数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 20-26

関孝和の交式、斜乗

竹之内 脩

関孝和は、『解伏題之法』において、多元の方程式についての消去の議論をしている。

◆ 3 次の場合

三式	二式	一式
壬	己	丙
辛	戊	乙
庚	丁	甲

相壬 乘乙 丁 **生**	相己 乘辛 甲 **生**	相丙 乘戊 庚 **生**
○	○	○
三 辛丁乙	二 辛戊甲	一 庚戊乙
六 庚丁乙	五 辛丁甲	四 庚戊甲

相壬 乘戊 甲 **剋**	相己 乘乙 庚 **剋**	相丙 乘辛 丁 **剋**
○	○	○
二 辛戊甲	一 庚戊乙	三 辛丁乙
四 庚戊甲	六 庚丁乙	五 辛丁甲

◆ 4 次の場合

4 次の場合も、同じように、まずデータの図を与える。

四式	三式	二式	一式
婁	危	斗	房
奎	虚	箕	低
壁	女	尾	亢
室	牛	心	角

そして、三次の場合と同様の消去した表を与える。

相尾婁 乗角虚 生	相亢危 乗室箕 尅	相壁斗 乗牛[底] 生	相女房 乗心奎 尅
○	○	○	○
二十四 奎虚尾角	二十三 室虚箕亢	二十二 壁牛箕[底]	二十一 奎女心[底]
六 壁虚尾角	五 室女箕亢	八 壁牛尾[底]	七 奎女心亢
二十八 室虚尾角	二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心[底]	二十五 奎女心角

相尾婁 乗牛[底] 尅	相亢危 乗心奎 生	相壁斗 乗角虚 尅	相女房 乗室箕 生
○	○	○	○
四 奎牛尾[底]	三 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕[底]
八 壁牛尾[底]	七 奎女心亢	六 壁虚尾角	五 室女箕亢
十二 室牛尾[底]	十一 奎牛心亢	十 壁虚心角	九 室女箕角

相女婁 乗角箕 尅	相尾危 乗室[底] 生	相亢斗 乗牛奎 尅	相壁房 乗心虚 生
○	○	○	○
三十二 奎女箕角	三十一 室虚尾[底]	三十 奎牛箕亢	二十九 壁虚心[底]
十五 壁女箕角	十四 室女尾[底]	十三 奎牛尾亢	十六 壁虚心亢
九 室女箕角	十二 室牛尾[底]	十一 奎牛心亢	十 壁虚心角

相亢婁 乗心虚 尅	相壁危 乗角箕 生	相女斗 乗室[底] 尅	相尾房 乗牛奎 生
○	○	○	○
三 奎虚心亢	二 壁虚箕角	一 室女箕[底]	四 奎牛尾[底]
十六 壁虚心亢	十五 壁女箕角	十四 室女尾[底]	十三 奎牛尾亢
二十 室虚心亢	十九 壁牛箕角	十八 室女心[底]	十七 奎牛尾角

相女婁 乗心[底] 生	相尾危 乗角奎 尅	相亢斗 乗室虚 生	相壁房 乗牛箕 尅
○	○	○	○
二十一 奎女心[底]	二十四 奎虚尾角	二十三 室虚箕亢	二十二 壁牛箕[底]
三十六 壁女心[底]	三十五 奎女尾角	三十四 室虚尾亢	三十三 壁牛箕亢
十八 室女心[底]	十七 奎牛尾角	二十 室虚心亢	十九 壁牛箕角

相亢婁 乗牛箕 生	相壁危 乗心[底] 尅	相女斗 乗角奎 生	相尾房 乗室虚 尅
○	○	○	○
三十 奎牛箕亢	二十九 壁虚心[底]	三十二 奎女箕角	三十一 室虚尾[底]
三十三 壁牛箕亢	三十六 壁女心[底]	三十五 奎女尾角	三十四 室虚尾亢
二十七 室牛箕亢	二十六 壁牛心[底]	二十五 奎女心角	二十八 室虚尾角

交式、斜乗　この表にしたがって各項を掛け、生尅をつけて加えるのだが、掛ける数が多くて見やすくないから、次の交式、斜乗の方式を使う、といって、次のやり方を示す。

右各逐式交乗して、正尅を得たる也。しかりと雖も、相乗の数、位繁多にして見やすからず。故に、交式、斜乗を以って、之にかえる。

交式

換三式より換四式を起こし、換四式より換五式を起こし、逐って此(かく)の如くす。○順逆共に遁(すす)めて一を添えて、次を得る。乃(すなわ)ち、式数奇なるものは皆順、偶なるものは順逆相交わる也。

換三式

順	順	順
一	二	三

換四式

順	逆	順	逆
一	二	三	四
一	三	四	二
一	四	二	三

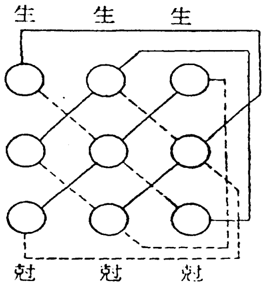
換五式

一	二	三	四	五
一	二	三	五	四
一	四	五	二	三
一	五	四	三	二
一	二	四	五	三
一	四	三	二	五
一	五	二	三	四
一	三	五	四	二
一	三	五	二	四
一	五	二	四	三
一	三	四	二	五
一	四	三	五	二

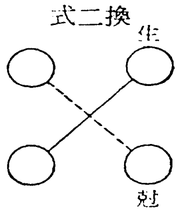
斜乘

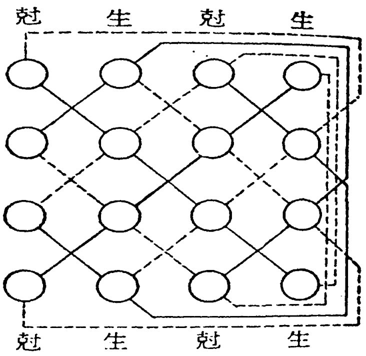
交式、各之を布きて、左右の斜乘により正尅を得る也。換式数奇なるものは、左斜乘を以って正となし、右斜乘を以って尅となす。偶なるものは、左斜乘、右斜乘共に正尅相交わる也。

式三換

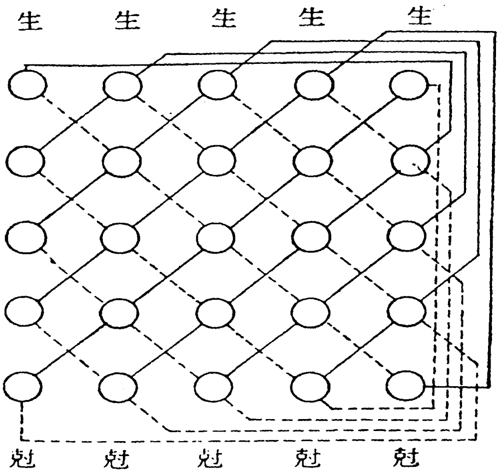


式二換





式五換



[関の意図とあやまり]

関の意図を忖度するに、関は、もとの式が何次のものであっても、この交式、斜乗の方式でやれば、結果を得ることができることを主張したかったのであろう。そして、5 次の場合には、ともかくも、このようにやればよい、とい方式はできた。そこで、これを 6 次の場合にやるとして、どのようにやればよいか。ところが、これがうまくいかないのである。6 次の場合の交式をどのように作ればよいのか。

また、関の述べた方法は、5 次の場合には、斜乗における符号のつけ方、交式における式の配列の仕方もともに、そもそもあやまりであって、この方式でやると、結果は 0 になってしまうのである。

関は、おそらく 5 次の場合のあやまりについては、気がついていたことであろう。そして、これを改良するためにあれやこれや考えているうちに、田中由実や井関知辰による小行列式展開の方法が発表されて、この方式ならば順次やっていけることがわかり、『大成算径』では、交式斜乗の方法を捨てて、小行列式展開の方法を採用したものと考えられる。

関の交式斜乗の方法については、その後、何人かの人が改良を試みているのであるが、関にしろ、その人たちにしろ、これによって何をしようとしていたのであろうか。

関がはじめに目指したように、変数の消去が目的であったのならば、はじめの符号のあやまりなどは当然気がついていなければならない。

そこで、単に、交式斜乗という形式的処理にだけ興味をもって、それを consistent な形で拡張しようと考えたと思われる。

行列式という見地では、理論の整合性が出てくるが、この和算における一連の業績では、そのような形の評価を与えることはできない。

交式の作り方と符号

交式をシステマティックに作っていくためには、n = 4 の場合が基本になる。

1234, 1342, 1423

関は、この交式の作り方について、

> 換三式より換四式を起こし、換四式より換五式を起こし、逐って此(かく)の如くす。○順逆共に逓(すす)めて一を添えて、次を得る。乃(すなわ)ち、式数奇なるものは皆順、偶なるものは順逆相交わる也。

と書いているのであるが、これは、n = 3，4 の場合から類推して、一般のとき、このようにやっていけばよい、と述べたものと思われる。しかし、事はそのように簡単ではない。

n = 5 の場合を考えてみると、

1234, 1342, 1423

から、各数を 1 ずつ進めて、それに頭に 1 をつけて、

12345, 12453, 12534

とするまではよいが、式の数は全部で 12 必要で、それをこれからどう作るのか、符号をどうするかが、大きな問題である。

松永良弼による交式の作り方

松永良弼は、

松永良弼『解伏題交式斜乗之諺解』(1715)

において、

1 2 3 4 5 ⟶ 1 3 4 5 2 ⟶ 1 4 5 2 3 ⟶ 1 5 2 3 4
1 2 4 5 3 ⟶ 1 4 5 3 2 ⟶ 1 5 3 2 4 ⟶ 1 3 2 4 5
1 2 5 3 4 ⟶ 1 5 3 4 2 ⟶ 1 3 4 2 5 ⟶ 1 4 2 5 3

とすることを与えている。これは、2 番目の数字を次々 1 番後ろに廻す、ということによって作っていくので、この方針でやれば、何次になっても、続けていくことができる。 いくつ後ろに廻すか。この場合は奇数個なので、+，−，+，− と符号を変えていけば、

+12345	−13452	+14523	−15234
+12453	−14532	+15324	−13245
+12534	−15342	+13425	−14253

が得られる。

n = 6 の場合には、

+123456	+134562	+145623	+156234	+162345
+124536	+145362	+153624	+136245	+162453
+125346	+153462	+134625	+146253	+162534
−134526	−145263	−152634	−126345	−163452
−145326	−153264	−132645	−126453	−164532
−153426	−134265	−142653	−126534	−165342
+145236	+152364	+123645	+136452	+164523
+153246	+132465	+124653	+146532	+165324
+134256	+142563	+125634	+156342	+163425
−152346	−123465	−134652	−146523	−165234
−132456	−124563	−145632	−156324	−163245
−142536	−125364	−153642	−136425	−164253

この方式によって、この後、何次の式であっても、整然と交式をつくっていくことができる。

斜乗の符号

斜乗の符号については、行列式の議論からは、次のようになる。

左斜乗

◇n＝4 のとき　基本の順列 1234 に対して、2 項目の順列 2341 は奇順列であるから、符号は－ となるので、項の符号は＋－＋－ となる。

◇n＝5 のとき　基本の順列 12345 に対して、2 項目の順列 23451 は偶順列であるから、符号は＋ となるので、項の符号は＋＋＋＋＋　となる。

以後、このパターンが繰り返されていく。

右斜乗

◇n＝4 のとき　基本の順列 4321 は、偶順列。これに対して、2 項目の順列 3214 は奇順列であるから、符号は－ となる。したがって、項の符号は＋－＋－ となる。

◇n＝5 のとき　基本の順列 54321 は偶順列で、符号は＋。2 項目の順列 43215 は偶順列であるから、符号は＋ である。したがって、以下項の符号は＋＋＋＋＋　となる。（ここが関の大きなあやまり）

◇n＝6 のとき　基本の順列 654321 は奇順列で、符号は－。2 項目の順列 543216 は偶順列であるから、符号は＋ となるので、項の符号は－＋－＋－＋ となる。

◇n＝7 のとき　基本の順列 7654321 は奇順列で、符号は－。2 項目の順列 6543217 も奇順列であるから、符号は－ である。したがって、項の符号は－－－－－－－　となる。

以後、このパターンが繰り返されていく。すなわち、右斜乗の符号は、4 を周期として、変化する。

菅野 元健による斜乗の符号

このことについて、和算の文献の中で、はじめて述べているのは、

菅野 元健『補遺解伏題正対篇』（1798）

である。

彼は、

左斜乗について、次数が 4 の場合からはじめて、項の符号が、

＋－＋－，　＋＋＋＋＋，　＋－＋－＋－，　＋＋＋＋＋＋＋，　・・・

右斜乗について、

＋－＋－，　＋＋＋＋＋，　－＋－＋－＋，　－－－－－－－，　・・・

となり、以下このパターンを繰り返すと述べている。

しかし、これについて、菅野はこれだけしか述べていないので、どのようにしてこのことを結論したのかわからない。