数理解析研究所講究録
第 1678 巻 2010 年 1-4

Semi-hyponormal 作用素は convexoid か？

神奈川大学工学部　長　宗雄 (Chō Muneo)
Department of Mathematics,
Kanagawa University

$T=U|T|$ をヒルベルト空間上の作用素 T の polar 分解とする．よく知られていますが，定義を記載する．

1. T が hyponormal 作用素 $\Longleftrightarrow$ $T^*T \geq TT^*$
2. T が semi-hyponormal 作用素 $\Longleftrightarrow$ $|T| \geq |T^*|$
3. T が quasi-hyponormal 作用素 $\Longleftrightarrow$ $T^*(T^*T)T \geq T^*(TT^*)T$
4. T が paranormal 作用素 $\Longleftrightarrow$ $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \quad (\forall x; \|x\|=1)$
5. T が normaloid 作用素 $\Longleftrightarrow$ $r(T)=\|T\|$
6. T が transaloid 作用素 $\Longleftrightarrow$ $r(T+z)=\|T+z\|$ for all $z \in \mathbf{C}$
7. T が convexoid 作用素 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{conv}\ \sigma(T)=\overline{W(T)}$

ここで $\sigma(T)$ は T の spectrum と $W(T)$ は numerical range である．これらの作用素の関係と convexoid との状況は

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{quasi-hypo} & & \\ & \nearrow & \text{No} & \searrow & \\ \text{hypo} & & & & \text{para} \longrightarrow \text{normaloid} \\ \text{Yes} & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{semi-hypo} & & \\ & & ? & & \end{array}$$

hyponormal 作用素が convexoid であることと quasi-hyponormal 作用素が一般に convexoid でないことは，安藤先生の例により有名である．この例は

$\mathcal{H} = \ell^2 \oplus \ell^2$ として U: unilateral shift, P: 第一成分への projection として

$$T = \begin{pmatrix} U+I & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が convexoid でない quasi-hyponormal 作用素である.

ℓ^2 上の bilateral weighted shift T に対しては，次の結果がある.

定理 1. Let T be a bilateral weighted shift with $r(T) = \|T\|$. Then T is transaloid and $\sigma(\mathrm{Re}T) = \mathrm{Re}(\sigma(T))$. Hence, T is convexoid.

従って ℓ^2 上の bilateral weighted shift T で，semi-hyponormal であれば，これは convexoid である.

ℓ^2 上の bilateral weighted shift で semi-hyponormal 作用素が convexoid でないものは作れない！

semi-hyponormal 作用素を作るには，次の定理を利用する。

定理 2. If T is p-hyponormal, then T^n is $\frac{p}{n}$-hyponormal.

ℓ^2 上の unilateral weighted shift U に対して，２つの正の実数 a, b とし $T = aU + bU^*$ とおく．このとき，

$$T^*T - TT^* = (a^2 - b^2)P$$

であるので，T: hyponormal である必要十分条件は $a \geq b$ である．従って，$a \geq b > 0$ に対して T^2 とすれば，これが semi-hyponormal 作用素となる.

そこで，次の定理となる。

定理 3. T を先ほどの作用素とする． このとき，T^2 は convexoid である.

証明のスケッチ
$T^2 = a^2U^2 + abUU^* + abI + bU^{*2}$ であり $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ に対して

$$(T^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2ab - ab|x_0|^2 + (a^2 + b^2)\Re(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x}) + i(a^2 - b^2)\Im(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x}).$$

$X = \Re(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x})$, $Y = \Im(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x})$
とおく。このとき

$$X^2 + Y^2 \leq 1 - (|x_0|^2 + |x_1|^2)$$

であり

$$\frac{(2ab - ab|x_0|^2 + (a^2+b^2)X - 2ab)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{((a^2-b^2)Y)^2}{(a^2-b^2)^2} \leq 1 - |x_1|^2.$$

従って

$$\frac{(2ab - ab|x_0|^2 + (a^2+b^2)X - 2ab)^2}{(a^2+b^2)^2} + Y^2$$
$$\leq 1 - |x_1|^2.$$

よって

$$\overline{W(T^2)} \subset \{z = x + iy : \frac{(x-2ab)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2-b^2)^2} \leq 1\}$$

次に，Douglas 先生の本 Banach algebra techniques in operator theory の 系 7.28 によって

$$\sigma(T) = \{z = x + iy : \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} \leq 1\}$$

より

$$\sigma(T^2) = \{z^2 : z \in \sigma(T)\}$$
$$= \{z = x + iy : \frac{(x-2ab)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2-b^2)^2} \leq 1\}$$

よって

$$\sigma(T^2) = \overline{W(T^2)}.$$

証明終わり.

これは，次のように a, b を複素数に一般化できる。

定理 4. $T = \alpha U + \beta U^*$ とする． このときも，T^2 は convexoid である.

ただし，$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

証明 は $\alpha = ae^{2i\theta}, \beta = be^{2i\phi}$ かつ $\lambda = e^{i(\theta+\phi)}, \gamma = e^{i(\theta-\phi)}$ とおく.
また

$$V(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_0, \overline{\gamma}x_1, \overline{\gamma}^2 x_2, \ldots)$$

とおくと V は unitary であり

$$VT^2V^* = \lambda^2(aU + bU^*)^2$$

となるので，

$$T^2 = \lambda^2 V^*(aU + bU^*)^2 V$$

となるので，この T^2 も convexoid である。

最後に，$T = 2U + U^*$ は hyponormal であるので，T^2 は semi-hyponormal であるが，$T^2 - 4$ は paranormal でない。なぜなら

$$\|(T^2 - 4)(1, 0, 0, ...)\|^2 = \|(-2, 0, 4, 0, ...)\|^2 = 20$$

$$\|(T^2 - 4)^2(1, 0, 0, ...)\| = \|(8, 0, -8, 0, 16.0.0.)\| = \sqrt{384}$$

である。よって $\mathbf{x} = (1, 0, 0, ...)$ とおくと

$$\|(T^2 - 4)\mathbf{x}\|^2 = 20 > \sqrt{384} = \|(T^2 - 4)^2\mathbf{x}\|$$

であるので paranormal でない。

[1] A. Aluthge, On p-hyponormal operators for $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th. **13**(1990), 307-315.

[2] A. Aluthge and D. Wang, Powers of p-hyponormal operators, J. Inequal. Appl. **3**(1999), 279-284.

[3] M. Chō, T. Huruya, Y.O. Kim and J.I. Lee, A note on real parts of some semi-hyponormal operators, Acta Sci. Math. (Szeged) **66**(2000), no. 3-4, 731-736.

[4] M. Chō and J.I. Lee, p-Hyponormality is not translation-invariant, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2002), 3109-3111.

[5] R.G. Douglas, Banach algebra techniques in operator theory, Academic Press, New York and London 1972.

[6] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor & Francis Inc, London and New York, 2001.

[7] C. Pearcy, Topics in operator theory, Amer. Math. Soc., Providence, 1972.

[8] D. Xia, Spectral theory of hyponormal operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.