数理解析研究所講究録
第 1675 巻 2010 年 37-41

Bühlmann の価格原理の多期間への拡張

広島大学・大学院理学研究科　井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science
Hiroshima University

1　均衡

Bühlmann [1] は, 1 期間の交換経済の設定において, Arrow–Debreu 均衡と Borch による Pareto 効率性の特徴付けを指数効用関数に適用し, 彼の価格原理を導いた. それは特別な場合に, Esscher 変換になる. 我々は, この Bühlmann [1] の価格原理を多期間の交換経済の設定に拡張する.

$\mathbb{T} := \{1, \ldots, T\}$ とし, $t = 1, \ldots, T$ に対して $\mathbb{T}_t := \{t, \ldots, T\}$ とおく. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{T}\cup\{0\}}, P)$ をフィルター付けされた確率空間とする. $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ と $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$ を仮定する. ここでは, 簡単のため金利は 0 とするが, そうでない場合への拡張は容易である. 次のようにおく:

$$L^1 := L^1(\Omega, \mathscr{F}_T, P), \qquad L^1_t := L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, P).$$

$\mathbb{I} := \{1, 2, \ldots, N\}$ を今考える経済主体のクラスとする. 経済主体 $i \in \mathbb{I}$ の時間 $t \in \mathbb{T}$ における選好は, 効用関数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto u_{i,t}(x) \in \mathbb{R}$ により記述されるとする. 以下, $u_{i,t}(x)$ は, 次の**指数効用関数**であると仮定する:

$$u_{i,t}(x) = \frac{1 - e^{-\alpha_{i,t}x}}{\alpha_{i,t}}, \qquad \alpha_{i,t} \in (0, \infty), \qquad i \in \mathbb{I},\ t \in \mathbb{T}. \tag{1.1}$$

$\mathscr{X}$ は次の二つの条件を満たす $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の確率変数 X のクラスとする:

(X1) $X \in L^1$.

(X2) X は下に有界.

すなわち, $\mathscr{X} := \{X \in L^1 : X \text{ は下に有界}\}$. また, $t \in \mathbb{T}$ に対して次のようにおく:

$$\mathscr{X}_t := \{X \in \mathscr{X} : X \text{ は } \mathscr{F}_t\text{-可測}\} = \mathscr{X} \cap L^1_t.$$

(例えば, 保険会社等の) 経済主体 $i \in \mathbb{I}$ は, 最初, $\xi_{i,s} \in \mathscr{X}_s$, $s \in \mathbb{T}$, を満たす (例えば保険金支払いのような) 不確実なキャッシュ・フロー $(\xi_{i,s})_{\in\mathbb{T}}$ を持つとする. ただし, 我々は (負債ベースではなく) 資産ベースで考える. 従って, $\xi_{i,s}$ は資産である. $t-1$ において, 各経済主体 i は $(\xi_{i,s})_{t\in\mathbb{T}_t}$ を別のキャッシュ・フロー $(X_{i,s})_{s\in\mathbb{T}_t}$ に交換し, $\sum_{s\in\mathbb{T}_t} E[u_{i,s}(X_{i,s})|\mathscr{F}_{t-1}]$ で記述される自己の効用を増加させたい. ただし, 当然ながら, そのリスク交換には予算上の制約条件がある. 我々は, 時間 t におけるその予算の制約条件は, 次の線形価格ルールから決まるとする:

$$Y \text{ の時間 } t \text{ における価格} = E^{\varphi}[Y|\mathscr{F}_t].$$

ここで, φ は次の $\mathscr{P}$ のある元である:

$$\mathscr{P} := \{\varphi \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_T, P) : \varphi > 0 \ \text{ a.s},\ E[\varphi] = 1\}.$$

また,

$$E^{\varphi}[Y|\mathscr{F}_t] := \frac{E[\varphi Y|\mathscr{F}_t]}{E[\varphi|\mathscr{F}_t]}$$

とする. 我々は, φ を **正規化された価格密度**とよぶ.

$W \in \mathscr{X}$ と $t \in \mathbb{T}$ に対し, 次のようにおく:

$$\mathscr{A}_t(W) := \left\{ (Y_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t} : \begin{array}{l} \text{すべての } (i,s) \in \mathbb{I}\times\mathbb{T}_t \text{ に対し } Y_{i,s} \in L_s^0, \\ \sum_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t} Y_{i,s} = W. \end{array} \right\}$$

ここで L_s^0 は $\mathscr{F}_s$-可測な確率変数のクラスである. $\mathscr{A}_t(W)$ を W の期間 $[t,T]$ での**異時点間リスク配分**のクラスとよぶ. $Y_{i,s}$ は, 経済主体 i に対し時間 s に入ってくる資産を表す. ここで, $Y_{i,s} \in L_s^0$ より, $Y_{i,s}$ は $\mathscr{F}_s$-可測であることを注意せよ. それはまた例えば $\mathscr{F}_{s+1}$-可測でもあるから, $(Y_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t} \in \mathscr{A}_t(W)$ の $(Y_{i,s}, Y_{i,s+1})$ の部分を $(0, Y_{i,s}+Y_{i,s+1})$ に変えても, 再び $\mathscr{A}_t(W)$ に入ることが分かる.

$(\xi_{i,s})_{s\in\mathbb{T}}$ は, 経済主体 i の初期のキャッシュ・フローであることを思い出そう. 我々は,

$$W_t := \sum_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t} \xi_{i,s}, \qquad t \in \mathbb{T}$$

とおく (つまり時間 t 以降の総リスクである). $\varphi \in \mathscr{P}$, $i \in \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{T}$ に対し, 次のようにおく:

$$B_{i,t-1}(\varphi) := \left\{ (Y_s)_{s\in\mathbb{T}_t} : \begin{array}{l} Y_s \in \mathscr{X}_s, \ s \in \mathbb{T}_t, \\ E^{\varphi}\left[\sum_{s\in\mathbb{T}_t} Y_s \middle| \mathscr{F}_{t-1}\right] \le E^{\varphi}\left[\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \xi_{i,s} \middle| \mathscr{F}_{t-1}\right] \end{array} \right\}.$$

次が我々の多期間における均衡の定義である.

定義 1.1 $t \in \mathbb{T}$ に対し, 組 $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t}, \varphi) \in \mathscr{A}_t(W_t)\times\mathscr{P}$ が (時間 $t-1$ における) **(Arrow–Debreu) 均衡**であるとは次が成り立つことである:

(i) すべての $(i,s) \in \mathbb{I}\times\mathbb{T}_t$ に対し, $E^{\varphi}[|X_{i,s}|] < \infty$ および

$$E^{\varphi}\left[\sum_{s\in\mathbb{T}_t} X_{i,s} \middle| \mathscr{F}_{t-1}\right] = E^{\varphi}\left[\sum_{s\in\mathbb{T}_t} \xi_{i,s} \middle| \mathscr{F}_{t-1}\right]$$

が成り立つ.

(ii) すべての $i \in \mathbb{I}$ に対し, $X_i := (X_{i,s})_{s\in\mathbb{T}_t}$ は次の問題の解である:

$$\operatorname{ess\,sup}\left\{\sum_{s\in\mathbb{T}} E[u_{i,s}(Y_s)|\mathscr{F}_{t-1}] : (Y_s)_{s\in\mathbb{T}_t} \in B_{i,t-1}(\varphi)\right\}.$$

次は均衡の特徴付けである.

定理 1.2 $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t}, \varphi) \in \mathscr{A}_t(W_t)\times\mathscr{P}$ に対し, 次は同値である:

(a) $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t}, \varphi)$ は均衡である.

(b) $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t}, \varphi)$ は定義 1.1 (1) を満たし, またある $(c_i)_{i\in\mathbb{I}} \in (0,\infty)^N$ に対し, 次も満たす:

$$u'_{i,s}(X_{i,s}) = c_i E[\varphi|\mathscr{F}_s], \quad (i,s) \in \mathbb{I}\times\mathbb{T}_t.$$

ここで, $u'_{i,t}(x) := (du_{i,t}/dx)(x)$.

定理 1.2 より次が分かる: $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}},\varphi)\in\mathscr{A}_0(W)\times\mathscr{P}$ が時間 0 における均衡ならば, その t 以降の部分 $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}_t},\varphi)\in\mathscr{A}_t(W_t)\times\mathscr{P}$ も時間 $t-1$ における均衡である. このことは, 次 time-consistent な価格システム H_t, $t\in\mathbb{T}\cup\{0\}$, に自然な解釈を与える:

$$H_t[Z]:=E^{\varphi}[Z|\mathscr{F}_t],\qquad t=0,\dots,T.$$

ここで **time-consistency** とは, 次の性質である:

$$H_t[H_s[Z]]=H_s[Z],\qquad s\le t.$$

つまり, 我々は価格システム H_t, $t=0,\dots,T$, を初期均衡 $((X_{i,s})_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}},\varphi)$ により定義するけれども, 各 H_t は時間 t における均衡に基づいていると見なすことができる. この筋書きは, 一般の効用関数にも適用され, (ここで考えている) 指数効用に限定されるわけではない.

2 価格原理

我々は指数効用関数 (1.1) を考えていた. この場合, 次の結果が成り立つ.

定理 2.1 均衡 $((X_{i,t})_{(i,t)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}},\varphi)$ が一意に存在する. それは明示的に記述することができる.

ここでは, 定理 2.1 のうち均衡価格密度 φ のみを具体的に記述しよう. そのために, 少し準備をする. $t\in\mathbb{T}$ に対し, $a(t),b(t)\in(0,\infty)$ をそれぞれ次により定義する:

$$\frac{1}{a(t)}=\sum_{i\in\mathbb{I}}\frac{1}{\alpha_{i,t}},\qquad \frac{1}{b(t)}=\sum_{s=t}^{T}\frac{1}{a(s)}.\tag{2.1}$$

$W\in\mathscr{X}$ に対し, 適合過程 $(L_t(a,W))_{t\in\mathbb{T}}$ を次の後退漸化式により定義する:

$$\begin{cases} L_T(a,W):=\exp(-a(T)W),\\ L_{t-1}(a,W):=E[L_t(a,W)|\mathscr{F}_{t-1}]^{b(t-1)/b(t)},\quad t=2,\dots,T.\end{cases}$$

そして $(M_t(a,W))_{t\in\mathbb{T}}$ を次により定義する:

$$\begin{cases} M_t(a,W)=L_t(a,W)\cdot\prod_{s=1}^{t-1}L_s(a,W)^{-b(s+1)/a(s)},\quad t=2,\dots,T,\\ M_1(a,W)=L_1(a,W).\end{cases}$$

すると, 確率過程 $(M_s(a,W))_{s\in\mathbb{T}}$ は, 次を満たすマルチンゲールになる (cf. [2, 3]):

$$\prod_{t\in\mathbb{T}}M_t(a,W)^{1/a(t)}=\exp(-W).$$

次の定理は **Bühlmann の価格原理の多期間への拡張**である.

定理 2.2 $W:=\sum_{(i,s)\in\mathbb{I}\times\mathbb{T}}\xi_{(i,s)}$ とする. すると, 均衡価格密度 φ は次を満たす:

$$E[\varphi|\mathscr{F}_t]=\frac{M_t(a,W)}{E[M_1(a,W)]},\quad t\in\mathbb{T}.$$

特に,

$$\varphi=\frac{M_T(a,W)}{E[M_1(a,W)]}.\tag{2.2}$$

注意 2.3 1 期間の場合の Bühlmann の価格原理は次の形である (cf. [1]):

$$\varphi = \frac{e^{-aW}}{E[e^{-aW}]}, \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_N}.$$

3 Esscher 変換

次の二つの条件を仮定する:

(1) 経済主体 1 の所有する初期キャッシュ・フロー $(\xi_{1,t})_{t\in\mathbb{T}}$ と他の経済主体 $2,\ldots,N$ のそれらとは独立である.

(2) $(\mathscr{F}_t)$ は $(\xi_{i,s})$ により生成される, i.e., $\mathscr{F}_t = \sigma(\xi_{i,s}; i \in \mathbb{I},\ s \le t)$, $t \in \mathbb{T}$.

$(\mathscr{H}_t)$ を経済主体 1 の初期キャッシュ・フローのみにより生成されるフィルトレーションとする:

$$\mathscr{H}_t := \sigma(\xi_{1,s} : s \le t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad \mathscr{H}_0 := \{\emptyset, \Omega\}.$$

定理 3.1 $W_1 := \sum_{s\in\mathbb{T}} \xi_{1,s}$ とする. すると, $\mathscr{H}_T$-可測な $Y \in \mathscr{X}$ に対し, 次が成り立つ:

$$E^{\varphi}[Y|\mathscr{F}_t] = E^{P^*}[Y|\mathscr{H}_t], \qquad t = 0,\ldots,T. \tag{3.1}$$

ここで,

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{M_T(a,W_1)}{E[M_1(a,W_1)]} \quad \text{on } (\Omega, \mathscr{H}_T).$$

注意 3.2 Time-consistent な価格システムを定義する (3.1) の右辺は, **多期間版の Esscher 変換**とみなすことができる.

4 例

上の多期間版 Esscher 変換の例を与える. τ は被保険者の余命とする, i.e., 被保険者は時間 τ に死ぬ. $\tau > 0$ および $P(\tau = t) = 0$, $t \in [0,\infty)$, を仮定する. 次の生命保険契約を考える:

$$Z = -\sum_{s\in\mathbb{T}} z(s) 1_{(s-1<\tau\le s)} - z(T+1) 1_{(\tau>T)}. \tag{4.1}$$

ここで $z(s) \in (0,\infty)$. すなわち, この保険契約においては, 被保険者が時間 $\tau \in (s-1, s]$ に死亡すれば, 保険会社は被保険者に対し時間 s において保険金 $z(s)$ を支払う. また, 時間 T の時点で被保険者が生存していればやはり保険会社は被保険者に対し時間 T において $Z(T+1)$ を支払う. 我々は資産ベースで考えているので (4.1) の右辺のマイナスが必要である. 我々は, 経済主体 1 は保険会社を表すと考え, この Z を W_1 (経済主体 1 , すなわち保険会社, の総リスク) と見なす. フィルトレーション $(\mathscr{H}_t)$ として, 次を取る:

$$\mathscr{H}_t := \sigma(D_s : s \le t), \qquad D_t := 1_{(\tau\le t)}.$$

我々は上の保険契約の設定で Esscher 変換における次の測度 P^* を具体的に記述したい:

$$E^{\varphi}[Y|\mathscr{F}_t] = E^{P^*}[Y|\mathscr{H}_t], \tag{4.2}$$

$$\frac{dP^*}{dP} = \frac{M_T(a,Z)}{E[M_1(a,Z)]} \quad \text{on } (\Omega, \mathscr{H}_T).$$

この目的のためには, 次の条件付き期待値を考えるとよい:

$$q_t^* := P^*(\tau \le t+1 \mid \tau > t), \qquad t = 0,\dots,T-1,$$
$$p_t^* := 1 - q_t^* = P^*(\tau > t+1 \mid \tau > t), \qquad t = 0,\dots,T-1.$$

実際, P^* はこれらにより完全に記述される. 例えば, 次が成り立つ:

$$P^*(1 < \tau \le 2) = p_0^* p_1^* q_2^*, \qquad E^{P^*}[1_{(1<\tau\le 2)} | \mathscr{F}_1] = p_1^* q_2^* 1_{(1<\tau)}.$$

そこで, 我々は q_t^* と p_t^* を決定することにする.

$a(t)$, $b(t)$ を (2.1) から思い出そう. 次のようにおく:

$$q_t := P(\tau \le t+1 \mid \tau > t), \qquad t = 0,\dots,T-1,$$
$$p_t := 1 - q_t = P(\tau > t+1 \mid \tau > t), \qquad t = 0,\dots,T-1.$$

正の数列 $(h_t)_{t\in\mathbb{T}}$ を次の後退漸化式により定義する:

$$\begin{cases} h_T = e^{z(T+1)}, \\ h_{t-1} = \left[e^{b(t)z(t)} q_{t-1} + h_t^{b(t)} p_{t-1}\right]^{1/b(t)}, \quad t = 2.\dots,T. \end{cases}$$

次が欲しい結果である.

定理 4.1 $t \in \mathbb{T}$ に対し, 次が成り立つ:

$$q_{t-1}^* = \frac{e^{b(t)z(t)} q_{t-1}}{e^{b(t)z(t)} q_{t-1} + h_t^{b(t)} p_{t-1}}, \qquad p_{t-1}^* = \frac{h_t^{b(t)} p_{t-1}}{e^{b(t)z(t)} q_{t-1} + h_t^{b(t)} p_{t-1}}.$$

注意 4.2 古典的な Esscher 変換 $E[Ze^{-\alpha Z}]/E[e^{-\alpha Z}]$ を 1 期間の保険契約

$$Z = -z(1)1_{(0<\tau\le 1)} - z(2)1_{(1<\tau)}$$

に適用すると, 次の結果が得られる:

$$\frac{E[Ze^{-\alpha Z}]}{E[e^{-\alpha Z}]} = -\frac{e^{\alpha z(1)} q_0}{e^{\alpha z(1)} q_0 + e^{\alpha z(2)} p_0} z(1) - \frac{e^{\alpha z(2)} p_0}{e^{\alpha z(1)} q_0 + e^{\alpha z(2)} p_0} z(2)$$

(Z は資産ではなく負債であるので, その価格は負になる). 当然のことながら, この結果と定理 4.1 との間には類似性が見られる.

References

[1] H. Bühlmann, An economic premium principle, ASTIN Bulletin **11** (1980), 52–60.

[2] K. Fukuda, A. Inoue, and Y. Nakano, Optimal intertemporal risk allocation applied to insurance pricing, arXiv:0711.1143v3.

[3] K. Fukuda, A. Inoue, and Y. Nakano, Dynamic risk diversification and insurance premium principles, arXiv:0906.1632v1.