

じて10ドットずつ右に動く」というような使い方は，視線を生徒の方に向けることも可能にするなど，利点は多い。

また，対象の選択に関しても，対象が重なっているような場合には，キーボードでの選択の方が確実に行えることも少なくない。

### (5) 書き込みはチョークが基本だが，落書き機能もある。

授業での基本的な利用は，黒板への投影を想定している。そのため，記号や簡単な証明の書き込みはチョークで直接黒板に書き込むことを想定している。しかし，スクリーンへの投影などの場合もあるため，マウスで書き込みをすることができる「落書き機能」も備えている。

### (6) イベント機能

あらかじめ設定してある点をクリックすると，イベントが起こるように設定したい場合に，イベント機能が使える。

この機能を使うことによって，条件を満たす点を授業の中で探すとき，スクリーンをいわば「実験のステージ」とするために使える。

たとえば,「3直線から等距離にある場所に犯人がいる。どこに潜んでいるのだろうか。」という問題を提示する。

予測した場所をクリックしたとき，正しければ「犯人逮捕」のようなメッセージを表示することができる。

これを使わずに同等のことを行おうとすると，測定値を観察しながら「ここがそうだね」等の言葉を教師が行うことになり，判定者＝教師ということになってしまう。たとえば，2007年に行った実践(飯島(2007))では，上記の問題に対して「内心」を候補として生徒が想定したとき,「アジト発見，でもここには犯人はいませんでした」というメッセージを表示した。つまり，3直線から等距離にある場所は一つだけではなく，他にもありそうだという流れに結びつけ，傍心の発見に到達するという授業実践を行った。このような流れを構成する上では，生徒の予想に対して,「(条件を満たすにもかかわらず)ここには犯人はいないんだよね」と教師が語ったとしても，生徒としては不信感を持つことにしかならない。このように，教師も生徒と一緒に探す側に寄り添う上で，このイベント機能が有効に機能することがある。

## 5　数学的探究に関する基本的な立場と探究事例・実践事例

### (1) 数学的探究に関する基本的な立場

GCに関する事例の多くは，多くの場合，教育実践とかかわって開発しているものが多い。そこで注目することは，生徒の数学的探究あるいは我々の数学的探究に関して,「一定の時間・労力で，どのような結果に到達可能か，どのようなプロセスを実現可能か」ということになる。

さらに，授業を想定する場合には，次の点に関して，どのような多様性を生み出すのかに注目することが多い。

・事実：どのような特殊な場合に注目するかなどの多様性
・観察：図形のどの構成要素等に注目するのかの多様性
・関係性：それらの構成要素に関するどのような関係性に注目するのかの多様性
・証明：注目している命題に対する証明の多様性
・問題（の定式化)：図が構成する問題状況の中から，定式化する問題の多様性

また,（多くの場合共同研究として）取り組んでいる事例に関して，どのような授業を実現したいのかを検討する中で，必要ならば，ソフト等を改善することが多い。以下では，これまでに扱った事例の中から，いくつかを紹介する。

**(2) 5 点を通る 2 次曲線の作図の構成**

これは筆者自身の探究事例の一つである。2 点で直線が決まり，3 点で円が決まる。これは GC の中でのメニューでも実装している。2 次曲線そのものは幾何的対象としては扱っていないのだが, 5 点で決まるはずなので，5 点に対して（軌跡として）2 次曲線を描画する方法を明らかにし，5 点を変えれば 2 次曲線が変わる様子を調べることができるようにしたいと考えた。パスカルの定理をもとにすれば，円上に 6 点を A1,A2,A3,B1,B2,B3 ととり，図 11 のように線分の交点を P,Q,R とすると, P,Q,R は一直線 ($\ell$) 上に並ぶ。そして，この 6 点は円に限定することなく，一般に 2 次曲線でも成立する。

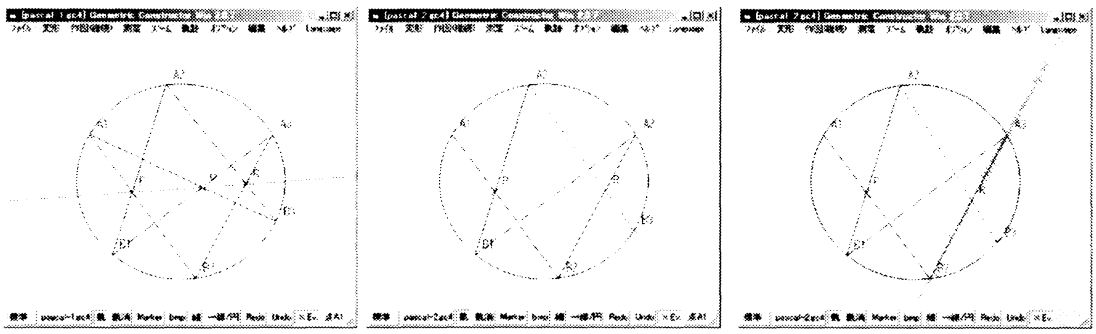


図 11 パスカルの定理と $\varphi$ : B3 $\rightarrow$ R の様子

この定理をもとにして，5 点に対してそれを通る 2 次曲線を作図することはできないだろうかと考えた。

図 11 左では，次のような対応になっている。

円（2 次曲線）上の 6 点 (A1,A2,A3,B1,B2,B3) → 6 本の線分→ 3 交点 (P,Q,R)= 共線性

ここにおいて，A1,A2,A3,B1,B2 を固定すると，次のような対応が得られる (図 11 中)。

B3→ 線分 (A2B3)→(A2B3 と A3B2 の) 交点 R

実際，図 11 右のように，点 B3 を円周上を動かしたとき，R は直線 A3B2 に対して（無限遠点を含めて）全単射になっている様子が分かる。

つまり

$\varphi$ :2 次曲線 $C$ $\rightarrow$ 直線 A3B2

の対応として

$\varphi$ : B3 $\rightarrow$ R

という対応を見いだすことができる。そこで，逆対応として，

$\varphi^{-1} : \mathrm{R} \to \mathrm{B3}$

として，次のような手続きを考えてみる。

R →直線 PR($\ell$)→ (PR と A3B1 の) 交点 Q→2 線分 AQ,A2Q→ 交点 B3

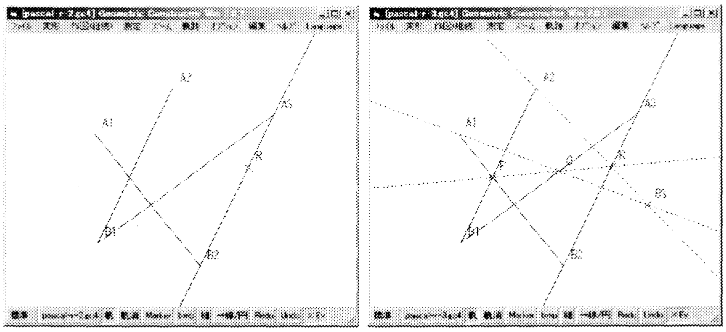


図 12 $\varphi^{-1} : \mathrm{R} \to \mathrm{B3}$ の様子

実際に 5 点を変えて軌跡を描画すると，図 13 のように，様々な楕円や双曲線が得られた。

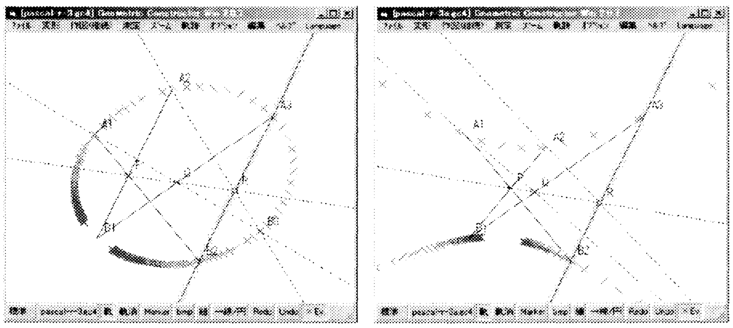


図 13 楕円や双曲線が描かれる様子

**(3) 「楕円」等の様々な作図**

(2) の事例のようなものは，中学生や高校生に課題として提示するわけではない。しかし, 同様のスタンスで，様々な作図を考えることは，目標の一つでもある。そのとき，生徒の思考に合わせて，様々な作図の仕方，探究の仕方を念頭に置いている。一つの例として，楕円などの作図を取り上げてみたい。

(3)-1. 包絡線として放物線を描くことを出発に

図 14 のように，線分 AB の垂直二等分線の図があるとき，A を直線上で動かすと放物線が描かれる。たとえば，この観察と理由の考察を出発点としたとき,「A の動きを変えると他の 2 次曲線が描けないか」という問いかけをすることができる。

たとえば, (特に根拠もないが)「直線でなくて円にしたらどうか」というような発言が，あったとする。図 14 右のように，点 A をフリーハンド的に円のように動かしてみて，包絡線の様子を観察してみて,「もっと正確な図を作る価値がありそうかどうか」を探ってみるのが，作図ツールをインターラクティブ的に使う一つの方法である。「楕円のように見えるが，もう少しきちんとしてみよう」という流れになったら，動かすべき場所としての円を追加する。シフトキーでの射影機能を使いながら マウスでラフに描

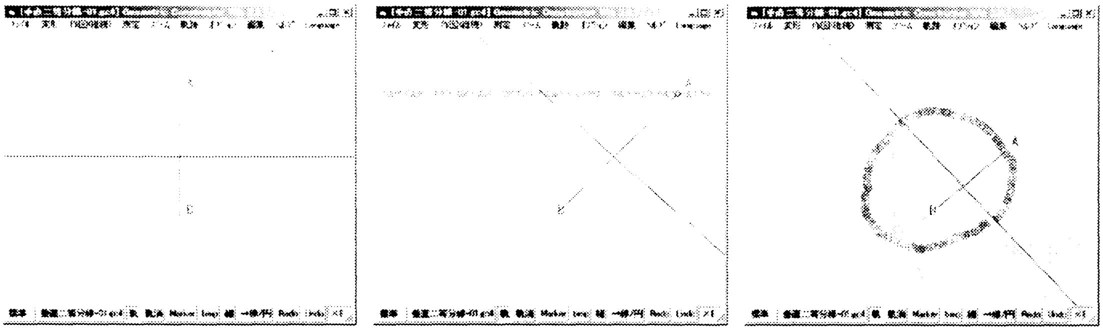


図 14 線分の垂直二等分線の軌跡

画すれば，図 15 中のような図が得られ，きちんと点 A のプロパティを編集して円 $C$ 上に動きを束縛し，キーボードを使って，等間隔の変形を行うと，図 15 右のような図が得られる。

さらに，その理由をきちんと考えるために，図 16 左のように補助線を追加して考察したり，図 16 右のように，円の位置を変えたときに双曲線が現れることを発見したりする。

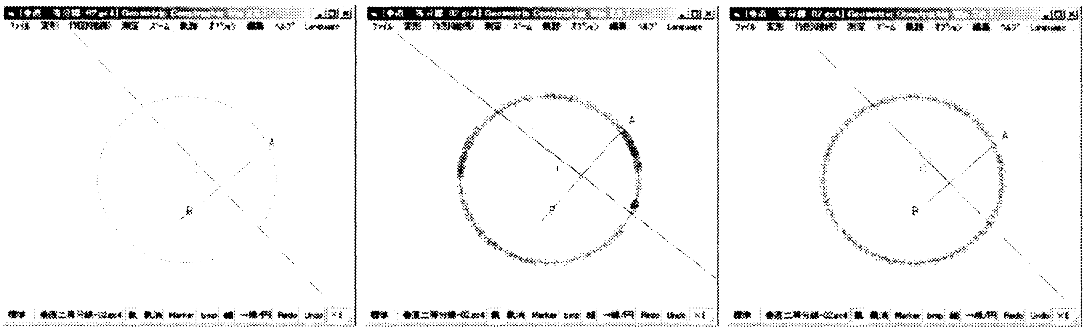


図 15 点 A を円上を動かす様子

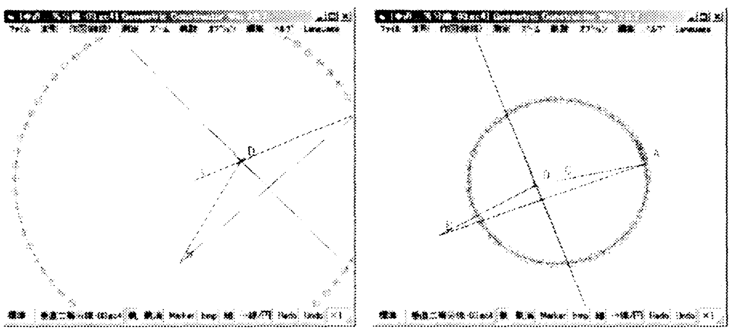


図 16 補助線を追加して理由を考えたり円の位置を変えてみる様子

(3)-2. **PA + PB = 10** となる場所を探す

2 定点からの距離の和が一定という条件を満たす点の集合というところから出発するケースもありうる。この場合，GC では二つのケースを想定している。

一つは，平面内にA,Bの他に点Pをとり，PA,PB,PA+PBを測定する図を作り，PA＋PB ＝ 10となるような点の集合を探索的に探す方法である。マウスでPを動かながら図17左のような図から次になにをすべきかを考える場合もあれば，図17中のように,$f(\mathrm{P}) = \mathrm{PA} + \mathrm{PB} - 10$を考えたときに，$f(\mathrm{P}) > 0$，$f(\mathrm{P}) < 0$の境界として，実験的に$f(\mathrm{P}) = 0$の大まかな様子を調べる場合もある。さらに，図9のように，3Dグラフとしての特徴や，等高線の変化の様子を調べる可能性もある。

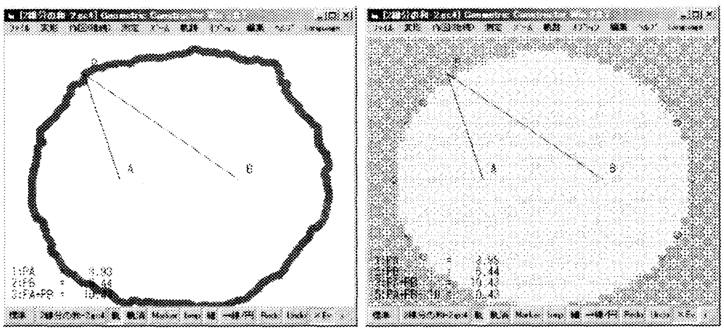


図 17 PA + PB = 10 を測定値で調べる

また，中心A，半径$x$の円と，中心B，半径$10 - x$の円の交点の軌跡として表現する方法もある。

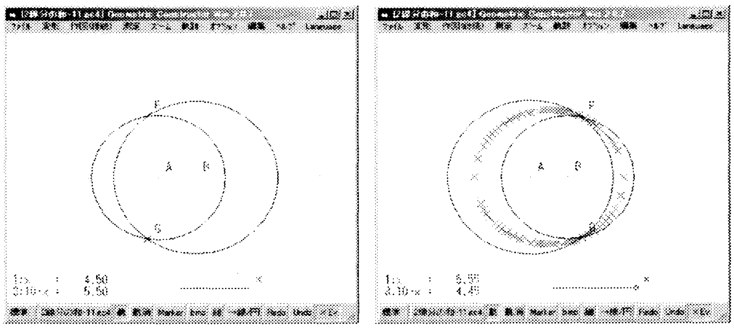


図 18 半径が$x$と$10 - x$の円の交点の軌跡として楕円を作図する

**(4) 三直線に対して点Pから下ろした垂線の足が構成する三角形の面積に関して**

1999年11月に附属高校でシムソン線に関する授業を設計する中で，次の問題を検討した。

**問題1** △ABCと動点Pがある。点Pから三角形のそれぞれの辺AB,BC,CAあるいはその延長線上 に下ろした垂線の足をD,E,Fとし，それらを結んで△DEFを作る。Pの位置を変えると△DEFの形も変わる。Pをどこに取ると△DEFはつぶれてしまうか。

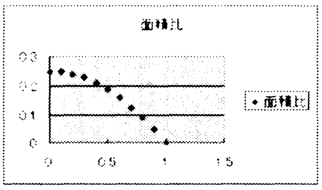
**問題2** △ABCと動点Pがある。点Pから三角形のそれぞれの辺AB,BC,CAあるいはその延長線上に下ろした垂線の足をD,E,Fとし，それらを結んで△DEFを作る。Pの位置を変えると△DEFの形も変わる。Pを△ABCの内部のどこに取ると△DEFは最大値を取るか。

この授業を行いながら並行して教材研究をしてみると，次のようなことがわかった。

・P＝外心の場合に極大になる。
・P が外接円上にあると 0（シムソンの定理）
・△DEF の面積が一定となる P の集合は外心を中心とする同心円上

測定値を Excel の表にして，散布図を描いてグラフを描画するとさらに確証をえる。

| | 線分比 | 面積比 |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0.25 |
| 4 | 0.1 | 0.2476 |
| 5 | 0.198 | 0.2402 |
| 6 | 0.29 | 0.229 |
| 7 | 0.399 | 0.21 |
| 8 | 0.5 | 0.1876 |
| 9 | 0.6 | 0.16 |
| 10 | 0.7 | 0.124 |
| 11 | 0.8 | 0.09 |
| 12 | 0.9 | 0.04677 |




| | 線分比 | 線分比^2 | 面積比 |
|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 1 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0.25 |
| 17 | 0.1 | 0.01 | 0.2476 |
| 18 | 0.198 | 0.039204 | 0.2402 |
| 19 | 0.29 | 0.0841 | 0.229 |
| 20 | 0.399 | 0.159201 | 0.21 |
| 21 | 0.5 | 0.25 | 0.1876 |
| 22 | 0.6 | 0.36 | 0.16 |
| 23 | 0.7 | 0.49 | 0.124 |
| 24 | 0.8 | 0.64 | 0.09 |
| 25 | 0.9 | 0.81 | 0.04677 |

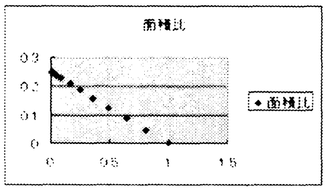



図 19 測定結果を Excel で調べる

それらの結果から，次の式が得られた。

$$y = (1 - (\mathrm{PO}/\mathrm{AO})^2)/4$$

この授業実践の中では，シムソンの定理までを扱ったのだが，作図ツールを使って探究し，Excel などと連動することによって，様々な推測を得られる可能性を実感した。

**(5)「四角形 → 四角形」の問題と対応表**

中学校で扱う代表的な問題として，次の問題がある。

**問題** 四角形 ABCD の 4 つの辺のそれぞれの中点を E,F,G,H とするとき，EFGH は平行四辺形になることを証明せよ。

このような問題を四角形 ABCD→ 四角形 EFGH という一種の関数として捉えると，次のような問題として提示することができる。

**問題** 四角形 ABCD の 4 つの辺のそれぞれの中点を E,F,G,H とする。 ABCD がどんな形のときに，EFGH はどんな形になるだろう。

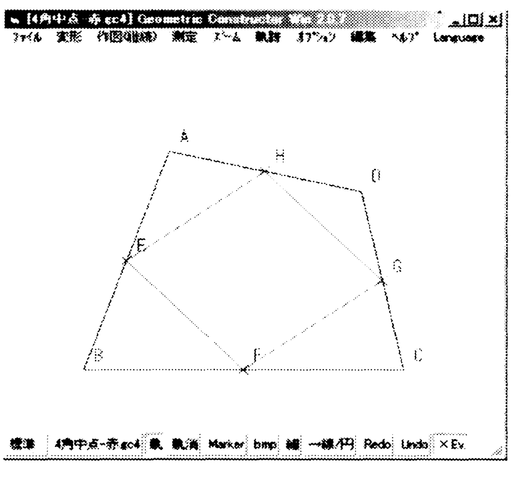



図 20

授業としては，たとえばABCDが長方形の場合を提示し,「EFGHはどんな形になっている?」と確認し,「ひし形」という発言を受け,「他にどんな場合を調べたらいいだろう」等のやりとりから，各自で調べるべき暫定的な課題として，次のような対応表を完成させることを求めることができる。(実際には，スケッチを書き込める程度の余裕がある。)

| □ABCD | □EFGH(予想) | □EFGH(結果) | スケッチ |
|---|---|---|---|
| 正方形 | | | |
| 長方形 | | | |
| ひし形 | | | |
| 平行四辺形 | | | |
| 台形 | | | |
| 一般の四角形 | | | |
| くさび形 | | | |

表 1 対応表（四角形の 4 辺の中点を結んだ四角形の問題）

このような対応表を使う授業においては，単に所定の表が埋まればいいわけではないし，いわば自然科学での観察シートのようなものであって，暫定的な結果である。それをもとに，次に何をすべきかを，クラス全体で検討しながら授業を進めることになる。そのため，たとえば，次のような点に配慮する。

- 一つの図であっても，動かすことで，いろいろな場合があることを実感する。
- どのような場合を調べるべきかについて検討する。
- それぞれの場合について，きちんと観察・スケッチすると同時に，その特徴を明文化する。
- 証明するに値するようなことはなにかについて考える。
- 特に，いくつもの集合に共通して成り立っていることや，予想の中にはあったのに，結果の中では見つからないことなどに注目する。
- 得られた結果は，すべて「個々の事例」に関する観察結果であって，その集合全体に関して成り立つのではないかという推測でしかない。また，観察結果なので，ある結果を見落としていることやより一般的なことが成り立っていることを見過ごしている可能性もある。

たとえば，上記の問題とよく似た次の問題の場合には，対応表をもとに考える選択肢が複数ある。

**問題** 四角形 ABCD の 4 つの角の二等分線をひく。それぞれの交点を E,F,G,H とする。ABCD がどんな形のときに, EFGH はどんな形になるだろう。

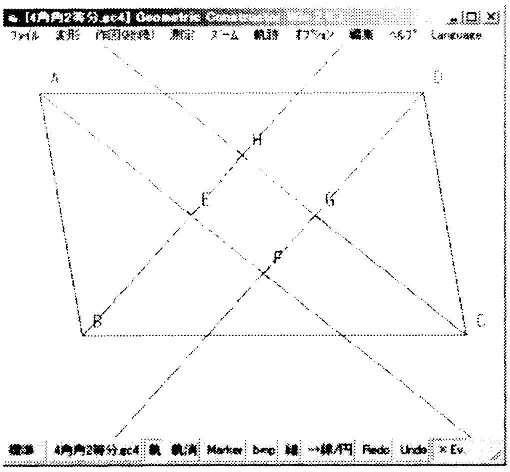



図 21

| □ABCD | 予想 | □EFGH(結果) | スケッチ |
|---|---|---|---|
| 正方形 | 省略 | 一点 | 省略 |
| 長方形 | | 正方形 | |
| ひし形 | | 一点 | |
| 平行四辺形 | | 長方形 | |
| 台形 | | ∠E=∠G=∠R | |
| 一般の四角形 | | 四角形 | |
| くさび形 | | 二つの三角形 | |

表 3 対応表の例（四角形の 4 つの角の二等分線でできる四角形の問題）

この図と対応表の場合，上記のような暫定的な結果に対して，次のような選択肢がありうる。

- 一点」になるのはどんな場合か。（たこ形などについても調べて，□ABCD が円に外接する四角形ならば一点になることに到達する）
- 一般の四角形の場合が,「四角形」となっているが，これは任意の四角形があるのか，それとも特殊な四角形なのか。（結果が明確な事例の一つが台形の場合であるが，この条件との関わりで調べてみると，一般の場合は円に内接する四角形であることが分かる。同様に，くさび形の 2 つの三角形も円に内接することがわかる。）
- 通常，予想の中に，平行四辺形やひし形が登場することが多い。しかし，観察結果の中にはない。なぜかを検討する。（円に内接する四角形なので，平行四辺形ならば自動的に長方形になってしまうため，いわゆる平行四辺形は存在しない。）
- 上記と同様に，台形が結果の中にはない。本当にありえないのかを検討する。（円に内接する四角形になるため，台形は等脚台形に限定される。そして，等脚台形を作ろうという意思を持って図形を動かしてみると，実際に作ることができる。）

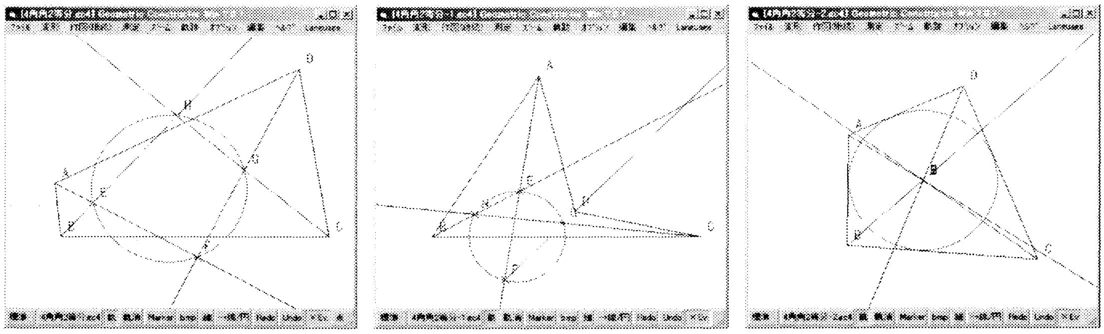


図 22 円を追加してさらに調べる

## 6 おわりに

本稿では，GC の基本的な特徴と，それを用いた探究事例・実践事例のいくつかを紹介した。様々な教材の蓄積等は，GCWiki などの中で行っているが，さらに包括的な研究と実践を進めていくことが今後の課題として残っている。

## 参考文献等


[1] C Forum http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/

[2] GCWiki http://iijima.auemath.aichi-edu.ac.jp/gcwiki/

[3] 飯島康之 (1990),computer における図形の動的な扱いについて，筑波数学教育研究,vol.9, pp.105-117

[4] 飯島康之 (1990)，Computer による動的な図形教材の開発について—“Geometric Constructor” を用いた探究的学習のために—，イプシロン，32，pp.56-75. ，http://hdl.handle.net/10424/1382

[5] 飯島康之 (1995) コンピュータで数学授業を変えよう, 明治図書

[6] 飯島康之 (1997) ＧＣを活用した図形の指導, 明治図書

[7] 飯島康之 (2005), 作図ツール GC/Java を利用した多様な学習環境の開発, 科学教育研究, vol.26, No.2, pp.110-119

[8] 飯島康之 (2007) 研究授業から GC の改良案と新しい授業像が生まれる様子のケーススタディ—附属名古屋中学校での岩田実践と GC のイベント機能の関わりについて—, イプシロン, 49, pp.1-12. http://hdl.handle.net/10424/1381

[9] 飯島康之, シムソンの定理の一般化 (探究記録)，http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc/world/simson/11.htm

[10] リヒター・ゲバート他 (2003), シンデレラ-幾何学のためのグラフィックス-, シュプリンガー・フェアラーク東京