数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 243-252

英国と日本における Newton 法
The Newton method in Great Britain and in Japan

東京女子大学　長田 直樹 (Naoki Osada)
Tokyo Woman's Christian University

1 はじめに

非線型方程式 $f(x)=0$ に対し、初期値 x_0 を適当にあたえ反復

$$x_{\nu+1}=x_\nu-\frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)},\quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

により $f(x)=0$ の解を求める方法を **Newton 法**あるいは Newton-Raphson 法という。

代数方程式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ に対する Newton 法を 2 種に分類する。初期値 x_0 を適当に取り、(1) を適用した

$$x_{\nu+1}=x_\nu-\frac{a_0+a_1x_\nu+\cdots+a_nx_\nu^n}{a_1+2a_2x_\nu+\cdots+na_nx_\nu^{n-1}},\quad \nu=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

あるいは (2) の右辺を通分した

$$x_{\nu+1}=\frac{-a_0+a_2x_\nu^2+2a_3x_\nu^3+\cdots+(n-1)a_nx_\nu^n}{a_1+2a_2x_\nu+\cdots+na_nx_\nu^{n-1}},\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

により反復を繰り返す方法を**狭義 Newton 法**と呼ぶ。反復関数 $\phi(x_\nu)$ 【$\phi(x_{\nu-1},x_\nu)$】を加減乗除により (2) の右辺に変形できるとき、反復 $x_{\nu+1}=\phi(x_\nu)$ 【$x_{\nu+1}=\phi(x_{\nu-1},x_\nu)$】を**広義 Newton 法**と呼ぶ。これらの概念により、微積分学誕生以前の Newton 法を考えることができる。

代数方程式に対する Newton 法は 17 世紀英国のブリッグズ、ニュートン、ラフソンと日本の関孝和により利用あるいは研究された。これらの方法の比較により、関孝和の Newton 法を特徴づける。

2 ブリッグズ

常用対数表を作成したヘンリー・ブリッグズ (Henry Briggs) の遺作『英国の三角法』[8](Trigonometria Britannica) は友人のヘンリー・ゲリブランド (Henry Gellibrand) により 1633 年に出版された。半径 1 の扇形の弦の長さ A が与えられたとき、中心角を三等分すると弦の長さ x は 3 次方程式

$$3x=A+x^3 \tag{3}$$

を満たす。ブリッグズは『英国の三角法』において、$A=0.61803398875(=2\sin 18^\circ)$ と $A=1.931851652578(=2\sin 75^\circ)$ に対し (3) の詳細な解法を示した。$A=0.61803398875$ の場合の解法を現代の記号で表すと次のようになる。

1. $x_0=0$
2. $x_1=A/3\fallingdotseq 0.2$
3. $A+0.2^3-3\times 0.2\fallingdotseq 0.026033988,\quad 3-3\times(0.2)^2=2.88$
4. $x_2=x_1+0.026033/2.88=0.209$
5. $A-3\times 0.2+(0.2)^3+3\times(0.2)^2\times 0.009+3\times 0.2\times(0.009)^2+(0.009)^3-3\times 0.009=0.00016331775$

6. $2.88 - 6 \times 0.2 \times 0.009 - 3 \times (0.009)^2 = 2.8689$
7. $x_3 = 0.209 + 0.00016331775/2.8689 = 0.209056$

$x_0 = 0$ とし、反復

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{A - 3x_{\nu-1} - 3\Delta + x_{\nu-1}^3 + 3x_{\nu-1}^2\Delta + 3x_{\nu-1}\Delta^2 + \Delta^3}{3 - 3x_{\nu-1}^2 - 6x_{\nu-1}\Delta - 3\Delta^2} \tag{4}$$

により計算しているのである。ここで、$\Delta = \Delta x_{\nu-1} = x_\nu - x_{\nu-1}$ である。$f(x) = x^3 - 3x + A$ とおくと、

$$f(x_\nu) = f(x_{\nu-1} + \Delta) = x_{\nu-1}^3 + 3x_{\nu-1}^2\Delta + 3x_{\nu-1}\Delta^2 + \Delta^3 - 3x_{\nu-1} - 3\Delta + A$$
$$f'(x_\nu) = f'(x_{\nu-1} + \Delta) = 3x_{\nu-1}^2 + 6x_{\nu-1}\Delta + 3\Delta^2 - 3$$

となるので、(4) は $f(x) = x^3 - 3x + A = 0$ に対する広義 Newton 法である。ブリッグズは $5x - 5x^3 + x^5 = 1.1755050458 (= 2\sin 36°)$ に対しても同様の広義 Newton 法を適用している。したがって、ヨーロッパにおいて代数方程式に対する広義 Newton 法を発見したのはブリッグズということになる。

ブリッグズは 3 次方程式に対しては x_2, x_3 の表示桁数をそれぞれ 3 桁、6 桁取っているが、5 次方程式に対しては x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 をそれぞれ 4,5,6,7,8 桁取っている [8] ので、Newton 法が 2 次収束する (反復毎に正しい桁数が 2 倍になる) ことには気がついていなかったと思われる。

3 ニュートン

3.1 『無限個の項を持つ方程式による解析について』

アイザック・ニュートン (Isaac Newton) は 1669 年 7 月にアイザック・バロウ (Issac Barrow) に論考『無限個の項を持つ方程式による解析について』[1] (De analysi per æquationes numero terminorum infinitas) を送った。その中で、陰関数 $f(x, y) = 0$ から y を x の冪級数として表す際、および $z = \sum a_n x^n$ から逆関数 $x = \sum b_n z^n$ を求める際に代数方程式の解法が必要であった。そのため、3 次方程式の解法を $y^3 - 2y - 5 = 0$ を例に取り表 1[1, p.269] のように与えた。([1] の誤植 †、‡ は [17, II,p.218] に基づき訂正した。)

表 1：ニュートンによる $y^3 - 2y - 5 = 0$ の解法

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2,10000000$
		$-0,00544853$
		$+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$ †
$0,1 + q = p$	$+p^3$	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0,06 \quad + 1,2 + 6,0$
	$+10p$	$+1, \quad + 10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + p^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642 \quad + 11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004853 + s = r$ ‡		

表 1 は $f(y) = f_0(y) = y^3 - 2y - 5 = 0$ の解を次のようにして求めている。

1. 2 を初期値に取る。
2. $y = 2 + p$ を方程式 $f_0(y) = 0$ に代入し、p の方程式 $f_1(p) = p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ を得る。高次の項を無視した $10p - 1 = 0$ を解いて $p = 0.1$ を得る。
3. $p = 0.1 + q$ を方程式 $f_1(p) = 0$ に代入し、$f_2(q) = q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ を得る。$f_2(q) = 0$ の高次の項を無視した $11.23q + 0.061 = 0$ を解いて $q = -0.0054$ を得る。
4. $q = -0.0054 + r$ とおき、$f_2(q)$ の q^3 を無視した $\bar{f}_2(q) = 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ に代入し、$f_3(r) = 6.3r^2 + 11.16196r + 0.000541708 = 0$ を得る。$f_3(r) = 0$ の $6.3r^2$ を無視して $r = -0.000541708/11.16196 = -0.00004853$ を得る。
5. $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004853 = 2.09455147$ が解の近似値である。

ニュートンの Newton 法 (五十嵐正夫 [12] は原始 Newton 法と呼んでいる) は、反復の度に方程式が変化するので狭義 Newton 法とは異なるが、広義 Newton 法であることは次の定理から分かる。

定理 1 $f(x) = f_0(x)$ は n 次多項式とし、$x_0 = d_0$ を $f(x) = 0$ の近似解とする。$\nu = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\begin{cases} f_\nu(x) = f_{\nu-1}(x + d_{\nu-1}) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}x + \cdots + a_n^{(\nu)}x^n \\ d_\nu = -\dfrac{a_0^{(\nu)}}{a_1^{(\nu)}} \\ x_\nu = x_{\nu-1} + d_\nu \end{cases}$$

とおくと、

$$x_\nu = x_{\nu-1} - \frac{f(x_{\nu-1})}{f'(x_{\nu-1})}$$

証明

$$\begin{aligned} a_0^{(\nu)} &= f_{\nu-1}(d_{\nu-1}) = f_{\nu-2}(d_{\nu-2} + d_{\nu-1}) = \cdots = f_0(d_0 + \cdots + d_{\nu-1}) = f(x_{\nu-1}) \\ a_1^{(\nu)} &= f'_{\nu-1}(d_{\nu-1}) = f'_{\nu-2}(d_{\nu-2} + d_{\nu-1}) = \cdots = f'_0(d_0 + \cdots + d_{\nu-1}) = f'(x_{\nu-1}) \end{aligned}$$

よりいえる。 □

ホワイトサイド (D.H. Whiteside) によると「ニュートンは 1669 年にはブリッグズの『英国の三角法』をまだ読んでいなかった」[17, II, p222] ので、ブリッグスが発見した広義ニュートン法を再発見したことになる。しかしながら、ブリッグズの方法とニュートンの方法は発想もアルゴリズムも全く異なる。

ニュートンは、q, r, s の補正の表示桁数をそれぞれ 1 桁、2 桁、4 桁取っていることより、Newton 法が 2 次収束することに気がついていたと思われる。

3.2 スミスへの手紙

ニュートンは、1675 年 7 月 24 日付けでジョン・スミス (John Smith) に宛てた手紙 [16, pp.348-350] の中で、A の平方根、立方根、四乗根の近似値の求め方を説明している。最初の近似値 B を 10 進で 5 桁計算すると

$$B + \frac{A - B^n}{nB^{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4 \tag{5}$$

は、10 進で 11 桁になると書いている [16, p.348]。、(5) は $f(x) = x^n - A$ に対し狭義 Newton 法を 1 回適用したものである。同じ手紙の中でニュートンは、(5) を変形した

$$\frac{1}{n}\left((n-1)B + \frac{A}{B^{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, 4$$

も与えている。

3.3 プリンキピア

ニュートンは『自然哲学の数学的基礎』(Philosohiæ Naturalis Principia Mathematica)(略称『プリンキピア』) 第 2 版 (1713) で Kepler 方程式 $x - e\sin x = M$ を幾何学的に解いているが、解析的に表せば

$$x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{M - x_\nu + e\sin x_\nu}{1 - e\cos x_\nu} \tag{6}$$

となる [18, p.545]。(6) は $f(x) = x - e\sin x - M = 0$ に対する狭義 Newton 法である。

陰にではある [17, IV,p.665] が、超越方程式に対する Newton 法の最初の適用例である。

4 ラフソン

ジョセフ・ラフソン (Joseph Raphson) は 1690 年小冊子『方程式の普遍的な解析』[2] (Analysis æquationum universalis) を出版した。序文 (Præfatio Lectoribus Geometris) において、「私自身の流儀によって方程式の解析について簡明にかつ発見の順序に従い述べる。」「私の知る限り Newton 以外にこのような方法を考えたものはいない。」(五十嵐正夫 [12] 要約) と、控えめにニュートンの Newton 法を改良したことを述べている。

[2, p.13] の問題 9 では 3 次方程式 $aaa - ba = c$ に対し、解の推定値 g に対する補正

$$x = \frac{c + bg - ggg}{3gg - b}$$

を与えている。$f(a) = a^3 - ba - c$ とおくと

$$g + x = g - \frac{f(g)}{f'(g)}$$

であるので、狭義 Newton 法である。

数値例ではニュートンの 3 次方程式 $a^3 - 2a = 5$ を取り上げている。計算結果を現代的に表すと次のようになる。

1. $x_0 = 2$
2. $x_1 = 2 + \frac{1}{10} = 2.1$
3. $x_2 = 2.1 + \frac{-0.061}{11.23} = 2.0946$
4. $x_3 = 2.0946 + \frac{-0.000541550536}{11.16204748} = 2.094551483$
5. $x_4 = 2.094551483 + \frac{-0.000000016269730988086395587}{11.1614377448125} = 2.09455148154271041 41$

ラフソンはニュートンの広義 Newton 法 (1669) を改良することにより、狭義 Newton 法を発見したことになる。ニュートンの狭義 Newton 法は、n 乗根を求めるためのものであるが、ラフソンの狭義 Newton 法は、一般の代数方程式に対し適用可能である。

問題 9 の数値例では、各段階で g, x の有効桁数を等しく取っているのでラフソンもニュートンと同様、Newton 法が 2 次収束することに気がついていたと考えられる。

5 シンプソン

超越方程式 $f(x) = 0$ に対する Newton 法の発見は 1740 年トーマス・シンプソン (Thomas Simpson) である [18]。シンプソンは無理方程式 $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{1-3x^3} - 2 = 0$ を考えた [7]。$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{1-3x^3} - 2$ とおくと、

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}} - \frac{9x^2}{2\sqrt{1-3x^3}}$$

である。シンプソンは $f'(x)$ と

$$f(0.5) = 0.204, \quad f'(0.5) = -3.545, \quad \frac{0.204}{-3.545} = -0.057, \quad 0.5 + 0.057 = 0.557$$

を与えている。さらに

$$0.557 - \frac{f(0.557)}{f'(0.557)} = 0.5516$$

を見つけている。

シンプソンは

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$$

において、$x_0 = 0.5$ をとり、$x_1 = 0.557, x_2 = 0.5516$ を計算したことになる。解は 0.551586152497 である。数値例によれば、シンプソンは Newton 法が 2 次収束することに気づいてない。

6 関孝和

Newton 法は、関孝和が 1685 年に執筆した『解隠題之法（かいいんだいのほう）』[4] に表れる。この方法は、関孝和・建部賢明・建部賢弘によって執筆され、1711 年頃賢明によって完成した『大成算経』[6] でも記述されている。関孝和はこの方法を 1683 年に重訂した『角法（かくほう）并（ならびに）演段図（えんだんず）』[3, 5] で応用している。

6.1 『解隠題之法』

『解隠題之法』の「開方」では最初に組み立て除法による多項式の 1 次式による変換を述べている。「式」$f(x)$ と「商」α に対し、$g(y) = f(y+\alpha)$ の組み立て除法による計算法である。

> 開方は商を立てて、隅より平方式は廉より之を命ず之を命ず。すなわち位を超すこと常の如し。実に至りみな同加異減し、而して之を開き尽くす。諸級中正負相反する者あらば之を飜法と謂うなり

続いて、「得商」では代数方程式 (「開方式」) を組み立て除法 (「開方」) を繰り返して解く算法を 3 つの場合に分けて述べている。

1. 「開方」を繰り返す際に定数項「実」の符号は一定で、何回か繰り返すと 0(「実尽」) になる。

   > 先ず商一を立て、隅からこれを命ず、異減同加し実に至る。実に余りあるは再び商一を立て、前の如くし実に至る。遂にこの如く実尽きれば、則ち立てた商を相併せ定商となす。

2. 「開方」を繰り返すと定数項の符号が反対 (「実飜」) になるときは、商の符号を変えて「開方」を行うと 0(「実尽」) になる。

或いは実飜にして尽くす能わざるは、負商を立て前の如く異減同加し実に至る。実尽きれば則ち前商を相併せ、負商を減じ定商となす。

ここまでは、いわゆる Ruffini-Horner 法である。

3. 「開方」を繰り返しても定数項が 0 にならない。「実有不尽」

   或は実尽くさざる有りは、方を以て、開商の位数に従て、実を除す。而して得た所を以て、正負に依りて、開商を加減し、次商となす。

   ここでは次商 x_1 をニュートンの Newton 法で求めることを述べている。

   之を以て、隅より之を命じ、実に至る。而して前の如く、方を以て実を除し、而して得た所を以て、又次商を加減する也。次第此の如し、而して定商を得る。

   これは狭義 Newton 法である。

$-9+3x+2x^2+x^3=0$ に対する商の求め方を説明している。原文の書き下し文を示す。原文は縦書きであるが横書きにし、算木による表現は算用数字に改める。

たとえば

−9	3	2	1

先ず商一箇を立て、隅よりこれを命じ、異減同加し実に至り、而して得る。

商一箇

−3	10	5	1

又商二分を立て、前の如く而して得る。

商二分

−0.792	12.12	5.6	1

又商六厘を立て、前の如く而して得る。

商六厘

−0.044424	12.8028	5.78	1

此の如く、実有り尽きざる故、是に於いて方を以て実を除し、正三毛四六強を得、前の開商に加え入れ、一箇二分六三四六強を共に得る。次第此の如く、而して定商を得る。

現代の記号でアルゴリズムを記述すると次のようになる。

1. 開方式を $f(x)=0$ とし、$g_0(x)=f(x)$ は n 次多項式とする。$x_0=d_0$ を $f(x)=0$ の近似解とする。$\mu=1,2,\ldots,m$ に対し $g_\mu(x)=g_{\mu-1}(x+d_{\mu-1})$ の近似零点を d_μ とする。桁数は 10 進数で 1 桁づつ増やしていく。
2. $|g_m(d_m)|\neq 0$ が小さくなったとき、開方により

$$g_m(x)=g_{m-1}(x+d_{m-1})=a_0^{(m)}+a_1^{(m)}x+\cdots+a_n^{(m)}x^n$$

   を計算し、

$$x_1=d_0+\cdots+d_{m-1}-\frac{a_0^{(m)}}{a_1^{(m)}}$$

   を次商にとる。右辺の除算の有効桁数は開商 $d_0+\cdots+d_{m-1}$ の有効桁数に合わせる。
3. $\nu=2,3,\ldots$ に対し

$$f(x)=f(x+x_{\nu-1})=c_0^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}x+\cdots+c_n^{(\nu)}x^n,\quad x_\nu=x_{\nu-1}-\frac{c_0^{(\nu)}}{c_1^{(\nu)}}$$

   を必要な精度まで計算する。

アルゴリズム 1 は Ruffini-Horner 法、アルゴリズム 2 はニュートンの Newton 法、アルゴリズム 3 は狭義 Newton 法である。したがって、関孝和の方法は、反復列が解に近づくまでは 1 桁ずつ求めてゆき、狭義 Newton 法の初期値をニュートンの Newton 法で求め、引き続き狭義 Newton 法を適用している。

6.2 『大成算経』巻之三

『解隠題之法』の得商は『大成算経』巻之三 (変技) における「開方第三」の「窮商」で扱われている。「窮商(きゅうしょう)」とは、代数方程式の数値解を高精度で求める方法である。

> これ商数の畸零の微を究めるなり。実数を開き不尽あるものは、開出の位数に従い、方を以て実を除す。すなわち同名にて除するものは、定まって負数を得る。異名にて除するものは、定まって正数を得る。その数を以て、正負に依って開きたる商に加減して、次商となす。これを以て原式の隅よりこれを命じ、これを加減し実に至る。また隅より方に至るまで、これを加減し、その方を以て、次商位数に従いて、その実を除し得数を以て、次商に加減し、三商となす。あるいは数に依りて尾位に至り而して微差を生じるものあり、これ故則ち末一位を略し定商となす。而してこれを用ゆ。次第この如く各級の定商を得るなり。

数値例には 2 次方程式 $11+8x+x^2=0$ と『解隠題之法』と同一の 3 次方程式 $-9+3x+2x^2+x^3=0$ の例が取り上げられている。

$-9+3x+2x^2+x^3=0$ の開方の書き下し文は次のようになる。

> たとえば立方 $\boxed{-9}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$ 先ず正商一個を立てこれを開き、$\boxed{-3}\boxed{10}\boxed{5}\boxed{1}$ を得る。また正商二分を立てこれを開き、$\boxed{-0.792}\boxed{12.12}\boxed{5.6}\boxed{1}$ を得る。また正商六厘を立て之を開き、$\boxed{-0.044424}\boxed{12.8028}\boxed{5.78}\boxed{1}$ を得る。

ここまでは、『解隠題之法』の要約である。続いて、

> 此の如く不尽有り、故に開商の位数に随て、方正一十二箇八〇二八を以て実負四厘四四二四を除し、正三毛四六を得る。開商を併せ、正一箇二分六三四六を得、次商となす。すなわち原式の隅より之に命じ、相減し実に至り、余り負五忽七〇七四七三〇二六四、また隅から命じ相減し方に至り、正一十二箇八四二八三三五一四八を得る。これを以て実負五忽七〇七四七三〇二六四を除し五四微四四四〇九を得る。次商を併せ、正一箇二分六三四六四四四四〇九を得て、三商となす。この如く遂げその微を究る也。

とある。

『解隠題之法』と『大成算経』の Newton 法は同一のアルゴリズムである。したがって、『大成算経』の「窮商」は、『解隠題之法』の「得商」を元に、分かりやすく書き直したものである。書き直したのは恐らく建部賢明であろう。

6.3 『角法并演段図』

角法とは、正多角形に内接する円と外接する円の半径、正多角形の面積を多角形の周によって表す問題である。多角形の一辺を「面」、内接する円の半径を「平中径」、外接する円の半径を「角中径」、面積を「積」と呼んでいる。関孝和は、「面」一寸の正三角形から正二十角形までの「平中径」と「角中径」を小数点以下第 9 位を微強、少強、太強、半強、半弱、太弱、少弱、微弱で丸めている。

角法への応用を正五角形を例にとる。

> 今五角有り、毎面一寸、平中径、角中径、積各幾何ぞと問う。
> 答曰、平中径六分八厘八毛一糸九零九六少弱 [微強]、角中径八分五厘零六糸五零八零八少強、
> 積一寸七分二厘零四糸七七四 [微強]。

平中径を求る術曰、天元に一を立て平中径と為す。
(天元術による開方式の導出箇所は略す)
開方式 | −1 | 0 | 40 | 0 | −80 | を得る。三乗方飜法之を開き平中径を得る。すなわち積を得て問に合す。

[ ] 内は松永良弼による訂正である [11]。

関は天元術により平中径角中径の満たす方程式「開方式」を得て「三乗方飜法」により求めているが、「三乗方飜法」の解法は示していない。「立方飜法」は『解隠題之法』の「開方」に出てくる。「三乗方」は 4 次方程式、「飜法」は「諸級中正負相反する者あらば之を飜法と謂うなり」と説明されているように「開方」を続ける過程でいずれかの係数の符号が正負逆転するものをいう。

関が与えた方程式は、各面が一寸のときの平中径の長さを x とすると

$$-1 + 40x^2 - 80x^4 = 0 \tag{7}$$

である。2 次方程式の解の公式を使えば

$$x^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}, \quad x = 0.6881909602355867905$$

である小数第 9 位を丸めると 0.68819096 微強である。関は 0.68819096 少弱としているので、松永の訂正が正しい。

関孝和がいかにして平中径 x を求めたかを考える。関は 2 次方程式の解の公式は知らない。そこで、「三乗方飜法」により数値解を求めた。(7) に Ruffini-Horner 法を適用すると

表 2：(7) に Ruffini-Horner 法を適用

商	実	方	初廉	次廉	隅
0.6	3.032	−21.12	−132.8	−192	−80
0.08	0.3908992	−46.21824	−181.952	−217.6	−80
0.008	0.00939661312	−49.17141504	−187.20512	−220.16	−80
0.0001	0.004477599344633	−49.208862669119992	−187.2711728	−220.192	−80
0.00009	0.000047284647387	−49.242576831122872	−187.330628528	−220.2208	−80

となる。

どの段階で Newton 法に切り替えるかについて「実有不尽」としか書いていない。『解隠題之法』の唯一の数値例では、実が 0.79 のときは切り替えず、0.044 で切り替え、1 回だけ以方除実を行い次商を定商に採用している。このときの定商の有効桁数は 6 桁である。

数値例から類推すると、Newton 法に切り替えるタイミングは 0.68 と 0.688 の 2 通りが考えられる。一方、『解隠題之法』の数値例のように 1 回だけ以方除実を行った可能性もある。少なくとも 10 桁求めることが必要なので、この場合は 0.68819 で切り替えることになる。

1. 0.68 で Newton 法に切り替える。

$$\begin{array}{ll} \text{次商} & 0.6 + 0.08 + \dfrac{0.3909}{46.22} = 0.6884 \\ \text{三商} & 0.6884 - \dfrac{0.010301920}{49.321285} = 0.6881912 \\ \text{四商} & 0.6881912 - \dfrac{0.00001180671}{49.24303} = 0.6881909602358 \end{array}$$

小数第 12 位まで正しい。

2. 0.688 で Newton 法に切り替える。

$$\text{次商}\qquad 0.6+0.08+0.008+\frac{0.009397}{49.17}=0.6888191$$
$$\text{三商}\qquad 0.688191-\frac{0.000001958117}{49.24295}=0.688190960235587$$

小数第 14 位まで正しい。

3. 0.68819 で Newton 法に切り替える。
定商は
$$0.6+0.08+0.008+0.0001+0.00009+\frac{0.0000472846}{49.2426}=0.68819096023768$$
であり、小数第 11 位まで正しい。

以上どの方法もありえるが、『關孝和全集』の解説 [11, p.169] に「答曰の数値については、松永良弼と藤田貞資が多くの誤りを指摘した。これらの多くは数字係数の方程式を所謂、関一ホーナーの方法で解く場合に、孝和は有効数字を五位まで得たとき、ニュートンの近似計算で一挙に有効数字を十桁まで求めたと思われる。」とあり、0.68819 で Newton 法に切り替える方法で計算したとの意見である。戸谷清一(とやせいいち)の報告 [11, 三百十頁] によるとある。

7 終わりに

ブリッグス『英国の三角法』、ニュートン『無限個の項を持つ...』、関孝和『解隠題之法』、ラフソン『方程式の普遍的な解析』の Newton 法を比較すると次表のようになる。

表 3：Newton 法の比較

	ブリッグズ	ニュートン	関孝和	ラフソン
発見	1630 年以前	1669 年頃	1685 年以前	1690 年頃
種類	広義		狭義	
反復多項式	与多項式	変化する	与多項式	
補正の計算	差分による展開式	2 項定理	組み立て除法	関数値と導関数値
定式化	ない	数値方程式による例示	言語による説明と数値例	パタンに分け公式と数値例
収束性	収束しないことがある †		必ず収束する	収束しないことがある †

† 周期点 ($x^3-2x+2=0$ に対し初期値を 1) や導関数の零点 ($x^3-3x+A=0$ に対し初期値を 1)。

ニュートンが 1669 年に再発見した広義 Newton 法をラフソンは 1690 年に狭義 Newton 法として発展させた。関孝和は 1685 年以前に狭義 Newton 法を一人で完成させた。一般の代数方程式に対する狭義 Newton 法の発見は、関孝和が最も早い。関孝和の Newton 法は、ニュートンやラフソンの Newton 法に比べ収束性にすぐれ、組み立て除法を用いるため計算も容易である。

筆者は最近まで反復 (1) について、Raphson 法あるいは Newton-Raphson 法と呼ぶのが適切である [14, p.49] と考えていた。しかしながら、ニュートンは 1669 年の『無限個の項を持つ...』において代数方程式に対する広義 Newton 法を再発見し、1675 年スミス宛ての手紙において $x^n-A=0$ に対し狭義 Newton 法を適用し、1713 年『プリンキピア』第 2 版で超越方程式 $x-e\sin x=M$ に対し狭義 Newton 法を陰に適用しているので、Newton 法という名称は不適切とはいえないとの考えに至った。

筆者はまた、『解隠題之法』の方法は Ruffini-Horner 法のあと 1 度だけニュートンの Newton 法 (広義 Newton 法) を適用するのに対し、『大成算経』巻之三「窮商」は Ruffini-Horner 法のあと狭義 Newton 法を繰り返し適用すると誤読していた [14, 15]。本報告で述べたように『解隠題之法』で述べられたアルゴリズムも狭義 Newton 法を繰り返し適用するものである。

参考文献

[1] I. Newton, De analysi per æquationes numero terminorum infinitas, 257-282, Opera quae exstant omnia, Bd 3, F. Fromann, 1964

[2] J. Raphson, Analysis Æquationum UNIVERSALIS SEU Ad ÆQUATIONES ALGEBRAICAS, London, 1690

[3] 関孝和、角法并演段図、日本学士院、0223

[4] 関孝和、解隠題之法、關孝和全集 [11, pp.132-140]

[5] 関孝和、括要算法、關孝和全集 [11, pp.270-370]

[6] 関孝和・建部賢明・建部賢弘、大成算経、東北大学、狩野 7.20820.20

[7] T. Simpson, Essays on several curious and useful subjects, In Speculative and Mix'D MATHEMATICKS, London, 1740, `http://books.google.com/`

[8] I. Bruce, Trigonometria Britannicae, Notes on Chapter Four `http://www.17centurymaths.com/contents/tbbriggs.htm`

[9] 藤原松三郎、日本学士院編、明治前日本数学史第二巻新訂版、野間科学医学資料館、1979 (初版は岩波書店、1956)

[10] H. Goldstine, A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th century, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 2, Springer, 1977

[11] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄、關孝和全集、大阪教育図書、1974

[12] 五十嵐正夫、Vieta と Raphson の代数方程式の数値例と Newton-Raphson 法について、科学史研究 II、26(1987)、214-221

[13] 加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槇書店、1972

[14] 長田直樹、お話数値解析 10 — 非線型方程式 (前編)、理系への数学、2009 年 3 月号、48-54

[15] 長田直樹、関孝和・建部賢明・建部賢弘の Horner 法と Newton 法、京都大学大学院数学史連続講義、2009 年 3 月

[16] H.W. Thurbull, The correspondence of Isaac Newton, vol. 1, Cambridge at the Unversity Press, 1959.

[17] D.T.Whiteside ed. The mathematical papers of Isaac Newton, Vol. I-VII, Cambridge at the University Press, 1967-1976

[18] T.J. Ypma, Development of the Newton-Raphson Method, SIAM Review, 37(1995), 531-551.