

## スウィング・オプションの最適行使境界と価格付け<sup>\*1</sup>

東京大学大学院 情報理工学系研究科 田代 雄介 (Yusuke Tashiro)  
Graduate School of Information Science and Technology  
The University of Tokyo

### 1 はじめに

近年、エネルギー市場の自由化に伴い、様々なデリバティブが取引されるようになってきている。その一種としてスウィング・オプションが挙げられる。スウィング・オプションの買い手と売り手の間にはエネルギーの取引契約があらかじめ結ばれており、スウィング・オプションの買い手は、満期までの各期間に定められた取引量を、定められた回数だけ変更することができる。

スウィング・オプションが他のオプションと大きく異なる点は、量の自由度を持つ、すなわち取引変更量を連続値で自由に変更できることである。さらに、取引変更量には様々な制約が課せられる。その一方で、権利が行使可能な期日は 1 日単位などの離散時間であるために、解析的に解くことは難しい。そのため、数値的な解法が用いられる。

任意の離散時間に権利を行使できるという性質ゆえに、スウィング・オプションの研究はアメリカン・オプション（バミューダ・オプション）の流れで発展してきた。アメリカン・オプションの価格を求める代表的な数値計算手法の 1 つに最小 2 乗モンテカルロ法がある。最小 2 乗モンテカルロ法は Longstaff and Schwartz[7] によって提案された。その後、スウィング・オプションに対しても拡張がなされている [4][2]。

また、別の価格付け手法の 1 つとして最適行使境界に注目する方法が挙げられる。Ibanez[6] は権利行使が複数回可能な義務つきアメリカン・オプションの最適行使境界を分析し、境界の一意性、単調性などを示している。そして、その性質を持つ最適行使境界を計算することで価格付けを行っている。それに対し、本稿では bang-bang なタイプのスウィング・オプションの最適行使境界を持つ一意性、単調性などを示した<sup>\*2</sup>。また、価格の計算も合わせて行った。

ところで、上に挙げた手法によって得られる価格はいずれも、真値に対して下方のバイアスがかかっている。つまり、得られる価格は真値の下界であるといえる。それに対し、価格の真値の上界を与える手法が近年提案されてきている。Rogers[9], Haugh and Kogan[5] は、アメリカン・オプションの価格を与える最適停止問題の双対形式に注目し、その問題を変形することでオプション価格の真値の上界を与える式を導出した。また、その式を近似する手法を提案した。その後、Meinshausen and Hambly[8], Aleksandrov and Hambly[1], Bender[3] などによって、権利行使回数や 1 期に行使できる権利の数を複数回に拡張したアメリカン・オプションに対して同様に価格

<sup>\*1</sup> 本研究は文部科学省グローバル COE プログラム「数学新展開の研究教育拠点」の支援を受けた。また、本稿は証明等を省略した簡約版である。

<sup>\*2</sup> bang-bang とは、権利行使時の取引変更量が変更可能な最大値か最小値のみをとることを意味する。

の上界を与える式が導出されている。それに対し、本稿では bang-bang なタイプのスウィング・オプションに対して、価格の 2 階差分に注目することによって、価格の上界を与える式を導出した。そして、下界と上界の数値計算を具体的に行った。

以下に本稿の構成を示す。まず、2 節で本稿で対象とするスウィング・オプションを定義する。次に、3 節でスウィング・オプションの最適行使境界に関する諸性質を示す。さらに、4 節ではスウィング・オプションの価格の上界を求めるための式を導出する。そして、5 節で実際に価格の上界を計算した数値例を示す。6 節はまとめと今後の課題である。

## 2 スウィング・オプションの定義

スウィング・オプションは、エネルギーの買い手と売り手の間で取引されるオプションである。買い手と売り手はあらかじめ、時刻  $0, 1, \dots, T$  の各期に原資産（エネルギー） $S$  を価格  $K_t$  で固定量だけ取引する契約を結んでいるものとする。ただし、各時刻の間隔は  $\Delta t$  とする。買い手は、スウィング・オプションを売り手から購入することで、この取引量を定められた回数だけ変更する権利を得る。ただし、変更量には様々な制約が設定される。

本稿で対象とするスウィング・オプションを定義する。まず、権利行使回数は  $L (\leq T + 1)$  回とする。各期の取引変更量  $v_t$  は

$$v_{\min} \leq v_t \leq v_{\max}$$

を満たしているものとする。この制約は DCQ (Daily contract Quantity) と呼ばれる。また、取引変更量の和について、

$$V_{\min} \leq \sum_{t=0}^T v_t \leq V_{\max}$$

を満たしているものとする。この制約は ACQ (Annual Contract Quantity) と呼ばれる。

さらに、 $V_{\min}$  と  $V_{\max}$  がとる値は以下の式で表されうる値に限定されるものとする：

$$\begin{aligned} V_{\min} &= a \cdot v_{\min} + (L - a)v_{\max}, \\ V_{\max} &= b \cdot v_{\min} + (L - b)v_{\max} \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+). \end{aligned}$$

すなわち、 $V_{\min}$  と  $V_{\max}$  は  $v_{\min}$  と  $v_{\max}$  を伴う合計  $L$  回の権利行使によって達成されうるものとする。このとき、オプションの買い手がとるべき戦略（権利行使ならびに変更量）について以下の命題が成り立つ。

**命題 1:** 上で定義したスウィング・オプションから得られる利益を最大にする戦略集合には、変更量として  $v_{\min}$  か  $v_{\max}$  しか選ばず、 $L$  回の権利を使い切るような戦略（bang-bang な戦略）が必ず含まれる。

命題 1 から、上で定義したスウィング・オプションの価格付け問題を考える際には bang-bang な戦略のみをとりうるとしてよい。そこで、以後は bang-bang な戦略のみをとりうるスウィング・オプションを価格付けの対象として話を進めていく。

このとき、スウィング・オプションの制約は、 $v_{\min}$ ,  $v_{\max}$  それぞれを伴う権利の最低行使回数として書き直すことができる。したがって、スウィング・オプションの  $L$  回の権利は、1)  $v_{\max}$  をともなう購入義務  $L_b$  回、2)  $v_{\min}$  をともなう売却義務  $L_s$  回、3)  $v_{\min}, v_{\max}$  両方が選択可能なストラグルの権利  $L_d$  回、という3種類の権利に分解することができる。この3種類の権利は同時に行使することはできず、図1に示すように権利行使ごとに義務から優先して減っていく。

なお、特に  $L = T + 1$  の場合は、満期までの全ての期に  $v_{\min}$  をともなう売却を行うと考えることで、1) 売却義務、2) 義務付きの複数回アメリカン・コールオプション（売却義務と同時行使可能）に分解することができる。

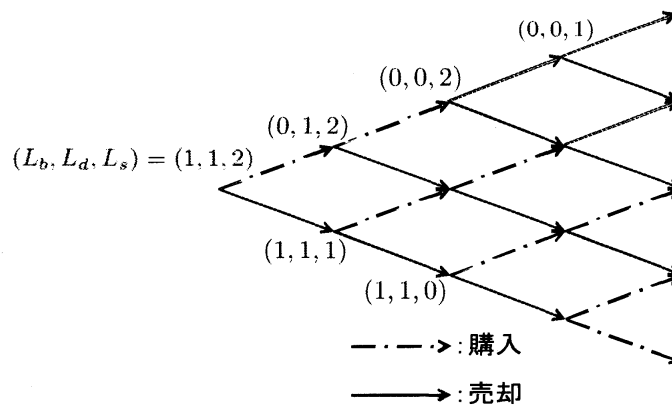


図1 権利行使回数の遷移

### 3 スウィング・オプションの最適行使境界

本節では、スウィング・オプションの最適行使境界を持つ性質について分析する。

まず、スウィング・オプションの価格付け問題を動的計画として定式化する：

$$V(L_b, L_d, L_s, t) = \max[Y(L_b, L_d, L_s, t), Z^b(t) + Y(L_b - 1, L_d, L_s, t), Z^s(t) + Y(L_b, L_d, L_s - 1, t)]. \quad (1)$$

ここで、 $Y(L_b, L_d, L_s, t)$  は継続価値、 $Z^b(t)$ ,  $Z^s(t)$  はそれぞれ購入、売却の権利行使で得るペイオフで、以下のように表される：

$$Y(L_b, L_d, L_s, t) = E_t[e^{-r\Delta t} V(L_b, L_d, L_s, t + 1)], \quad (2)$$

$$Z^b(t) = v_{\max}(S_t - K), \quad Z^s(t) = v_{\min}(S_t - K).$$

また、準備として権利行使回数に関するオプション価格の差分を定義する。差分は購入と売却そ

それぞれについて以下のように定義される\*3：

$$\begin{aligned}\Delta^b V(l_b, l_d, l_s, t) &= V(l_b, l_d, l_s, t) - V(l_b - 1, l_d, l_s, t), \\ \Delta^s V(l_b, l_d, l_s, t) &= V(l_b, l_d, l_s, t) - V(l_b, l_d, l_s - 1, t).\end{aligned}$$

式 (2) における継続価値（期待値の項）は原資産が従う価格過程  $S$  に依存する。価格過程によっては、最適行使境界が一意に定まらなかったりと、現実にはそぐわないことも起こりうる。そこで、価格過程  $S$  について、いくつかの条件を仮定する。以下は  $F(t, S_t) \equiv E_t[e^{-r\Delta t} f(t+1, S_{t+1})]$  に対してほとんど確実に成り立つ条件である：

1.  $f$  が  $S$  について連続ならば、 $F$  も  $S$  について連続で微分可能
2.  $(f(t+1, S_{t+1})) \leq 0$  かつ  $(f(t+1, S_{t+1})) \neq 0$  ならば  $(F(t, S_t)) > 0$
3. ある  $c_1, c_2$  に対して  $c_1 \leq (f(t+1, S_{t+1}))'_S \leq c_2$  ならば  $c_1 \leq (F(t, S_t))'_S \leq c_2$ .  
特に  $(f(t+1, S_{t+1}))'_S \neq c_1, c_2$  ならば  $c_1 < (F(t, S_t))'_S < c_2$
4.  $(f(t, S_t))'_S = (F(t, S_t))'_S = c$  のとき、 $f(t, S_t)$  と  $F(t, S_t)$  は交点を持たない

ただし、 $(\cdot)'_S$  は  $S$  についての微分を表す。4 番の条件は、購入、売却義務の境界の不定性を除外するための条件である。エネルギーの価格過程としてよく用いられる平均回帰過程はこれらの条件を満たす。また、ブラウン運動も  $r > 0$  であれば条件を満たす\*4。

以上の設定の下でスウィング・オプションの最適行使境界が満たす性質を示したのが定理 1 である。

**定理 1:** スウィング・オプションの最適行使境界は 1-3 に挙げる一意性、4-7 に挙げる単調性を満たす。また、オプション価格は 8,9 に挙げる大小関係を満たす。ただし、 $S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t)$  は購入の権利行使を定める境界、 $S^{*s}(l_b, l_d, l_s, t)$  は売却の権利行使を定める境界、 $S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t)$  は購入の権利と売却の権利のどちらを行使するかを定める境界をそれぞれ意味する。

1.  $S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t)$  は一意
2.  $S^{*s}(l_b, l_d, l_s, t)$  は一意
3.  $S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t)$  は一意
4.  $l_b + l_d + l_s < T - t + 1$  のとき、すなわち権利行使回数と残り期間が等しくないとき  
 $S^{*s}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t)$
5. 権利行使回数が増えるほど、行使領域も大きくなる。すなわち  
 $S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b - 1, l_d, l_s, t)$ ,  $S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b, l_d, l_s - 1, t)$
6. 権利行使回数が増えるとき、購入義務が少ないほど行使領域は小さくなる。すなわち  
 $S^{*b}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b - 1, l_d, l_s + 1, t)$
7. (性質 5 の特殊ケース)  $l_b + l_d + l_s = T - t + 1$  のとき

\*3 正確には、 $l_b = 0$  や  $l_s = 0$  の場合は別に定義を記述する必要があるが、ここでは簡単のために  $l_b > 0$ ,  $l_s > 0$  の場合のみを想定して定義している。以降も差分を考えるときは同様とする。

\*4  $r = 0$  の場合は 4 番の条件を満たさない。

$$S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b - 1, l_d, l_s, t), \quad S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t) \leq S^{*b}(l_b, l_d, l_s - 1, t)$$

8. 売却義務の回数が増えると、差分は大きくなる。すなわち

$$\Delta^b V(l_b, l_d, l_s, t) - \Delta^b V(l_b, l_d, l_s - 1, t) \leq 0$$

9. 権利行使回数が等しいとき、購入義務が少ないほど差分は大きくなる。すなわち

$$\Delta^b V(l_b, l_d, l_s, t) - \Delta^b V(l_b - 1, l_d, l_s + 1, t) \leq 0$$

5-9 に関しては、売却について対称的な性質が成り立つ。

証明は、時刻  $T$  からスタートする後ろ向きの帰納法を用いて行われる。

上の性質を満たす最適行使境界はたとえば図 2 のように表される。

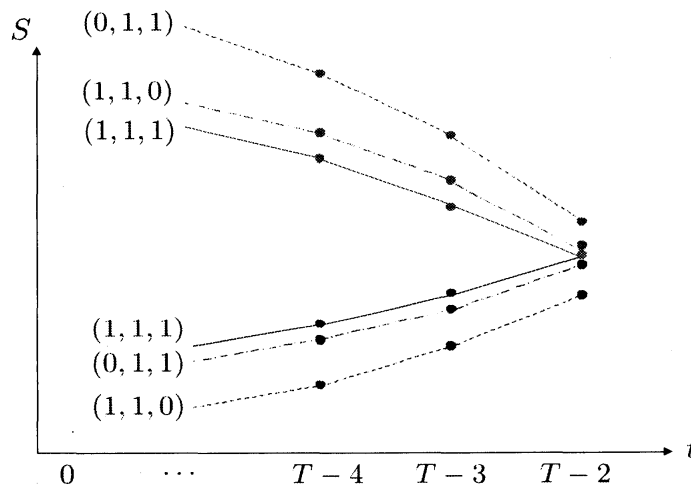


図 2 最適行使境界の例

## 4 スウィング・オプション価格の上界の数値計算手法

本節ではスウィング・オプション価格の真値の上界を計算するための式を与える。

まず、スウィング・オプションの価格付け問題を最適停止問題として定式化する。権利行使回数  $(L_b, L_d, L_s)$  と割引済ペイオフ  $Z(t, \xi)$  を持つスウィング・オプションの時刻 0 における価格を求める問題は以下のように定式化される。ここで、 $Z(t, 1)$  は購入、 $Z(t, -1)$  は売却によるペイオフをそれぞれ表す：

$$\begin{aligned} V^*(L_b, L_d, L_s, 0) &= \sup_{\tau, \xi} \sum_{i=1}^L E[Z(\tau_i, \xi_i)] \\ \text{s.t. } & 0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_L \leq T, \quad \xi_i \in \{1, -1\}, \\ & \sum_{i=1}^L \mathbf{1}_{\{\xi_i=1\}} \leq L_b + L_d, \quad \sum_{i=1}^L \mathbf{1}_{\{\xi_i=-1\}} \leq L_d + L_s. \end{aligned} \quad (3)$$

この問題と動的計画により定式化された問題 1 は同じ最適値を持つので、最適行使境界から問題 3

の最適停止時刻  $(\tau^*, \xi^*)$  を構成することが可能である.

#### 4.1 アメリカン・オプション価格の上界

問題 3 を考えるにあたり, まずアメリカン・オプションに対する先行研究の結果を見る. ペイオフ  $Z(t)$  を持つアメリカン・オプションの価格  $V^*(0)$  を求める問題は以下の最適停止問題として定式化されることがよく知られている:

$$V^*(0) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} E[Z(\tau)]$$

Rogers[9] はこの問題の双対形式に注目することで, 価格の上界を与える以下の定理を示している:

**定理 2** ([9]): 任意のマルチンゲール  $M(t)$  ( $M(0) = 0$ ) に対して以下の式が成り立つ:

$$V^*(0) \leq E[\max_{t=0, \dots, T} (Z(t) - M(t))] \quad (4)$$

特に,  $V^*(t)$  を Doob 分解したときに現れるマルチンゲール  $M^*(t)$  について等号が成立する.

従って, 右辺のマルチンゲール項を近似することで, 価格  $V^*(0)$  の上界が数値的に与えられる.

#### 4.2 複数回行使可能なアメリカン・オプション価格の上界

この節で考えるのは, 権利が複数回であり, かつ 1 期に複数の権利が行使可能なアメリカン・オプションである\*5. 権利の総数を  $L$ , 時刻  $t$  に行使可能な最大権利数を  $c_t$  とする.

このタイプのオプションに対しては, 以下の式で表されるような権利行使回数についてのオプション価格の差分に対する解析がよく行われる:

$$\Delta V(L, 0) = V(L, 0) - V(L - 1, 0).$$

Bender[3] は, 差分の価格が単一の停止時刻を持つ最適停止問題で上から抑えられることを示し, その最適停止問題に定理 2 を適用することによって, 価格の上界を与えた. その結果が以下の定理である:

**定理 3** ([3]):  $n \leq T + 1$  を満たす任意の  $n$ , 制約  $c_t$  を満たす任意の停止時刻  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  ならびに任意のマルチンゲール  $M(t)$  ( $M(0) = 0$ ) に対して以下の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \Delta^n V^*(0) &= V^*(n, 0) - V^*(n - 1, 0) \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq T} E[Z^{[\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]}(\tau)] \\ &\leq E[\max_{t=0, \dots, T} (Z^{[\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]}(t) - M(t))]. \end{aligned} \quad (5)$$

特に,  $\tau_1^*, \dots, \tau_{n-1}^*$  と  $\Delta^{n - \varepsilon_{n-1}^*(t)} V^*(t)$  を Doob 分解したときに現れるマルチンゲール  $M^*(t)$  について全体の等号が成立する. ただし,  $Z^{[\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]}(t)$  は  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  に従って権利を行使した

\*5 1 期に 1 回のみ権利が行使可能なオプションについては, Meinshausen and Hambly[8] が分析している.

とき、時刻  $t$  においてすでに権利が  $c_t$  回行使されている場合に  $-\infty$  の値をとるペイオフ関数、 $\mathcal{E}_{n-1}^{\tau}(t)$  は  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  に従った場合に時刻  $t-1$  までに行使される権利の数をそれぞれ表す。

式 (5) の右辺のマルチンゲール項を近似することで、価格の差分の真値の上界を求めることができる。従って、その上界を足し合わせることで、価格の真値の上界を得ることができる。

### 4.3 スウィング・オプション価格の上界

この節では本稿の主題であるスウィング・オプション価格の上界の式を与える。

スウィング・オプションも権利行使回数が複数回のオプションの 1 種なので、前節と同じように権利行使回数についての差分に注目する方法がまず考えられる。だが、スウィング・オプションでは正負 2 種類の量をとまなう権利行使が可能である。従って、買いと売り 2 種類の差分が考えられるが、どちらの差分も逆方向の権利の行使をうまく扱うことができない\*6。

そこで、本稿では以下の式で定義されるオプション価格の 2 階差分に注目する：

$$\begin{aligned} \Delta\Delta V(L_b, L_d, L_s, 0) &= V(L_b, L_d, L_s, 0) - V(L_b - 1, L_d, L_s, 0) \\ &\quad - V(L_b, L_d, L_s - 1, 0) + V(L_b - 1, L_d, L_s - 1, 0). \end{aligned} \quad (6)$$

図 1 における 2 階差分に着目すると、図 1 のひし形 1 つ 1 つが 2 階差分を表すと見なすことができる。したがって、スウィング・オプション価格  $V^*(L_b, L_d, L_s, 0)$  は

$$V^*(L_b, L_d, L_s, 0) = \sum_{(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}} \Delta\Delta V^*(l_b, l_d, l_s, 0)$$

と価格の 2 階差分の和に分解することができる。ここで、 $\mathcal{L}$  は図 1 のような状態遷移図における、葉を除く頂点集合を表す。

この 2 階差分の和に対して、最適停止問題による上界を与えるのが以下の定理である：

**定理 4:**  $L_b + L_d + L_s \leq T + 1$  を満たす任意の  $(L_b, L_d, L_s)$  と定理 1 における条件 1-6 を満たし、かつ最適停止時刻  $(\tau^*, \xi^*)$  との間で売買の反転が起こらないような任意の  $(\tau, \xi)$  に対して

$$\begin{aligned} V^*(L_b, L_d, L_s, 0) &= \sum_{(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}} \Delta\Delta V^*(l_b, l_d, l_s, 0) \\ &\leq \sum_{(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}} \sup_{0 \leq \tau' \leq T} \mathbf{E}[Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(\tau')] \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つ\*7。特に、 $(\tau^*, \xi^*)$  について等号が成立する。ただし、 $\mathcal{L}$  は図 1 のような状態遷移図における葉を除く頂点集合、 $Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}$  は時刻  $\tau$  で権利行使不可の場合は  $-\infty$  の値をとり、かつ必要に応じて補正項が加えられたペイオフ関数をそれぞれ意味する。

証明は  $V^*$  を上回る戦略を発見的に構成する方法によって行う。 $(\tau, \xi)$  が満たすべき条件、ペイオフ関数  $Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}$  の詳細は補論で与える。

\*6 ここでいう逆方向は、買いの差分なら売り、売りの差分なら買いを意味する。

\*7 不等号は 2 階差分の和についてのみに成り立ち、先行研究のような差分単位での不等号は成り立たない。

式 (7) の右辺のそれぞれの要素は単一の停止時刻を持つ最適停止問題として記述されているので、定理 2 を適用することができる。その結果が以下の定理である：

**定理 5:**  $L_b + L_d + L_s \leq T + 1$  を満たす任意の  $(L_b, L_d, L_s)$  と任意のマルチンゲール  $M(t)$  ( $M(0) = 0$ ) に対して

$$\begin{aligned} V^*(L_b, L_d, L_s, 0) &= \sum_{(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}} \sup_{0 \leq \tau' \leq T} \mathbb{E}[Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau^*, \xi^*]}(\tau')] \\ &\leq \sum_{(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}} \mathbb{E} \left[ \max_{t=0, \dots, T} [Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau^*, \xi^*]}(t) - M(t)] \right] \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ。特に、 $\Delta \Delta^{(l_b, l_d, l_s) - \epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau^*, \xi^*]}(t)} V^*(t)$  を Doob 分解したときに現れる  $M^*(t)$  について等号が成立する。ただし、 $\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  は  $(\tau, \xi)$  に従った時に時刻  $t - 1$  までに執行されるそれぞれの権利数を意味する。

$\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  については補論で補足する。以上より、式 (8) の右辺の期待値をモンテカルロ法によって数値的に求めることにより、スウィング・オプション価格の真値の上界を求めることができる。

## 5 価格付けの数値例

本節では、前節の定理を利用してスウィング・オプション価格の上界を計算した数値例を示す。また、価格の下界も合わせて計算し、バウンドの大きさに注目することで手法の精度を確認する。

原資産  $S$  の価格過程としては、以下のような平均回帰過程を用いた：

$$S_t = -3(S_t - 40)dt + 0.5dW_t, \quad S_0 = 40.$$

また、パラメータは以下の通りに設定した：

$$r = 0, \quad T = 9, \quad \Delta t = 1/24, \quad K = 40.$$

以上の設定の下で、権利行使回数  $(L_b, L_d, L_s) = (1, 1, 1), (2, 2, 2)$  の 2 種類のスウィング・オプションについて上界と下界を計算した。

計算は大きく 2 ステップに分かれる。まず、モンテカルロ法によって最適行使境界の近似解を求め、その境界を用いたモンテカルロ法（繰り返し回数 1,000,000 回）によって価格の下界を計算する。次に、式 (8) におけるマルチンゲールの項を、上で与えた最適行使境界を用いて近似することで、価格の上界を計算する（繰り返し回数 100 回）。ここでのマルチンゲールの近似手法は Bender[3] に沿った方法を用いている。近似には毎回 50,000 本のパスを発生させた。

得られた最適行使境界の一部を抜き出したものが図 3 である。3 節で示した諸性質を満たしていることが確認できる。また、上界と下界の計算結果が表 1 である。2 種類のオプションいずれにおいても価格のバウンドが価格の 1% 以下に収まっているのが見てとれる。 $(L_b, L_d, L_s) = (2, 2, 2)$



表1 スウィング・オプションの価格の上界と下界の数値例

権利行使回数	下界	上界
$(L_b, L_d, L_s) = (1, 1, 1)$	0.2872 (0.0002)	0.2875 (0.0003)
$(L_b, L_d, L_s) = (2, 2, 2)$	0.5234 (0.0003)	0.5255 (0.0005)

(括弧内の数値は標準誤差を表す.)

におけるバウンドは  $(1, 1, 1)$  と比べて数倍になっているが、理論的にはバウンドは問題のサイズに比例して、すなわち権利行使回数の2乗のオーダーで増えると考えられるので、妥当な結果であるといえる\*8.

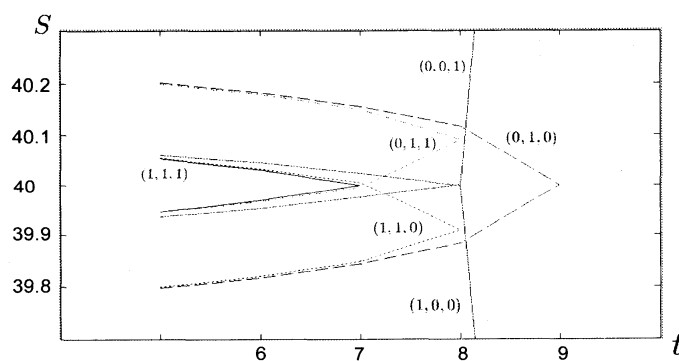


図3 最適行使境界の計算結果  $((L_b, L_d, L_s) = (1, 1, 1))$

## 6 まとめと今後の課題

本稿では、取引変更量が bang-bang なタイプとなるスウィング・オプションについて、最適行使境界を持ついくつかの性質を示した。また、その性質を利用して、スウィング・オプション価格の真値の上界を与える式を導いた。そして、下界と上界を具体的に数値計算によって求め、権利行使回数が少ない時は、価格の1%以下の小さいバウンドを与えることを確認した。

今後の課題としては、一般の取引量制約を持つスウィング・オプションについて拡張を行うことが挙げられる。今回の設定から取引変更量の和を任意に緩和したとき、とりうる変更量は2種類  $(v_{\min}, v_{\max})$  から6種類に増えることが分かっている。このオプションに対して価格の上界を与える式を導出することが目標である。

\*8 ここでいう問題のサイズは格子の頂点集合  $\mathcal{L}$  の要素数を指している。

## 参考文献

- [1] N. Aleksandrov and B. M. Hambly: A Dual Approach to Multiple Exercise Option Problems under Constraints, Preprint.
- [2] C. Barrera-Esteve, F. Bergeret, C. Dossal, E. Gobet, A. Meziou, R. Munos and D. Reboul-Salze: Numerical Methods for the Pricing of Swing Options: A Stochastic Control Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 8 (2006), pp. 517–540.
- [3] C. Bender: Dual Pricing of Multi-Exercise Options under Volume Constraints, *Finance and Stochastics*, forthcoming.
- [4] U. Dörr: Valuation of Swing Options and Examination of Exercise Strategies by Monte Carlo Techniques. Thesis,
- [5] M. B. Haugh and L. Kogan: Pricing American Options: A Duality Approach. *Operations Research*, vol. 52 (2004), pp. 258–270.
- [6] A. Ibanez: Valuation by Simulation of Contingent Claims with Multiple Early Exercise Opportunities. *Mathematical Finance*, vol. 13 (2004), pp. 223–248.
- [7] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz: Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, vol. 14 (2001), pp. 113–147.
- [8] N. Meinshausen and B. M. Hambly: Monte Carlo Methods for the Valuation of Multiple-Exercise Options, *Mathematical Finance*, vol. 12 (2004), pp. 557–583.
- [9] L. C. G. Rogers: Monte Carlo Valuation of American Options, *Mathematical Finance*, vol. 12 (2002), pp. 271–286.

## 付録 A 定理 4,5 の補足

この節では定理 4,5 についていくつかの補足を行う。

まず,  $(\tau, \xi)$  が満たすべき条件について補足する。定理 4 において,  $(\tau, \xi)$  は「最適停止時刻との間で売買の反転が起こらない」という条件を定めたが, これは正確には任意の  $(l_b, l_d, l_s) \in \mathcal{L}$  について, 時刻  $t = T - (l_b + l_d + l_s) + 1$  において

$$\begin{aligned}\hat{S}^b(l_b - 1, l_d, l_s, t) &\geq S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t), \\ \hat{S}^s(l_b, l_d, l_s - 1, t) &\leq S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t), \\ \hat{S}^b(l_b, l_d, l_s - 1, t) &\geq \hat{S}^s(l_b - 1, l_d, l_s, t)\end{aligned}$$

が成り立つという条件である。ただし,  $\hat{S}$  は  $(\tau, \xi)$  から構成される境界である。

ここで注意しておきたい点として,

$$\begin{aligned}\hat{S}^b(l_b, l_d, l_s - 1, t) &\geq S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t), \\ \hat{S}^s(l_b - 1, l_d, l_s, t) &\leq S^{*bs}(l_b, l_d, l_s, t)\end{aligned}\tag{9}$$

は満たさなくてもよいことが挙げられる。このことは、最適行使境界の計算において求められる正確性を緩和する。例えば、図3を見ると、時刻  $t = 7$  において  $\hat{S}^b(1, 1, 0, t)$  と  $\hat{S}^{bs}(1, 1, 1, t)$  はかなり近い値をとりうる。従って、もし式(9)を満たさなければならない場合、かなり正確な計算が要求されることとなる。実際には式(9)を満たす必要はないため、真の境界と少しずれた境界を用いても、得られる解が真の価格の上界であることは保障される。

次に、2階差分のペイオフを意味する  $Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  について補足する。  $Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  の値は、2階差分を表すひし形において、左端以外の点が示すオプションが  $(\tau, \xi)$  によって時刻  $t$  で行使されるかどうかによって依存し、以下のように与えられる：

$$Z_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t) = D_{(l_b, l_d, l_s)}(t) + \begin{cases} \max [Z(t, +1) - Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t), \\ Z(t, -1) - Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)] \\ + Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t) \\ (\hat{\xi}_{(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t)} = 0 \text{ and } \hat{\xi}_{(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)} = 0), \\ 0 \\ (\hat{\xi}_{(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t)} = 1 \text{ and } \hat{\xi}_{(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)} = 0) \text{ or} \\ (\hat{\xi}_{(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t)} = 0 \text{ and } \hat{\xi}_{(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)} = -1), \\ -\infty \\ (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 $Y^{[\tau, \xi]}(\cdot)$  は  $(\tau, \xi)$  に従って権利が行使される時の継続価値、 $\hat{\xi}_{(l_b, l_d, l_s, t)}$  は  $(\tau, \xi)$  に従う時、時刻  $t$  に  $(l_b, l_d, l_s)$  の権利を持つオプションの買いの権利が行使される場合に 1、売りの権利が行使される場合に -1、権利行使がない場合に 0 をそれぞれとる関数である。また、 $\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s$  は  $(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s) = (l_b, l_d, l_s) - \epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  を満たす値、すなわち残存する権利数を表し、 $D_{(l_b, l_d, l_s)}(t)$  は過去のパスに依存する補正項を表す。補正項  $D_{(l_b, l_d, l_s)}(t)$  は、2階差分を表すひし形のうち、真ん中の2つのオプションにおいて権利行使が行われるときに加えられる項で、以下の式で表される：

$$D_{(l_b, l_d, l_s)}(t) = D_{(l_b, l_d, l_s)}(t-1) + \begin{cases} -Z(t, -1) + Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t) - Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s - 2, t) \\ (\hat{\xi}_{(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t)} = -1), \\ -Z(t, +1) + Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t) - Y^{[\tau, \xi]}(\check{l}_b - 2, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t) \\ (\hat{\xi}_{(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)} = 1), \\ 0 \\ (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (11)$$

最後に定理5における  $\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  について補足する。  $\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t)$  は時刻  $t-1$  までに行使された権利数を表すが、ここでの行使の有無の判定は  $(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s)$  の権利数をもつオプションに対してではなく、 $(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1)$  ならびに  $(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s)$  の権利を持つオプションに対して行われる。 $\hat{\xi}_{(\check{l}_b, \check{l}_d, \check{l}_s - 1, t)} = 1$  のとき  $\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t+1) = \epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t) + (1, 0, 0)$  を満たし、 $\hat{\xi}_{(\check{l}_b - 1, \check{l}_d, \check{l}_s, t)} = -1$  のとき  $\epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t+1) = \epsilon_{(l_b, l_d, l_s)}^{[\tau, \xi]}(t) + (0, 0, 1)$  を満たす。