数理解析研究所講究録
第 1678 巻 2010 年 32-39

Further extension of the sharp triangle inequalities

静岡大学・教育　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University
横浜国立大学・教育学研究科　峰野宏祐 (Kosuke Mineno)
Graduate schools of Education, Yokohama National University

1　序

ノルム不等式の研究は多種多様な設定の元で, 現在も多くの研究がなされている. その 1 つとして以下のような問題がある.

問題 1.1 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 $A, B \in X$ に対してノルム不等式 $\|A\| \leqq \|B\|$ が成立しているとき,

(i) $\|A\| + C \leqq \|B\|$ をみたす正の値 C を A, B によって特徴付けよ.

(ii) $\|B\| \leqq \|A\| + D$ をみたす正の値 D を A, B によって特徴付けよ.

すなわち不等式 $\|A\| \leqq \|B\|$ の間にどの程度の隙間があり, その隙間を A, B によって構成される値でうめることが出来るのか？そしてどの程度正の値を加えれば, $\|B\|$ の値を超えてしまうのか？を問題として捉えている. ここでは (i) のタイプの不等式を, 不等式 $\|A\| \leqq \|B\|$ の**精密化**とよび, (ii) のタイプを (i) の**逆不等式**と呼ぶことにする. 明らかに定数 C は大きな値を, 定数 D は小さな値をそれぞれ構成することに興味がある.

ノルム空間における最も基本的なノルム不等式の 1 つとして三角不等式がある. 近年バナッハ空間の幾何学的性質の研究に関連して, 加藤-斎藤-田村 [5] はバナッハ空間の n 個の元に関する三角不等式の精密化とその逆不等式を与えた. この研究成果に誘発されて, その後さまざまな設定の元で三角不等式の精密化とその逆不等式に関する研究が進んでいる. (cf. [1, 3, 4, 6])

ここでは, バナッハ空間 (ノルム空間) の n 個の元に関する三角不等式の精密化およびその逆不等式を, 連続関数を用いることにより全ての値を特徴付けることが出来ることを紹介する. また我々の不等式の中間値として, 加藤-斎藤-田村 [5] および三谷-斎藤- 加藤-田村 [7] の不等式が実現出来ていることにも触れたい.

2 準備と問題

この章では, 幾つかの準備と問題点の整理を行う. 以下, $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. 三角不等式とは 2 個の元 $x_1, x_2 \in X$ に関する以下のノルム不等式をいう.

$$\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$$

我々はこの拡張である, n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に関する以下のノルム不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

をあつかい, それをまた三角不等式と呼ぶことにする. このとき問題 1.1 は以下のようになる.

問題 2.1 n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して,

(i) $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| + C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ をみたす正の値 C を $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ によって特徴付けよ.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqq \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| + D$ をみたす正の値 D を $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ によって特徴付けよ.

簡単のために, 以下問題 2.1(i) のみを取り上げる. このとき明らかに

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|$$

であるから, 我々の問題は 0 と三角不等式の差 $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|$ の間にある正の値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けることである. 2 個の元の場合, Hudzik-Landes [2] が示した以下の不等式は, この問題に対する 1 つの解を与えている.

定理 2.2 ([2, Lemma 1]) バナッハ空間 X の 0 でない元 x, y に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \leqq \|x\| + \|y\| - \|x + y\|$$

Hudzik-Landes は逆不等式に関しては触れていないが, 2007 年に加藤-斎藤-田村 [5] はバナッハ空間の幾何学的な性質の特徴づけに関連して, Hudzik-Landes の不等式を n 個の場合へ拡張するとともに, その逆不等式も与えた.

定理 2.3 ([5, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|$$

この研究に動機付けられて, その後様々な設定のもとで三角不等式の精密化の研究が進んでいる. (cf. [3, 4, 6]) その1つに, 三谷-斎藤-加藤-田村 [7] があり, 彼らは定理 2.3 の不等式をより精密化することに成功した.

定理 2.4 ([7, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|,$$

ここで x_i^* は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ を満たす x_i の並べ替えである.

実際に定理 2.4 が, 定理 2.3 より良い評価を与えることは,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
&= \left(n - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| + \sum_{k=2}^{n-1} \left(k - \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \\
&\geqq \left(n - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \geqq 0
\end{aligned}$$

から直ちにわかる. すなわち, これら2つの精密化された不等式に含まれる値をそれぞれ

$$\textbf{(KST)} = \left(n - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

かつ

$$\textbf{(MSKT)} = \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|)$$

とおけば,

$$0 \leqq \textbf{(KST)} \leqq \textbf{(MSKT)} \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

より問題 2.1 の解を与えているが, それは1部でしかなく, 全てを与えているわけではない. 我々は問題 2.1 の完全な解を得るために, 次章で新しい不等式を与えるとともに, その応用について説明する.

3 主定理とその応用

この章では, 三角不等式の差 $\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| (\geqq 0)$ と 0 の間の全ての値を, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関係する三角不等式によって全て実現でき, その応用として定理 2.3 および定理 2.4 が得られることにもふれる. そのためには幾つかの記号の準備が必要である.

$n \geqq 2$ としたとき, $n \times n$ 下三角行列

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & \ldots & a_{n-1\,n} & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij} \in [0,1])$$

を考える. このとき

$$\ell_{in}^{a}(n) = a_{in}, \quad \ell_{i1}^{a}(n) = a_{i1} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

とし, $n \geqq 3$ のとき $2 \leqq j \leqq n-1$ に対して,

$$\ell_{ij}^{a}(n) = a_{ij} \prod_{k=j+1}^{n} (1 - a_{ik}) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

とする. このとき $n \times n$ 行列 $(\ell_{ij}^{a}(n))$ は明らかに下三角行列となり, $\ell_{ij}^{a}(n) \in [0,1]$ をみたす. この下三角行列 $(\ell_{ij}^{a}(n))$ とバナッハ空間 X の n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \ell_{11}^{a}(n) & & & \\ \ell_{12}^{a}(n) & \ell_{22}^{a}(n) & \text{\Large 0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{1n}^{a}(n) & \ldots & \ell_{n-1\,n}^{a}(n) & \ell_{nn}^{a}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11}^{a}(n) x_1 \\ \sum_{i=1}^{2} \ell_{i2}^{a}(n) x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \ell_{in}^{a}(n) x_i \end{pmatrix}$$

により得られるベクトルの各座標ごとに, 三角不等式

$$\left\| \sum_{i=1}^{j} \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| \leqq \sum_{i=1}^{j} \left\| \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| \qquad (1 \leqq \forall j \leqq n),$$

すなわち,

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{j} \left\| \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| \qquad (1 \leqq \forall j \leqq n)$$

が成り立つ. 我々は, この n 個の三角不等式の差の総和を考えても, $x_1, \cdots, x_n$ に対する三角不等式の差を越えないことをつきとめた. すなわち

定理 3.1 バナッハ空間 (ノルム空間)X の任意の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \left\| \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} \ell_{ij}^{a}(n) x_i \right\| \right) \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

この不等式は一見すると不自然な創造物のような印象を受けるかも知れないが，その図形的な意味を理解すれば自然な不等式であることが理解されるだろう．そのために，以下では $n=2$ の場合に限って解説する．このとき，定理 3.1 は次のようになる．

系 3.2 バナッハ空間（ノルム空間）X の任意の元 x, y および $0 \leqq s, t \leqq 1$ を満たす任意の実数 s, t に対して，以下の不等式が成立する．

$$0 \leqq \ \|sx\| + \|ty\| - \|sx+ty\| \leqq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|.$$

そこで 2 変数関数 f を

$$f(s,t) = \|sx\| + \|ty\| - \|sx+ty\| \qquad (0 \leqq \forall s, t \leqq 1),$$

で与えれば，$f(s,t)$ は連続関数で以下の条件を満たす．

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = \|x\| + \|y\| - \|x+y\|.$$

このことより直ちに我々は問題 2.1 の解として次の系を得る．

系 3.3 $x, y \in X$ とする．このとき 0 と $\|x\| + \|y\| - \|x+y\|$ の間にある任意の実数 λ に対して，$s_0, t_0 \in [0,1]$ が存在して

$$\lambda = f(s_0, t_0).$$

を満たす．

定理 3.1 は単に問題 2.1 の解を与えるばかりでなく，定理 2.2，定理 2.3 および定理 2.4 を含むものでもある．実際に $x \neq 0,\ y \neq 0$ が $\|y\| = \min\{\|x\|, \|y\|\}$ を満たすとしよう．このとき $0 \leqq s \leqq s_0 \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq t_0 \leqq 1$ をとれば，$0 \leqq \frac{s}{s_0} \leqq 1$ かつ $0 \leqq \frac{t}{t_0} \leqq 1$ であるから，系 3.2 より

$$\begin{aligned} f(s,t) &= \|sx\| + \|ty\| - \|sx+ty\| \\ &= \|\frac{s}{s_0}(s_0x)\| + \|\frac{t}{t_0}(t_0y)\| - \|\frac{s}{s_0}(s_0x) + \frac{t}{t_0}(t_0y)\| \\ &\leqq \|s_0x\| + \|t_0y\| - \|s_0x + t_0y\| \\ &= f(s_0, t_0), \end{aligned}$$

すなわち f は単調増加な連続関数であるから

$$\begin{aligned} 0 = f(0,0) &\leqq f(s_1,1) \leqq f\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}, 1\right) \leqq f(s_2,1) \\ &\leqq f(1,1) = \|x\| + \|y\| - \|x+y\| \qquad \left(0 \leqq \forall s_1 \leqq \frac{\|y\|}{\|x\|} \leqq \forall s_2 \leqq 1\right) \end{aligned} \tag{F}$$

を満たす．ここで

$$f\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}, 1\right) = \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}$$

より (F) から

$$0 \leqq \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \leqq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|,$$

すなわち定理 2.2 を得る.

次にこれらの不等式の幾何学的な意味を $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\| \geqq \|y\|$ の設定の元で考察する. このとき任意の s, t $(0 \leqq s, t \leqq 1)$ に対して, 系 3.2 は図 1 の 2 つの三角形に関する三角不等式の差を比較したものである.

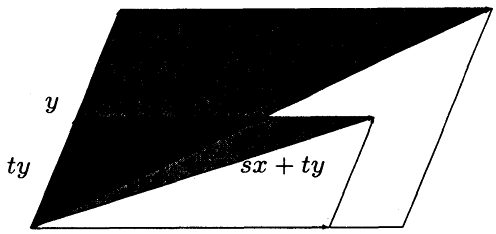

図 1: 系 3.2

すなわち, 系 3.2 は x, y で張られる平行四辺形に含まれる, どの三角形 (2 辺はそれぞれ x, y に平行である) を考えても, それに関する三角不等式の差は x と y に関する三角不等式の差以下であることを示している.

特に $t = 1$ の場合を考えると, 不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \|sx\| + \|y\| - \|sx+y\| = f(s,1) \\ &\leqq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|. \end{aligned}$$

の図形的意味は次の図 2 から容易に理解できる.

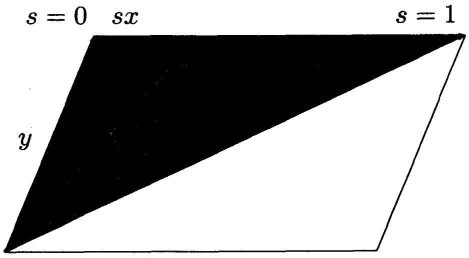

図 2: $t = 1$ の場合

この場合もやはり 2 つの三角形の三角不等式の差の関係を表している. 変数 s を 0 から 1 まで連続的に変化させれば $f(s,1)$ の連続性から $f(0,1) = 0$ から $f(1,1) = \|x\| + \|y\| - \|x+y\|$ までの全ての値が実現可能であり, 特に $s = \|y\|/\|x\|$ であるとき定理 2.2 の不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} = f\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}, 1\right) \\ &\leqq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|. \end{aligned}$$

を表す図 3 になる.

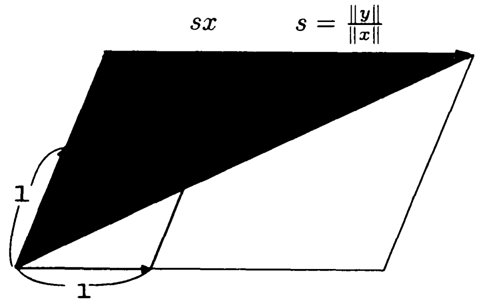

図 3: 定理 2.2

すなわち定理 2.2 は x 方向に長さ $\|y\|$ となるように切取った 2 等辺三角形に関する三角不等式の差との比較である. $n \geqq 3$ の場合も, 同様の議論が可能である. すなわち定理 2.3 は 0 でない n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$ の中で, そのノルムの値が一番小さいもので長さを揃えて n 個の辺の長さが等しい $n+1$ 角形を考えて, そこで得られる三角不等式の差と $x_1, \cdots, x_n$ で作られる三角不等式の差を比較したものになっている. つまりこの $n+1$ 角形だけを考えて, それ以外の部分は切り捨てているイメージである. この切り捨てられた部分を再利用したものが定理 2.4 である. 簡単のために全てのノルムの値が異なるとしよう. このとき, n 個の元それぞれから一番小さいノルムの値分だけ切取ると, $n-1$ 個の元が残る. その中で一番ノルムの値が小さいものを利用して, 同様の操作を行うことが出来る. この操作を 2 個の元だけ残るまで繰り返し行い, 最後に図 3 と同様の操作を行うことによって, 定理 2.4 を表す図を得ることが可能になる.

これらのことを具体的に実現するためには, 例えば定理 2.3 なら下三角行列を, 次のように選べば良い. ただし $\|x_n\| = \min\limits_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$ とする.

$$a = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \text{\Large 0} & \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \frac{\|x_n\|}{\|x_1\|} & \cdots & \frac{\|x_n\|}{\|x_{n-1}\|} & \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} \end{pmatrix}.$$

このとき実際に

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \|\ell_{ij}^a(n) x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{j} \ell_{ij}^a(n) x_i \right\| \right) &= \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\|x_n\|}{\|x_i\|} x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_n\|}{\|x_i\|} x_i \right\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|x_n\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\| \|x_n\| \\
&= \underbrace{\left(n - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\| \right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|}_{\text{(KST)}}
\end{aligned}$$

となり定理3.1の系として定理2.3を得ることができる.

系 3.4 ([5, Theorem 1]) バナッハ空間Xの0でないn個の元$x_1, x_2, \cdots, x_n$に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(n - \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\| \right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|$$

更に, 下三角行列を先ほどの方法に従って選ぶことにより, 定理2.4も得られるが, 詳細は省略する.

系 3.5 ([7, Theorem 1]) バナッハ空間Xの0でないn個の元$x_1, x_2, \cdots, x_n$に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \sum_{k=2}^{n} \left(k - \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \right\| \right) (\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|) \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|,$$

ここでx_i^*は$\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ$x_0^* = x_{n+1}^* = 0$を満たす$x_i$の並べ替えである.

参考文献

[1] S.S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **6**(5)(2005), Art. 129, pp. 46.

[2] H. Hudzik and T.R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294**(1992), 117–124.

[3] M. Fujii, M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp mean triangle inequality*, to appear in Math. Inequal. Appl..

[4] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **344**(2008), 17–31.

[5] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle Inequality and its reverse in Banach spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.

[6] L. Maligranda, *Some remarks on the triangle inequality for norms,* Banach J. Math. Anal., **2** no.2(2008), 31–41.

[7] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle Inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **10** no.2(2007), 451–460.