

全微分に関する図入り教材の作成例とその研究授業報告

工学院大学・工学部

北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)
Department of Engineering,
Kogakuin University

木更津工業高等専門学校・基礎学系

阿部 孝之 (Takayuki Abe)
金子 真隆 (Masataka Kaneko)
山下 哲 (Satoshi Yamashita)

Department of Fundamental Research,
Kisarazu National College of Technology

東邦大学・薬学部

高遠 節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Pharmaceutical Sciences,
Toho University

1 はじめに

本研究は大学または高等専門学校の数学教育において、図入り教材のもつ役割・効果・意味などについて考察し、より教育効果の高い教材を作成するための指針を、具体的な教材例を用いた研究授業を通して探究するものである。

今回の報告では、プロジェクタによる投影図形と印刷配付教材中の描画図形とを有機的に関連させつつ提示することによる、分かり易く効果的な授業方法の提案を行う。この授業は印刷配付物をメインに扱う授業であり、プロジェクタにはその特性を生かしてプリントの補助教材としての役割が与えられる。また、ここに提案した方法を用いて実際に授業を行い、同時にアンケートも行ったので、それらの分析結果の一部についても合わせて報告する。

授業で用いた図形はすべて、我々が現在も開発を進めている KpTpic を用いて描いている。 KpTpic とは $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 文書中に図を挿入するために開発された数式処理ソフト（以下、CAS という）のマクロパッケージである。単色線画を基本とした描画機能を持ち、非常に精度の高い出力が可能である。従って、授業等で利用するために大量に印刷して配布する教材作成に向いている。

今回提示する教材例は、2 変数関数の偏微分・全微分に関するものであり、第 1 の特徴として、 KpTpic の曲面描画機能を活用する事例となっている。 KpTpic による図形描画は単色線画を基本としており、曲面を描く場合も稜線を描くことによって実現している。従って、単純で分かり易い手書き感覚の表現が得られる。一般の CAS のように非常に細かい面を多数張り合わせたり、カラーや濃淡を用いて曲面を表現する、面を主体とする描画方法とは大きく異なる表現法である。第 2 の特徴として、 KpTpic によって描かれた図の正確さを活用する事例になっている。長さの正確さを利用して定規による

実測作業から抽象的な概念を身近に体験させ、形の正確さを利用して3次元図形中の長さの関係を納得のゆく形で理解させるような教材例を作成した。

2 図の利用状況に関するアンケート調査

我々研究グループでは、2008年9月から12月にかけて、「現在数理科学教育の現場で用いられている図入り教材の利用実態と図入り教材作成のための教員サイドのニーズ」を主な内容とする全国的なアンケート調査を実施した。全国の高専で、数学・科学・工学を担当されている教員、および、一部の大学で初年級の数学を担当されている教員を対象とし、前者については56高専521人、後者については23大学146人からご回答頂いた。アンケート調査を行うにあたっての動機の一つに次の点が挙げられる。

適切な図の入った印刷教材は、学生を数学概念の明確な理解へと導く上で、重要な役割を果たすことが次第に認識されてきた。

KeTpicの開発を進めつつ、試行錯誤を繰り返しながら図入りの印刷教材を作成し、実際の授業場面で使用してきた経験からこのような認識が生まれている、また、図に付与する情報は必要最小限に止めることが望ましいことも次第に分かってきた。何故なら、初学者にとっては当面不必要な情報と必要な情報とを選別することが困難で、情報量の多い図は余計な負荷をかけることになるからであり、さらに、各学生が個性に応じた形で独自の情報を書き込む（悪戯書きをする）余地を残す必要があるからである。このような観点からも、図を印刷して各学生の手元に残すことは重要な意味があると考えられる。

分析結果については、数式処理学会（2009年6月）や日本数学教育学会（2009年8月[8]）で報告したので詳細は省略し、ここでは大学からの回答結果の一部を紹介し、今回の報告の動機付けとする。なお、分析は大学からの回答を基にしているが、高専からの回答に付いても同様な傾向を示している。

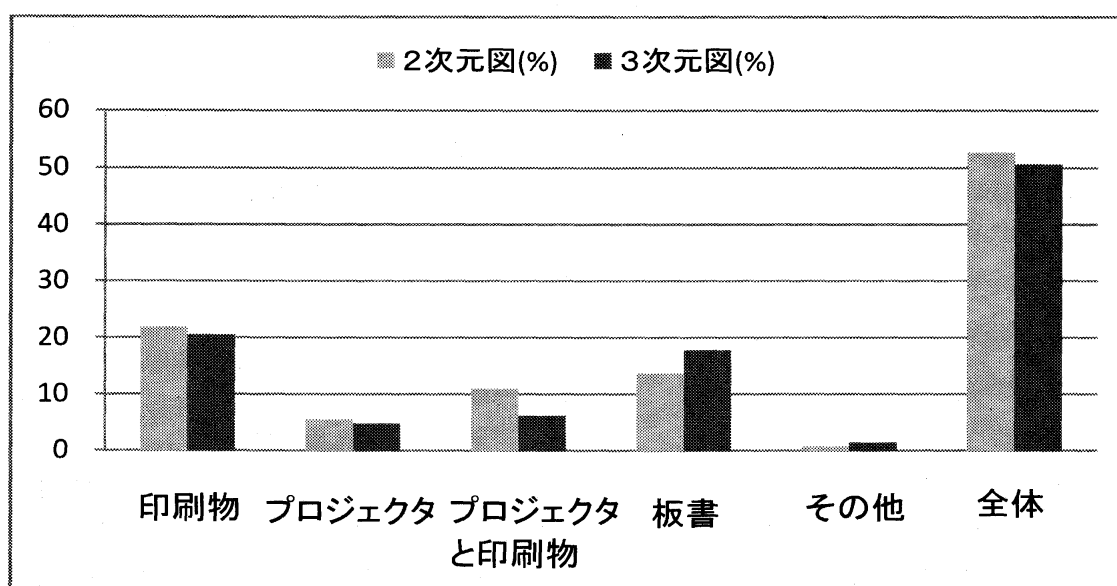


図 2-1 図の利用方法

図の利用方法についてのアンケート結果において、全体としては2次元図に比べて3次元図の方が利用割合が僅かに減少しているが、両者の間に大きな違いは認められない。しかし個別の割合に関しては次のことが言える。

1. 印刷物とプロジェクタそれぞれの利用では、2次元図と3次元図で大きな違いはない。
2. 印刷物とプロジェクタの組合せで利用する場合は、3次元図の利用割合が大きく減少し、2次元図の利用割合のほぼ半分になっている。
3. 板書とその他では3次元図の利用割合が増加しており、全体の傾向とは逆になっている。

アンケート結果から言えることは、図を利用する立場の先生方にとっては、2次元図と3次元図とでそれらを利用しようとする傾向には変わりがないということである。一方、個別の利用方法について考察すると、3次元図は印刷物やプロジェクタによる利用といったソフトウェアを使って図を作成することの多い場面では利用しにくく、その代りに板書が大いに活用されているという傾向が見える。

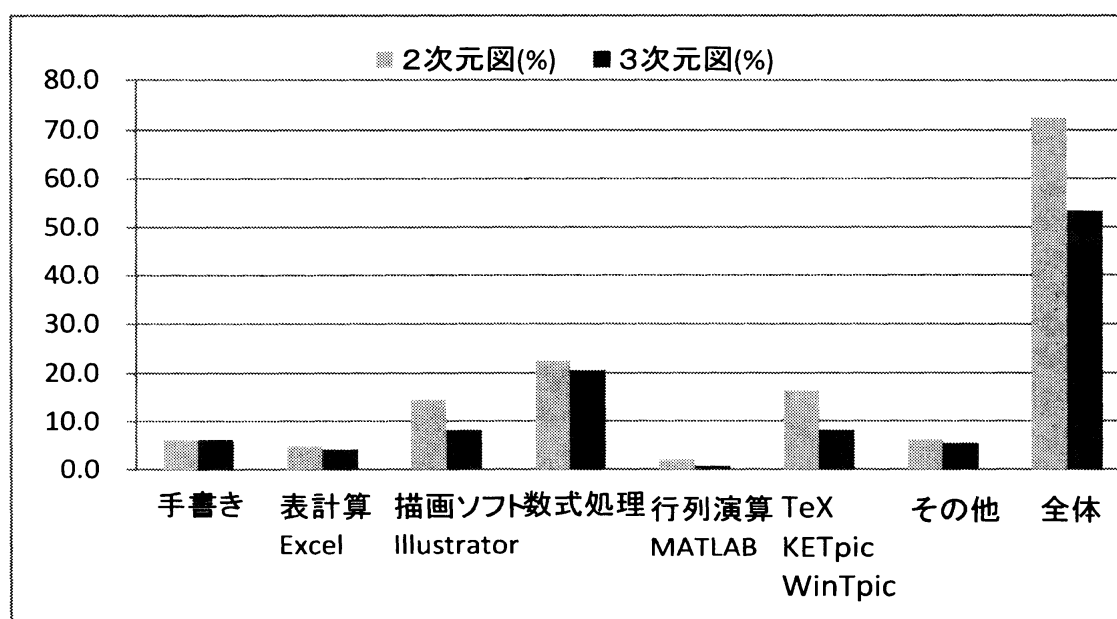


図 2-2 プリントに入れる図の作成方法

印刷物への挿入図の作成方法に関するアンケートでは、全体として2次元図に比べて3次元図の利用割合が減少している。手書き、表計算、数式処理では3次元図がわずかに減少しているが減少幅は小さい。これらの作成方法では3次元図を作成する手間は2次元図を作成する場合とほとんど変わらないと考えられる。特に数式処理を利用する場合は作成割合そのものが他と比べて高くなっている。これに対して、描画ソフト、TeXでは3次元図の作成割合は大幅に減少している。TeX文書の中に3次元図を挿入することには大きな困難を感じている先生方の多い事が窺われる。

3 全微分の授業報告

図を利用した授業を組み立てるに当たって特に次の5点に着目した。これは第2章での先生方へのアンケートの分析を踏まえた結果である。

1. 数式を伴う教材としては最も質の高い印刷物を作成できる $\text{T}_\text{E}\text{X}$ を用い、 $\text{T}_\text{E}\text{X}$ 文書の中に $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ を用いて描いた3次元図を挿入して学生への配布資料とした。
2. 配付印刷物とプロジェクタを有機的に関連させて、直観的で分かりやすい概念の提示方法を考察した。プロジェクタで提示する図の一部を配布資料中に印刷したが、配布資料中の図はプロジェクタの図と全く同じなので、学生は両者の間を違和感なく円滑に行き来することができる。
3. 配付印刷物における図をメインとし、それらの図の間の概念の飛躍を補う形でプロジェクタの図を提示する。プロジェクタの特性を生かして、変化を連続的に見せ空間的な状態がより理解しやすくなるように工夫した。
4. $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ による作図は正確な長さを持っていることを用いて、配付プリント中の線分の長さを定規で実測させ、作業を通して抽象概念を身近に感ずる体験をさせた。
5. $\text{K}_\text{E}\text{Tpic}$ による作図は3次元図形の形を正確に反映していることを用いて、3次元図形中の長さの関係を直感的に納得のゆく方法で表現した。

授業のタイトルを「図から読み解く全微分」とした。今回の授業は予め問題用紙と解答用紙（アンケートを含む）を配付した上でプロジェクタによる提示を行った。プロジェクタによって全微分に関わる一連の図を提示し説明を加え、説明の要所・区切りで問題を出題する。問題は配布プリントに問題と密接に関連する図と共に載っている。問題用紙は終了後持ち帰ってもらい、今回の授業の全体像を繰り返し復習できるようにした。

今回扱う関数と接平面は次式で与えられる。ただし、 $a = 0.2, b = 0.1$ である。

$$z = f(x, y) = 0.1 + x^2 + y^2, \quad \text{点 } Q(a, b, f(a, b)) \text{ で接する接平面}$$

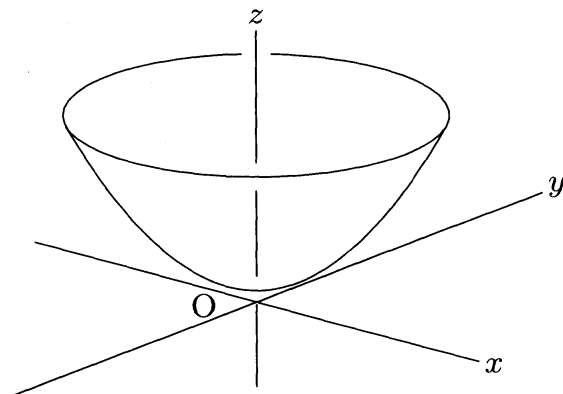


図 3-1 $z = f(x, y)$ のグラフ

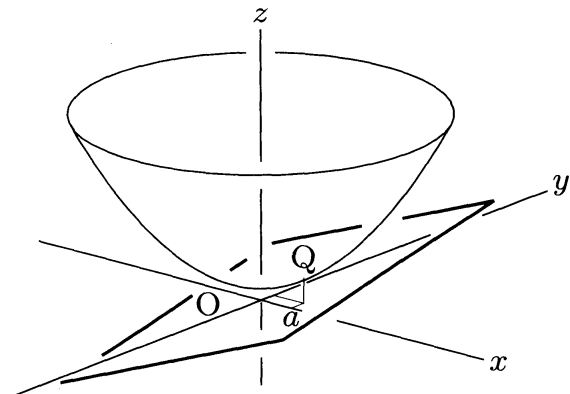


図 3-2 曲面 $z = f(x, y)$ と接平面

プロジェクタで上記2図を順次提示する。曲面は稜線と境界線とで描かれていて必要最小限の情報が用いられているが、陰線処理により正確な遠近感が表現され、線種の変更により強調表示が行われており、手書き風で豊かな表現力を持った図となっている。問題プリントには図3-2を載せている。

まず単純な計算を行うことから問題に取り掛かる。

問1 $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を計算し, $x = a (= 0.2)$, $y = b (= 0.1)$ のときの値を求めよ。

次に偏微分係数の幾何学的な意味の解説に入る。そのために、図3-2を平面 $y = b$ で切断した図を作成する。この作業は `KEPic` のコマンド `sfcutoffparadata` で行うことができる。次の図3-3がその結果である。曲面と接平面の切り口は太い線で強調してあり分りやすくなっている。図3-3は問題プリントに載せている。

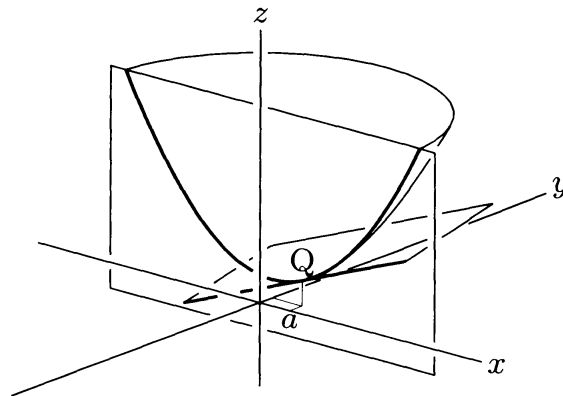


図3-3 曲面と接平面の切断

図3-3を真横から見るために視点を移動する。変化が連続的にとらえられるように視点の移動は徐々に行う。

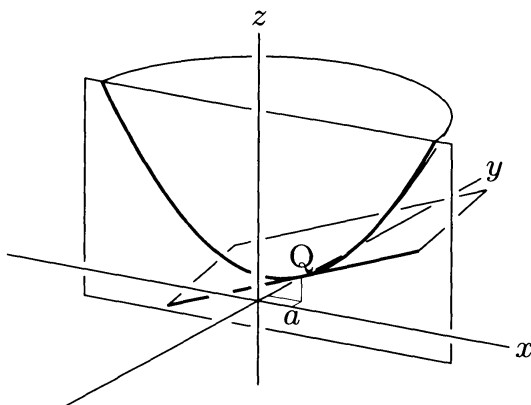


図3-4

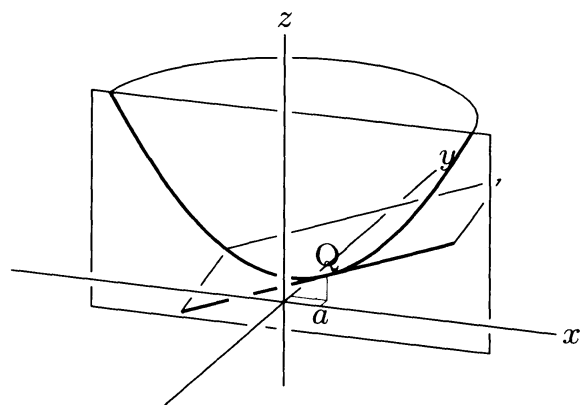


図3-5

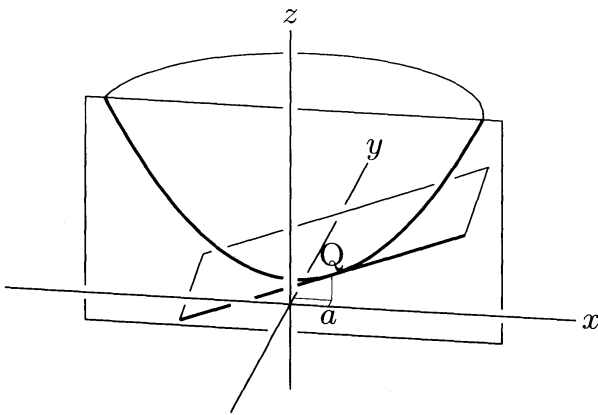


図 3-6

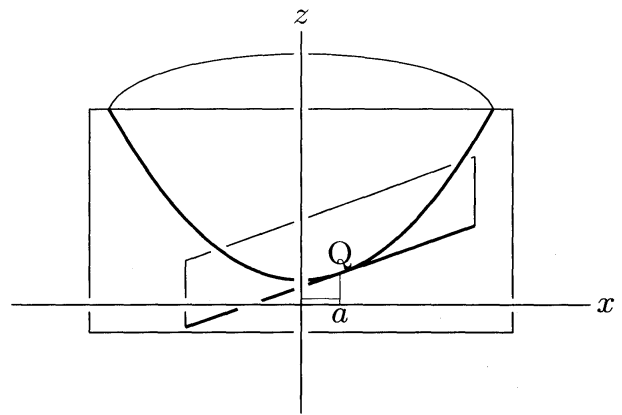


図 3-7

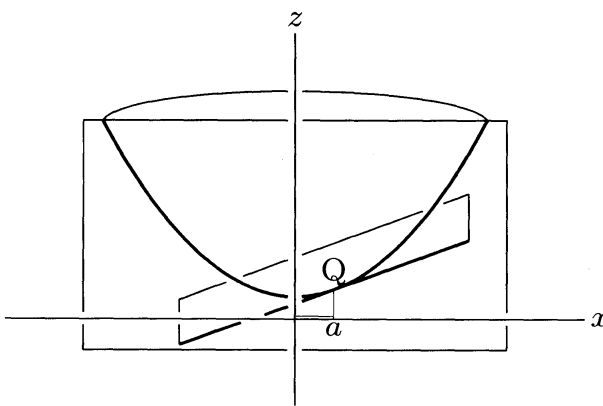


図 3-8

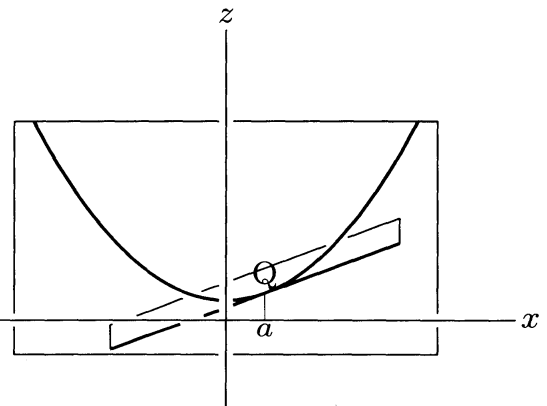


図 3-9

図 3-4 から 図 3-9 の一連の図は、繰り返し文を用いて視点を変化させながら KFpic のコマンド `sfcutoffparadata` を実行することにより自動的に作成することができる。さらに、切り口の線のみを表示すると (図 3-10), 切り口の線どうしの関係を 1 変数関数のグラフと接線の関係としてはっきりととらえることができる。

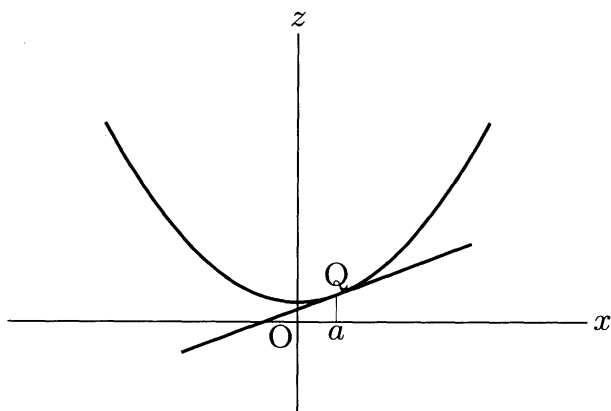


図 3-10 切り口の線

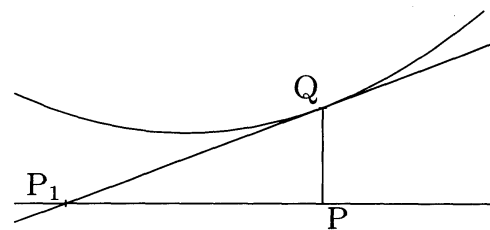


図 3-11 Q 点近くを拡大

接線の傾きと偏微分係数との関係を、定規による実測によって調べるために、図3-10のQ点近傍を拡大したものが図3-11である。この拡大図は問題プリントに掲載しており、1cmを単位の長さと考えたとき、10倍の拡大図になっている。定規による実測という作業を通して、偏微分係数という抽象的な概念を実感することが目的である。

問2 図3-3は図3-2を平面 $y=b$ で切断した様子を表わす。図3-11は図3-3を真横から見た図を10倍に拡大したものである。図3-11でPQ, PP_1 の長さを実測し、実際の長さを解答用紙に記入せよ。さらに、接線 P_1Q の傾きを求め解答用紙に記入せよ。

問題用紙には図3-3と図3-11とが並べて印刷してあるが、プロジェクタによって図3-3から図3-11への移行の過程が明示されることにより、問2で計測している長さや傾きの空間的な意味をつかみ易くしている。

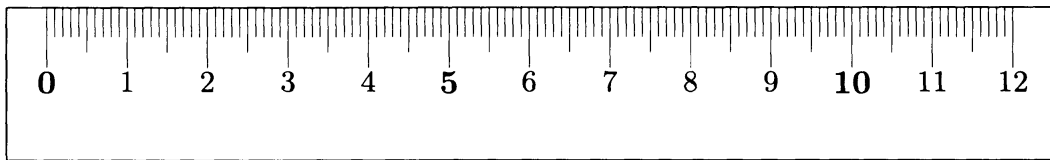


図3-12 紙の定規

問2の作業のために紙の定規(図3-12)を作成し全員に配付した。定規が正確であることを確認したのち、実測の作業に入った。実測値は図3-13となるので、

$$\text{接線 } P_1Q \text{ の傾き} = \frac{0.15}{0.375} = 0.4$$

である。

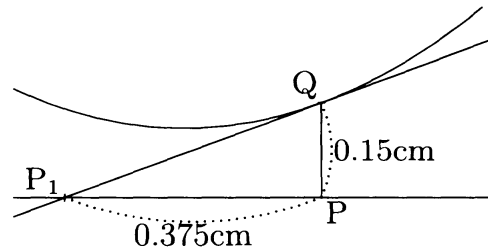


図3-13 実測値

実際の測定を見ていると1mm弱の誤差が伴うので、傾きの計算では小数第2位を四捨五入して求めるよう指示している。

問3 問1と問2の結果から $f_x(a,b)$ の意味を考えよ(解答用紙の空欄をうめよ)。

さらに、 $f_y(a,b)$ の意味を実感するために、平面 $x=a$ によって切断した図を提示し、回転・拡大したのち次の問へ進む。

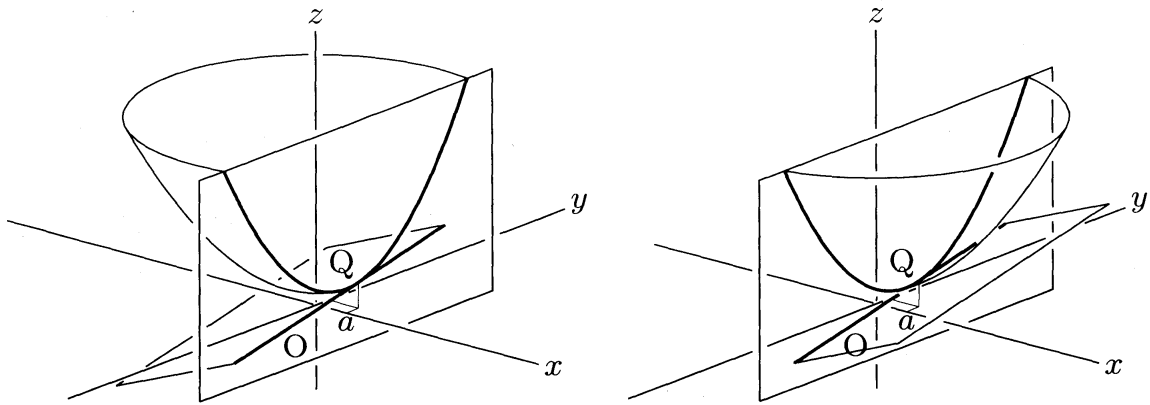


図 3-14 平面 $x = a$ による切断

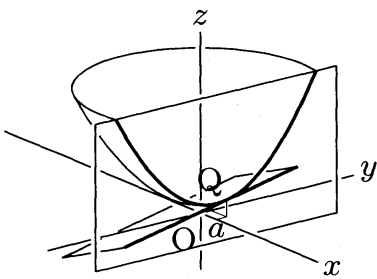


図 3-15

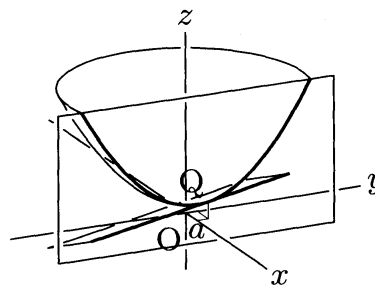


図 3-16

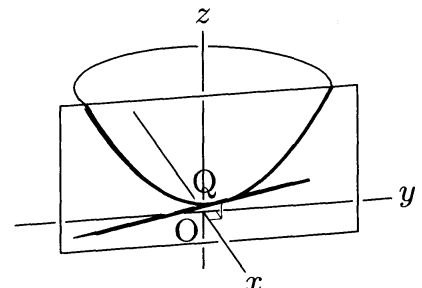


図 3-17

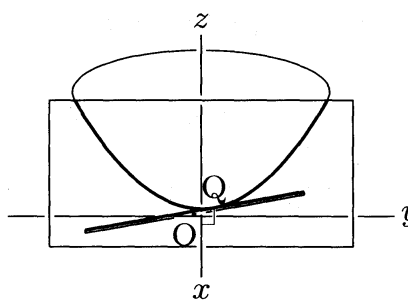


図 3-18

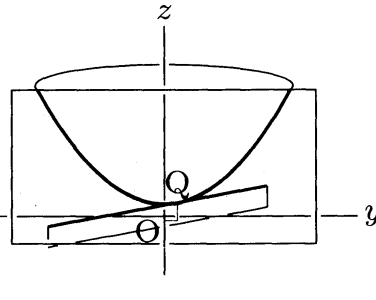


図 3-19

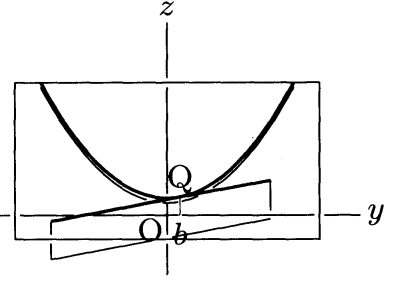


図 3-20

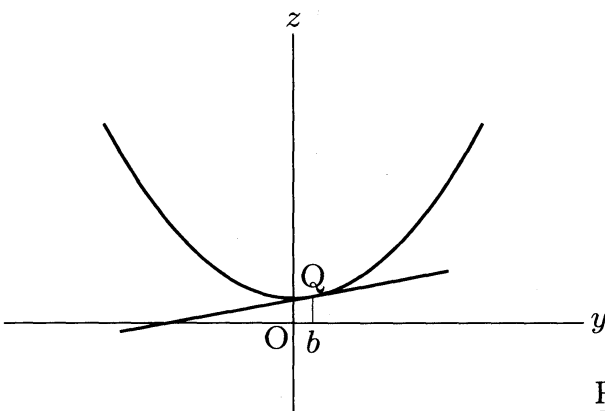


図 3-21 切り口の線

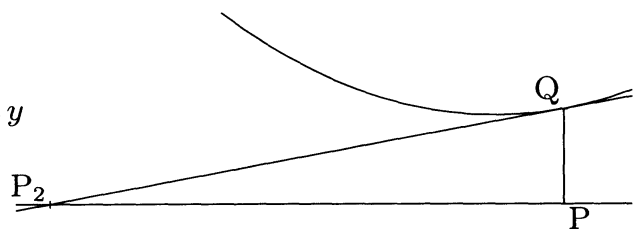


図 3-22 Q 点近くを拡大

問 4 図 3-22 で PQ, PP_2 の長さを実測し、実際の長さを解答用紙に記入せよ。さらに、接線 P_2Q の傾きを求め解答用紙に記入せよ。

問 5 問 1 と問 4 の結果から $f_y(a, b)$ の意味を考えよ（解答用紙の空欄をうめよ）。

問 2, 3 と問 4, 5 はほとんど同じ内容であるが、同じ作業を繰り返すことにより概念の定着をはかることを目指している。

ここから全微分の考察に入る。

まず全体の様子を概観するために、 x, y 両軸に平行な平面で切断した曲面の図を提示する。その後、点 Q の近傍を拡大した図へと進む。

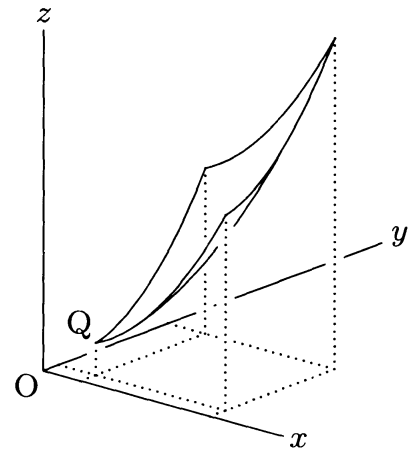


図 3-23 曲面を四角柱で切断

図 3-24 は 図 3-2 を 2 平面 $y = b, x = a$ によって切断し、 Q 点の近くを拡大した図である。(1) はもとの曲面、(2) は接平面、(3) は基準面 (xy 平面に平行で Q 点と同じ高さをもつ平面) である。下記両図とも平面での切り口を太い点線で強調し見やすくしている。

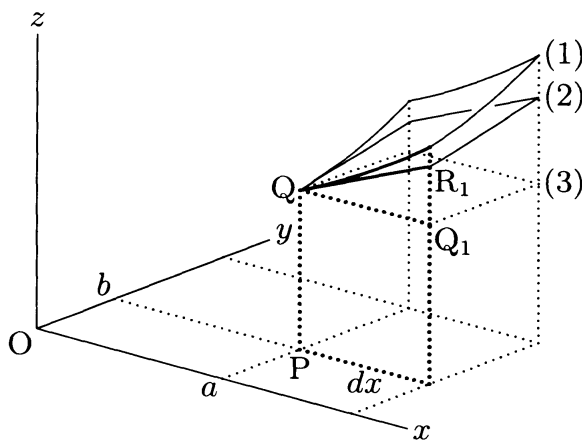


図 3-24 x の増加量 = dx

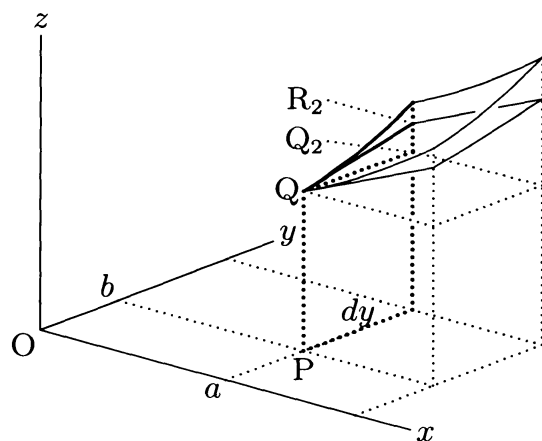


図 3-25 y の増加量 = dy

問 6 図 3-24 における長さ Q_1R_1 と 図 3-25 における長さ Q_2R_2 を $f_x(a, b), f_y(a, b)$ および dx, dy を用いて表しなさい。

全微分 dz が基準面から接平面までの高さであることを図 3-26 によりプロジェクタを用いて説明し、より理解しやすくするために曲面を除き接平面のみを残した 図 3-27 を示す。両図とも同じ図を配付プリントに載せてある。

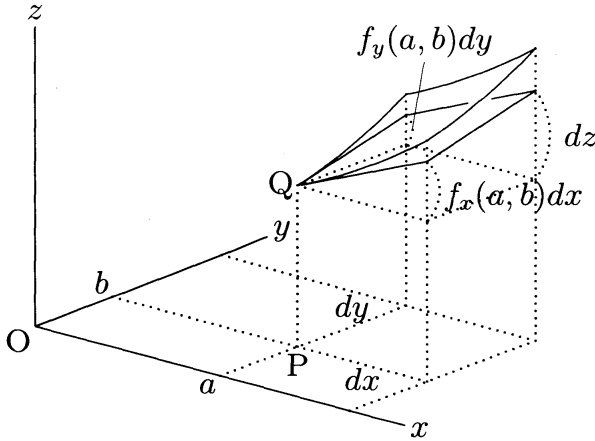


図 3-26 dz を全微分という

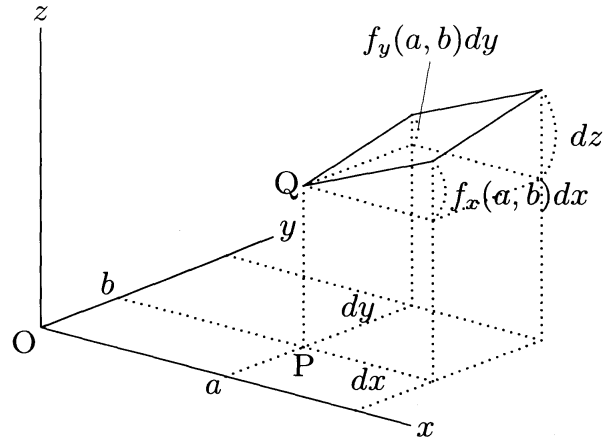


図 3-27 接平面のみを残す

最後に 図 3-27 における四角柱の頭の部分を拡大した 図 3-28 を示し問 7 へ進む (図 3-28 がプリントに載せた最後の図である) 。

問 7 図 3-28 をよく見て、 dz を $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, dx , dy を用いて表しなさい。

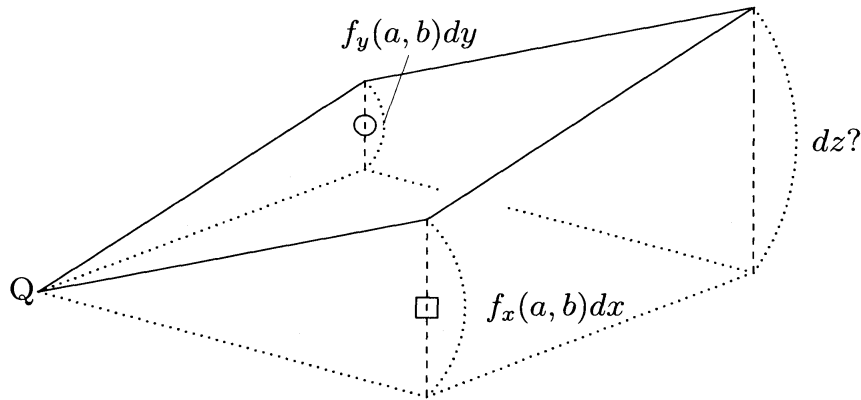


図 3-28 dz を表す式を求めよ

少し考えさせた後、すぐに答えが出せない学生のためにプロジェクタにより次のヒントを示す。さらに配付プリントの図中にも第 1 ヒントの補助線を正確に書き込ませる。

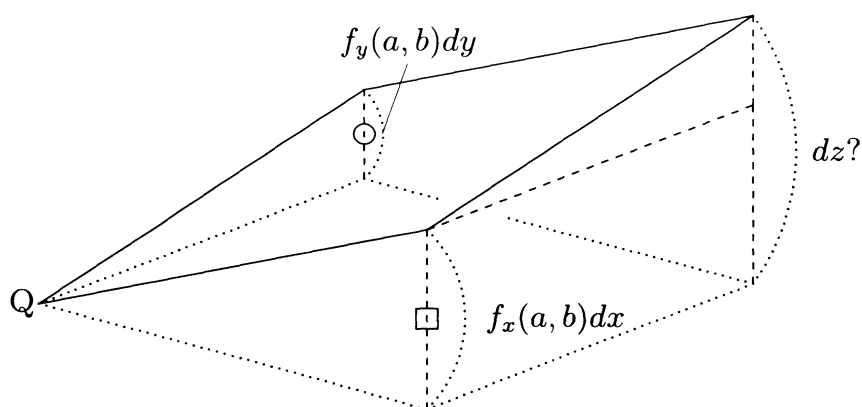


図 3-29 第 1 ヒント

第 1 ヒントで半数近くの学生が正解に達するが、正解が分った学生も含めて、さらにもう一本補助線を引くとすればどこに引いたら良いかを考えさせ、最後に第 2 のヒントをプロジェクタで示し、同時にプリントの図にも書き込ませる。

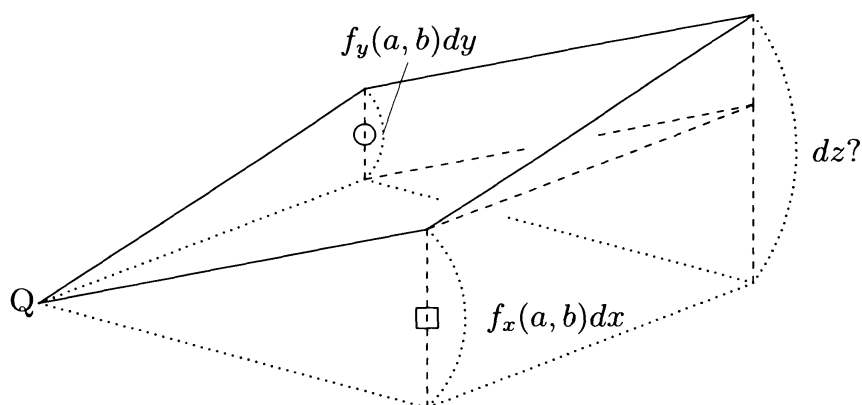


図 3-30 第 2 ヒント

第 2 ヒントの補助線は強いインパクトを持っており、今回の内容を深く理解している学生ほど、印象深く感じ $dz = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy$ の表現に納得が行くようである。

4 アンケート結果

今回は問題文中のアンケートの集計結果を示す。問題用紙とは別刷りで配付した解答用紙を用いて、各問に対する解答欄に付随して 4 択式のアンケートを行った。選択肢は次の 4 つである。

- A1: すぐにわかった, A2: 少し考えてわかった, A3: 説明を聞いてわかった,
A4: わからなかった

問7の選択肢のみは、他のものとは違っており次の様になる。

A1:最初の図でわかった, A2:第1ヒントでわかった, A3:第2ヒントでわかった,
A4:わからなかった

アンケート対象は工学部の3学科152名でありグラフは人数比率を表す。また、図4-1においてA5というのは無記入の人数割合を示す。

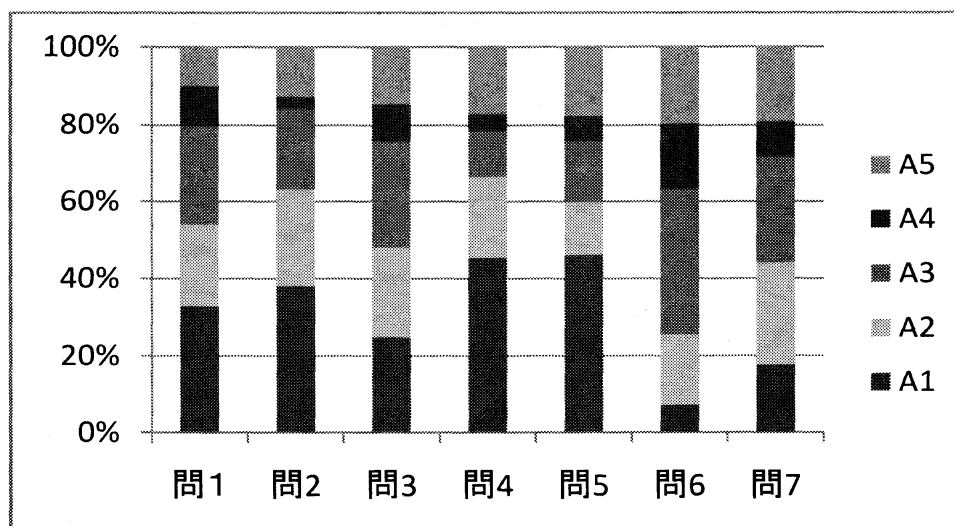


図4-1 問題文中のアンケートの集計

アンケートの集計結果は次のようにまとめられる。

1. 問1は偏微分係数を求める単純計算であるが、この問いの出来具合（A1+A2の値）がその後の概念を問う問題の出来（問3と問6におけるA1+A2の値）の上限を与えている。従って、或る式の数学的な意味を学習する前に単純計算練習を行うことは、理解を促す上で重要な意味をもつ可能性がある。
2. 問2は線分の長さを測り傾きを求めるという作業を伴う問いであり、大学数学の授業としてはかなり稀な授業方法である。この授業方法に対し、ある程度積極的に授業に参加する学生の割合（A1+A2+A3の値）が一番高く、分らなかったと答えた学生の割合が一番低くなっている。
3. 問2, 3の組と問4, 5の組は x 方向と y 方向の切断に関して同様な質問を繰り返しているが、2回目の質問に対する選択肢A1の増加が顕著に認められる。繰り返しにより授業への積極的参加を促す効果が期待できる。
4. 問6は空間的な増分を問う問題（ $dy = 0$ または $dx = 0$ の制約下での全微分 dz ）であるが、この授業の導入部で1変数関数の場合の式（ $dy = f'(x)dx$ ）を復習しているにも拘らず、空間の場合は難しいと感じる学生が非常に多い事が分る。更なる工夫が必要とされる教材である。
5. 問7は全微分の式を3次元図から求める問題であり、第2ヒントまで出すことによって72%の学生が理解に至っている。この問題では第2ヒントが重要で、内容

を良く理解している学生から、このヒントに感動した、このヒントは絶妙であったなどの感想が寄せられている。平面に投影された3次元の図から図の表す内容を理解するためには、描かれた図が3次元の形を正確に反映している必要があると考えられる。

6. 無回答の割合が時間経過と共にほぼ単調増大である。無回答ということは授業に参加できていないことを表し、この割合を減らす方策が重要である。このアンケートは無記名で行ったので無回答の多さに影響していると考えられるが、プロジェクタによる提示という授業方法も授業不参加の傾向を促すようである（最近の機器は明るく見易いので教室を暗くする必要はないのだが）。実際、授業不参加学生が増えたようだという感想が寄せられた。

5 まとめと今後の課題

前回の研究報告 [11] の今後の課題の中で、立体図形を含む教材の作成の必要性について言及したが、今回の研究では、立体図形を扱う授業の具体例として全微分に関する教材を取り上げた。また、教材の提示方法として印刷配布教材とプロジェクタによる提示とを有機的に結びつけて、直感的で分りやすく納得のいく授業方法を提案した。第2章における大学教員へのアンケート結果から分かる通り、印刷配布教材とプロジェクタとの組み合わせは3次元図形を扱う場合に教員の側からは敬遠され勝ちであるが、その一方で、学生の側からは「分りやすい・楽しい・大学らしい授業」といった肯定的な感想を引き出すことのできる授業方法である。従ってこの授業方法を積極的に活用することが望まれるが、 $\text{KE}T\text{pic}$ を用いることによって、印刷配布プリントの中に鮮明で美しく、単純で分りやすい3次元図形を挿入することができる。今回はプロジェクタで投影する図の一部を配付プリントにも掲載するという形で、プロジェクタの図とプリントの図を同一にして学生が両図の間を円滑に行き来できるよう配慮した。さらに、 $\text{KE}T\text{pic}$ で描いた図は長さが正確であることを用いて定規による実測を行い、数学の授業の中に作業的要素を取り入れて抽象的な概念を身近に体験させた。また、形が正確であることを用いて3次元図形中の長さの関係を十分に納得のいく形で理解できるような図を作成して考えさせた。

今後もより高い教育効果が得られる挿図教材とは何かに付いて具体的な教材を作成しつつ追究してゆくことが必要であるが、授業方法についても検討を加えることが求められている。CASを直接用いて作図した教材もプロジェクタを利用する場合には、動的な視点の移動や図形の変形など教育効果の高い機能を利用することができるので、 $\text{KE}T\text{pic}$ による作図教材との有効な連携方法を探求することが必要である。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金基盤研究C（課題番号 20500818）の補助を受けています。

参考文献

- [1] Takato S., Akemi G., & Iglesias A.: "Use of ImplicitPlot in Drawing Surfaces Embedded in \LaTeX documents", 2009 International Conference on Computational Sciences and its Applications, IEEE, 2009
- [2] Sekiguchi M., Abe T., Izumi H., Kaneko M., Kitahara K., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: "Monochrome Line Drawings of 3D Objects due to the Programmability of KETpic", 2008 International Conference on Computational Sciences and its Applications, pp. 277–283, IEEE 2008
- [3] Kaneko M., Abe T., Izumi H., Kitahara K., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Yamashita S., Fukazawa K., & Takato S.: "A Simple Method of the TeX Surface Drawing Suitable for Teaching Materials with the Aid of CAS", Lecture Notes in Computer Science 5102, pp. 35–45, Springer-Verlag 2008
- [4] Kaneko M., Abe T., Fukazawa K., Sekiguchi M., Tadokoro Y., Yamashita S., Takato S.: "CAS-aided Visualization in \LaTeX Documents for Mathematical Education" to appear in Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. VI, Issue II, 2008
- [5] 高遠節夫, 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 北原清志, 関口昌由, 深澤謙次, 山下哲: 「授業効果を高める挿図教材の作成」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.15, No.1, pp. 109–118, 2008
- [6] Abe T., Fukazawa K., Kaneko M., Kitahara K., Koshikawa H., Yamashita S., & Takato S.: "Migration of KETpic to Scilab and Comparison of Scilab with other CASs", 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, 第 16 号, pp.-, 2009 掲載予定
- [7] 山下哲, 阿部孝之, 金子真隆, 北原清志, 越川浩明, 深澤謙次, 高遠節夫: 「空間曲面の稜線描画の一方法について—Scilab 版 KETpic の改良—」 日本数学会 2009 年度年会応用数学分科会講演アブストラクト, 2009
- [8] 阿部孝之, 泉源, 金子真隆, 関口昌由, 山下哲, 北原清志, 深澤謙次, 高遠節夫: 「挿図教材の実態調査について」, 日本数学教育学会誌第 91 回総会特集号, p.543, 2009
- [9] 金子真隆, 阿部孝之, 関口昌由, 山下哲, 高遠節夫: 「KETpic による曲面描画と教育利用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.1-10, 2009
- [10] 泉源, 深澤謙次: 「KETpic の工学教育への利用と Maxima への移植」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.37-44, 2009
- [11] 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における KETpic で作成した挿図教材の使用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90-105, 2009