

Self-exciting 性をもつイベント発生強度モデルによる 社債ポートフォリオのリスク解析*

東京大学 情報理工学系研究科 山中 卓 (Suguru Yamanaka)

Graduate School of Information Science and Technology

University of Tokyo

東京大学 情報理工学系研究科 杉原 正顕 (Masaaki Sugihara)

Graduate School of Information Science and Technology

University of Tokyo

一橋大学 国際企業戦略研究科 中川 秀敏 (Hidetoshi Nakagawa)

Graduate School of International Corporate Strategy

Hitotsubashi University

1 はじめに

本稿では複数の社債ポートフォリオの信用リスクを同時に評価するための新しいモデルを提案する。提案モデルの枠組みは Giesecke et al. [1] や Nakagawa [4] で研究されている top-down アプローチに基づく。具体的には、経済全体の信用イベント発生強度を self-exciting 性をもつ確率過程でモデル化し、thinning によって部分ポートフォリオのイベント発生強度を特定する。提案モデルによって、信用リスクの伝播をとらえた上で、複数のポートフォリオ・クレジット・デリバティブのリスク解析を同時に行うことができる。

Top-down アプローチは、ポートフォリオのデフォルト・リスクのモデル化の方法として Giesecke et al.[1] によって提案された。Top-down アプローチでは、ポートフォリオを構成する個々の企業のデフォルト発生モデルを直接は行わず、ポートフォリオ全体からのデフォルト発生をデフォルト強度過程を用いてモデル化し、ポートフォリオ内の個々の企業のデフォルト強度は thinning という方法によって与える。強度過程の具体的なモデルとして Giesecke et al.[1] は self-exciting 性（デフォルト発生時点でジャンプする性質）をもつ確率過程を考えている。Giesecke et al. [1] の枠組みを用いて、ポートフォリオ・クレジット・デリバティブのリスク解析や価格付けを行った研究として、債務担保証券 (collateralized debt obligation, CDO) のリスク解析を行った Giesecke and Kim[2] が挙げられる。Giesecke et al. [1] や Giesecke and Kim [2] がデフォルト発生にのみ注目したのに対し、デフォルト発生だけでなく信用格付の変更のモデル化も行った研究に、中

*本稿は Yamanaka et al. [7] の簡略版である。本研究は文部科学省グローバルCOEプログラム「数学新展開の研究教育拠点」の支援を受けた。

川 [3] や Nakagawa[4] がある。中川 [3] は格付変更（格上げ，格下げ）とデフォルト発生を self-exciting 性強度によってモデル化した。Nakagawa [4] は self-exciting 性だけでなく mutually exciting 性をもつ強度モデルを提案している。さらに，中川 [3] や Nakagawa[4] はマルチ・ダウングレード・プロテクションというクレジット・デリバティブの価格評価を行っている。

本稿では，ポートフォリオ・クレジット・デリバティブのリスク解析を行うための，信用イベント発生強度モデルおよび thinning のモデルを提案する。本稿では，経済全体の信用イベント発生を state-dependent 性をもつ self-exciting 性強度過程でモデル化し，ポートフォリオの強度はポートフォリオの信用力，すなわちポートフォリオ内の各格付の企業の割合に依存した thinning によって得られるとする。経済全体のイベント発生を self-exciting 性強度過程でモデル化することによって，複数の社債ポートフォリオ間の信用リスクの伝播をとらえることができる。また複数の CDO のリスク解析を行うことができる。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では，モデルの定式化を行う。第3節では，シミュレーションアルゴリズムの概要を述べる。第4節では，CDO と CDO-squared のリスク解析を行った数値実験の結果を紹介する。第5節でまとめを述べる。

2 モデル

2.1 経済全体の信用イベント発生強度

経済全体の企業の集合を S^* で表すことにする。各企業は経済全体の部分ポートフォリオ S_i ($i = 1, 2, \dots, I$) のいずれかに属するとする。また，各企業には信用格付が付与されているとする。格付は $1, 2, \dots, K$ および $K + 1$ で表すことにする。ただし，格付 $\rho = 1$ は最も信用力の高い格付に対応し，順に格付が低くなり， $\rho = K$ が最も信用力の低い格付で， $\rho = K + 1$ がデフォルト状態に対応するものとする。 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ をフィルトレーション付完備確率空間とする。 $\{\mathcal{F}_t\}$ は右連続性と完備性を満たすとする。 $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ で信用イベントのタイプを表す。本稿では簡潔に $L = 3$ とし，イベント1が格上げ，イベント2が格下げ，イベント3がデフォルトに対応するとする。各 l について， $0 < T_1^l < T_2^l < \dots$ をイベント l の発生時刻列を表す $\{\mathcal{F}_t\}$ -適当な点過程とする。ただし， $T_n^l < \infty$ a.s. $\forall n \in \mathbb{N}$ とする。また，異なるイベントが同時刻に起こることはないとする。デフォルトした企業は消滅し，企業が新たに誕生することはないとする。イベント l の計数過程を $N_t^l = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n^l \leq t\}}$ で表し，各 N_t^l は強度 λ_t^l を持つとする[†]。本稿では λ_t^l

[†] λ_t^l は非負の $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測過程で， $N_t^l - \int_0^t \lambda_s^l ds$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -マルチンゲールになるものである。本稿では $\int_0^t \lambda_s^l ds < \infty, \forall t > 0$ a.s. を仮定する。

として、次の確率過程を考える：

$$d\lambda_t^l = \kappa_t^l(c_t^l - \lambda_t^l)dt + dJ_t^l, \quad (2.1)$$

$$J_t^l = \sum_{n \geq 1} (\min(\delta^l \lambda_{T_n^l-}^l, \gamma^l) \mathbf{1}_{\{T_n^l \leq t\}}), \quad (2.2)$$

$$\kappa_t^l = \kappa^l \lambda_{T_{N_t^l}^l}, \quad c_t^l = c^l \lambda_{T_{N_t^l}^l}. \quad (2.3)$$

ただし $\kappa^l > 0$, $c^l \in (0, 1)$, $\delta^l > 0$, $\gamma^l \geq 0$, $\lambda_0^l > 0$ とする[‡].

図1は強度モデル(2.1) – (2.3)のサンプル・パスである。イベント発生時刻では強度の値がジャンプし (self-exciting 性), イベント時刻の間では強度自身の値に依存して動くことが分かる (state-dependent 性)[§]。図2は格上げ件数の実データと、そのデータに対

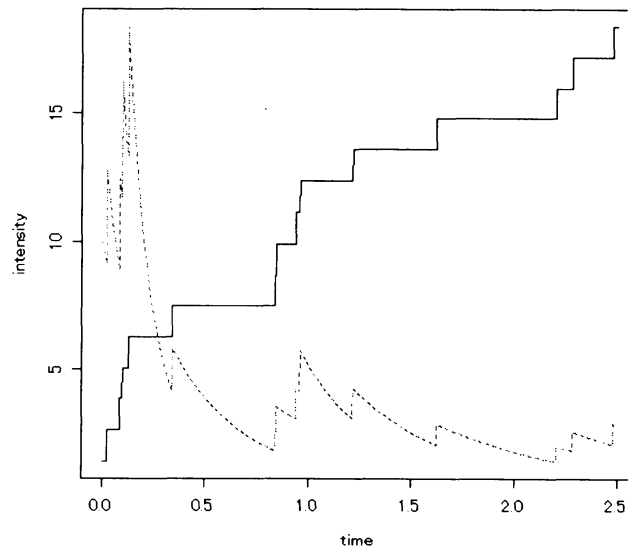


図1: 強度モデル(2.1) – (2.3)のサンプルパスと累積イベント件数。(実線が累積イベント件数, 破線がイベント強度. モデルのパラメタは $\kappa = 0.5$, $c = 0.1$, $\delta = 0.4$, $\gamma = 50.0$, $\lambda_0 = 10.0$.)

して推定した格上げ強度モデルの実現パスを重ねたものである。格上げの発生頻度と格上げ強度が相重なって高くなっており, self-exciting 性をもつ強度モデルによる格付変更のモデル化の有用性が示唆される[¶]。

[‡]本強度モデルはジャンプ幅に上限があるという点で Giesecke and Kim [2] のデフォルト強度モデルと異なる。

[§]イベント発生の合間 $T_n^l \leq t < T_{n+1}^l$ において, 強度(2.1) – (2.3) は次のようになる:

$$\lambda_t^l = c^l \lambda_{T_n^l}^l + (1 - c^l) \lambda_{T_n^l}^l \exp(-\kappa^l \lambda_{T_n^l}^l (t - T_n^l)).$$

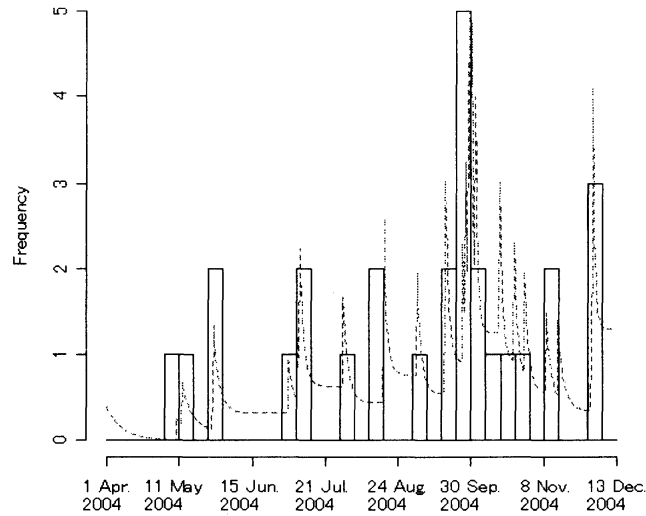


図 2: 格上げ件数の推移と格上げ強度モデルの実現パス。(格付は R&I の発行体格付, パラメタは格上げ時刻データに関する最尤推定.)

2.2 Thinning

本小節では部分ポートフォリオの格付分布に基づいた thinning によって, 部分ポートフォリオのイベント強度を得る. Thinning を行うために, 時刻 t において格上げ (格下げ) が起こったときにそれがポートフォリオ S_i 内の格付 ρ の企業の m 段階の格上げ (格下げ) である条件付き確率を表す確率変数 $Z_t^{(i,1)}(\rho, m)$, $Z_t^{(i,2)}(\rho, m)$, および時刻 t にデフォルトが発生した場合にそれがポートフォリオ S_i 内の格付 ρ の企業のデフォルトである条件付き確率を意味する確率変数 $Z_t^{(i,3)}(\rho)$ を考える[¶]. 具体的には, $Z_t^{(i,1)}(\rho, m)$, $Z_t^{(i,2)}(\rho, m)$ および $Z_t^{(i,3)}(\rho)$ として, 次のようなポートフォリオ内の格付分布に基づいたものを考える

[¶]中川 [5] は self-exciting 性強度モデルの拡張である mutually exciting 性強度モデルを用いて, 日本の格付変更に関する self-exciting 性があることを示す結果を得ている.

^{||}Giesecke et al. [1] の命題から, たとえば, $Z_t^{(i,3)}(\rho)$ は次のように定義される:

$$Z_t^{(i,3)}(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_t^{(i,3)}(\rho, \varepsilon),$$

$$Z_t^{(i,3)}(\rho, \varepsilon) = \sum_n \frac{P[\{T_n^3 \in \tau^3(S_i)\} \cap \{T_n^3 \in \tau^3(\rho)\} \cap \{T_n^3 \leq t + \varepsilon\} | \mathcal{F}_t]}{P[T_n^3 \leq t + \varepsilon | \mathcal{F}_t]} \mathbf{1}_{\{T_{n-1}^3 < t \leq T_n^3\}}.$$

ただし, $\tau^3(S_i)$ はポートフォリオ S_i で起こったデフォルト発生時刻の集合を表し, $\tau^3(\rho)$ は格付 ρ の企業のデフォルト発生時刻の集合を表す. $Z_t^{(i,l)}(\rho, m)$ ($l = 1, 2$) も同様に定められる.

ことにする：

$$Z_t^{(i,1)}(\rho, m) = \frac{X_t^{(i)}(\rho)}{\sum_{\rho=1+m}^K X_t^*(\rho)} z_m^1 \mathbf{1}_{\{\sum_{\rho=1+m}^K X_t^*(\rho) > 0\}} \quad (\rho = 1+m, 2+m, \dots, K), \quad (2.4)$$

$$Z_t^{(i,2)}(\rho, m) = \frac{X_t^{(i)}(\rho)}{\sum_{\rho=1}^{K-m} X_t^*(\rho)} z_m^2 \mathbf{1}_{\{\sum_{\rho=1}^{K-m} X_t^*(\rho) > 0\}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, K-m), \quad (2.5)$$

$$Z_t^{(i,3)}(\rho) = \frac{X_t^{(i)}(\rho)}{X_t^*(\rho)} z_\rho \mathbf{1}_{\{X_t^*(\rho) > 0\}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, K). \quad (2.6)$$

ただし、 $X_t^*(\rho)$ は時刻 t における格付 ρ の企業数であり、 $X_t^{(i)}(\rho)$ は時刻 t におけるポートフォリオ S_i 内の格付 ρ の企業数を表す。また、 $z_m^l (l = 1, 2, m = 1, 2, \dots, K-1)$ は格付変更が起こった場合にそれが m 段階の格付変更である条件付き確率を意味する定数で、 $0 \leq z_m^l \leq 1 (l = 1, 2)$ および $\sum_{m=1}^{K-1} z_m^l = 1$ を満たす。定数 z_ρ は、デフォルトが発生した時にそれが格付 ρ の企業のデフォルトである条件付き確率を表し、 $0 \leq z_\rho \leq 1 (\rho = 1, 2, \dots, K)$ および $\sum_{\rho=1}^K z_\rho = 1$ を満たすとする。

$N_t^{(i,1)}(\rho, m)$ ($N_t^{(i,2)}(\rho, m)$) をポートフォリオ S_i 内の格付 ρ の企業の m 段階の格上げ (格下げ) 計数過程とし、 $N_t^{(i,3)}(\rho)$ ポートフォリオ S_i 内の格付 ρ の企業のデフォルト計数過程とする。このとき、 $Z_t^{(i,1)}(\rho, m)$, $Z_t^{(i,2)}(\rho, m)$, $Z_t^{(i,3)}(\rho)$ を用いて $N_t^{(i,1)}(\rho, m)$, $N_t^{(i,2)}(\rho, m)$, $N_t^{(i,3)}(\rho)$ の強度は次のように与えられる：

$$\lambda_t^{(i,1)}(\rho, m) = Z_t^{(i,1)}(\rho, m) \lambda_t^1, \quad (2.7)$$

$$\lambda_t^{(i,2)}(\rho, m) = Z_t^{(i,2)}(\rho, m) \lambda_t^2, \quad (2.8)$$

$$\lambda_t^{(i,3)}(\rho) = Z_t^{(i,3)}(\rho) \lambda_t^3. \quad (2.9)$$

3 シミュレーション・アルゴリズム

本節では第2節のモデルに基づく信用イベント発生シミュレーション・アルゴリズムの概略を述べる。ステップ2, 3はOgata [6]のアルゴリズムに基づく。

[0, H] 上のイベント発生時刻を生成するアルゴリズム

1. [モデルのパラメータおよび初期値を設定する]

- モデルのパラメータ: $(\kappa^l, c^l, \delta^l, \gamma^l, \lambda_0^l) (l = 1, 2, 3)$, $z_m^l (l = 1, 2, m = 1, 2, \dots, K-1)$, $z_\rho (\rho = 1, 2, \dots, K)$. 現時刻: $S = 0$, シミュレーションの満期: $H (> 0)$, ポートフォリオ内の企業数: $X_T^{(i)}(\rho) = X_0^{(i)}(\rho) (i = 1, 2, \dots, I, \rho = 1, 2, \dots, K)$, イベント l の発生件数: $N^l = 0 (l = 1, 2, 3)$,

イベント l の最終発生時刻: $T_{N^l}^l = 0$ ($l = 1, 2, 3$).

2. [イベント発生時刻の候補 T を生成する.]

- $\Lambda = \sum_{l=1}^3 \lambda_S^l$ として, 指数分布に従う乱数 $\varepsilon \sim \exp(\Lambda)$ を発生させる.
- $T = S + \varepsilon$ とする. $T > H$ であれば アルゴリズムを終了する.

3. [イベント時刻候補 T を採択するか棄却するかを決定する]

- λ_T^l / Λ の確率で時刻 T をイベント l の発生時刻として採択する. いずれのイベント時刻としても採択されなければ, ステップ 5 に行く.

4. [Thinning]

- 採択されたイベントタイプ l について, (2.4),(2.5),(2.6) の確率で, イベントの詳細 (イベントがどのポートフォリオの何格から発生したか, 何段階の格付変更か) を決める. 特定されたイベントに従って, $X_T^{(i)}(\rho)$, N^l , $T_{N^l}^l$ を更新する.

5. $S = T$ として, ステップ 2 に行く.

4 数値例

本節では, 提案モデルを用いて行った CDO および CDO-squared のリスク解析に関する数値例の結果の一部を紹介する.

提案モデルでは複数のポートフォリオを同時に扱えるので, 異なる CDO 間の損失の関係を分析することができる. ここでは, 経済全体の企業 (社債) を 3 つのポートフォリオに分け, それぞれのポートフォリオを参照ポートフォリオとする CDO (CDO No.1, No.2 and No.3) を考える. 図 3 および表 1 は, CDO No.3 のジュニアメザニンの損失が 90% 以下と 90% 以上の場合の CDO No.2 のジュニアメザニンの条件付き損失分布関数とリスク尺度をそれぞれ示している. CDO No.3 の損失が大きいほど, CDO No.2 の損失も大きくなることを確認できる. このような信用リスクの伝播は経済全体のイベント発生強度が self-exciting 性をもつことによる. すなわち, 参照ポートフォリオ内での信用イベントの発生が経済全体の信用イベント発生の可能性を高め, その結果, 他のポートフォリオ内でのイベント発生の可能性を高めていることによる. また, 提案モデルを用いて CDO-squared のリスク評価も容易に行うことができる. ここでは, CDO No.1, 2, 3 のジュニアメザニンからなる参照ポートフォリオをもつ CDO-squared のリスク解析も行った. 図 4 は CDO-squared のトランシェの損失率分布関数である.

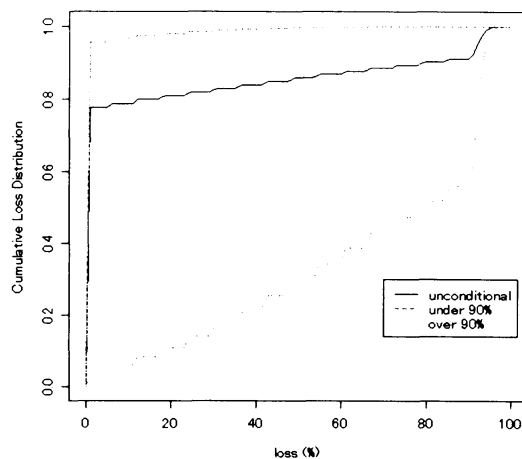


図 3: CDO No.3 の損失の CDO No.2 の損失への影響 (CDO No.2 のジュニアメザニンの条件付損失率分布関数)

表 1: CDO No.3 の損失の CDO No.2 の損失への影響 (CDO No.2 のジュニアメザニンのリスク尺度)

	平均損失率	99% VaR	99% ES	最大損失率
無条件	13.81%	93.96%	94.65%	97.26%
90% 未満	0.97%	30.22%	46.85%	90.87%
90% 以上	66.59%	95.11%	95.59%	97.26%

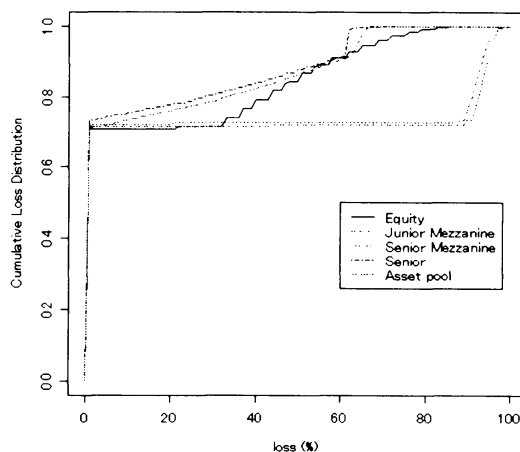


図 4: CDO-squared のトランシェの損失率分布関数

5 まとめ

Top-down アプローチに基づいて複数の社債ポートフォリオの信用リスクを評価するモデルを提案した。具体的には、経済全体からの信用イベントの発生を self-exciting 性をもつ強度モデルを用いてモデル化し、部分ポートフォリオのイベント発生強度は、ポートフォリオ内の格付分布に依存した thinning によって与えた。モデルに基づく信用イベント発生シミュレーションアルゴリズムの概要を述べ、CDO および CDO-squared のリスク解析に関する数値例の結果をいくつか紹介した。提案モデルは複数の社債ポートフォリオを同時に扱うことが容易に可能であり、また信用リスクの伝播をとらえているので、ポートフォリオ・クレジット・デリバティブのリスク解析に有用であると考えられる。

参考文献

- [1] K. Giesecke, L. R. Goldberg, X. Ding: A Top-down Approach to Multi-Name Credit. *Working paper* (2005), Stanford University.
(<http://www.stanford.edu/dept/MSandE/cgi-bin/people/faculty/giesecke/giesecke.php>).
- [2] K. Giesecke and B. Kim: Risk Analysis of Collateralized Debt Obligations. *Working paper* (2009), Stanford University.
(<http://www.stanford.edu/dept/MSandE/cgi-bin/people/faculty/giesecke/giesecke.php>).
- [3] 中川 秀敏: トップダウン・アプローチによるマルチ・ダウングレード・プロテクションの評価. MTEC ジャーナル特別号 (2008), pp. 451–481.
- [4] H. Nakagawa: Modeling of Contagious Downgrades and Its Application to Multi-Downgrade Protection. *Working paper* (2009), Hitotsubashi University.
(<https://sites.google.com/site/icsnakagawah/working-papers-tesuto-ban>).
- [5] 中川 秀敏: 相互作用型の格付変更強度モデルによる格付変更履歴データの分析. *Working paper* (2009), 一橋大学.
(<https://sites.google.com/site/icsnakagawah/working-papers-tesuto-ban>).
- [6] Y. Ogata: On Lewis' Simulation Method for Point Processes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-27 (1981), pp. 23–31.
- [7] S. Yamanaka, M. Sugihara and H. Nakagawa: Modeling of Contagious Credit Events and Risk Analysis of Collateralized Debt Obligations. *Working paper* (2010).
(<http://www.sr3.t.u-tokyo.ac.jp/~yamanaka/working-papers>)