数理解析研究所講究録
第 1678 巻 2010 年 47-54

DUNKL-WILLIAMS 不等式の作用素への拡張とその応用

Kichi-Suke Saito (斎藤 吉助)
Niigata university
(新潟大学)
saito@math.sc.niigata-u.ac.jp

Masaru Tominaga (富永 雅)
Hiroshima Institute of Technology
(広島工業大学)
m.tominaga.3n@it-hiroshima.ac.jp

1. はじめに

1964 年, [1] において C.F. Dunkl と K.S. Williams は次の不等式を表した：ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}. \tag{1.1}$$

また最近，J. Pečarić と R. Rajić は，Dunkl-Williams 不等式 (1.1) の精密化を与えた：ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\sqrt{2\|x-y\|^2 + 2(\|x\|-\|y\|)^2}}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \tag{1.2}$$

更に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の環 $B(\mathcal{H})$ の元 A の絶対値を $|A|$ としたとき，不等式 (1.2) は彼ら自身により作用素へと一般化され，その等号条件についても吟味された [9, Theorem 2.1]：

Theorem A. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ は，それらの絶対値 $|A|, |B|$ に逆元が存在し，実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする．このとき

$$|A|A|^{-1} - B|B|^{-1}|^2 \;\leq\; |A|^{-1}(p|A-B|^2 + q(|A|-|B|)^2)|A|^{-1}. \tag{1.3}$$

不等式 (1.3) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$p(A-B)|A|^{-1} = qB(|A|^{-1} - |B|^{-1}). \tag{1.4}$$

本稿では，§2 において Dunkl-Williams 不等式 とそれに纏わる結果を紹介する．また，§3 では，$|A|\mathcal{H}$ の閉包 $[|A|\mathcal{H}]$ への直交射影 $P_{[|A|\mathcal{H}]}$ に対して $U^*U = P_{[|A|\mathcal{H}]}$ を満たす極分解 $A = U|A|$ を用いて，不等式 (1.3) を一般化する．結果として Theorem A は $|A|$ と $|B|$ の逆元の存在を仮定することなく拡張される．更に，§4 では，等号条件 (1.4) について調べ，前と同様，逆元の存在を仮定することなく等号条件について考察する．得られた結果は [9] の一般化となる．なお，§3, §4 は [10] の概要の紹介となっている．

2000 *Mathematics Subject Classification.* 26D15,47A63.
Key words and phrases. Dunkl-Williams inequality, Bohr inequality, operator inequality.

2. Dunkl-Williams inequalities と その関連事項

本節では，はじめに 1964 年に C.F. Dunkl と K.S. Williams により導かれた次の興味深い不等式と，その証明について紹介する：

Theorem B. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}. \tag{1.1}$$

Proof. 次のノルムの計算を行う：

$$\begin{aligned}
\|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &\leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| + \|x\| \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \|x-y\| + \frac{\|(\|y\|-\|x\|)y\|}{\|y\|} \\
&\leq \|x-y\| + |\,\|y\|-\|x\|\,| \leq 2\|x-y\|.
\end{aligned}$$

同様にして次を得る：

$$\|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\|x-y\|.$$

よって，不等式 (1.1) が得られる. □

特に，$\mathcal{X}$ が内積空間の場合，より精密な不等式が得られる：

Theorem C. 内積空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}. \tag{2.1}$$

Proof. 次のノルム・内積の計算を行う：

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\{2\|x\|\,\|y\| - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle\} \\
&= \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\{2\|x\|\,\|y\| - (\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2)\} \\
&= \frac{\|x-y\|^2 - (\|x\|-\|y\|)^2}{\|x\|\,\|y\|}.
\end{aligned}$$

このことより

$$\begin{aligned}
&\|x-y\|^2 - \left(\frac{\|x\|+\|y\|}{2}\right)^2 \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\
&= \frac{(\|x\|-\|y\|)^2}{4\|x\|\,\|y\|}\left\{(\|x\|+\|y\|)^2 - \|x-y\|^2\right\} \geq 0.
\end{aligned}$$

よって，不等式 (2.1) が得られる. □

続いて同じく 1964 年に W. Kirk と M. Smiley は，内積空間への特徴付けを行った [5]：

Theorem D: ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|} \tag{2.2}$$

となる必要十分条件は $\mathcal{X}$ が内積空間になることである.

また，E.R. Lorch は，$\mathcal{X}$ が内積空間である必要十分条件は，$\|x\| = \|y\|$ を満たす $x, y \in \mathcal{X}$ に対して不等式 $\|\alpha x + \alpha^{-1} y\| \geq \|x+y\|$ が任意の正数 α で成り立つことであると示した.
更に，[3] では，不等式 (1.1) や (2.1) にそれぞれ現れるある種の評価値「4」,「2」に着目し，次の the Dunkl-Williams constant を導入した：

$$\mathrm{DW}(\mathcal{X}) := \sup\{\mathrm{dw}(x,y) : x, y \in \mathcal{X}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq y\},$$

where $\mathrm{dw}(x,y) = \frac{\|x\|+\|y\|}{\|x-y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$. この Dunkl-Williams constant $\mathrm{DW}(\mathcal{X})$ には次のような興味深い性質がある：

① $2 \leq \mathrm{DW}(\mathcal{X}) \leq 4$.
② $\mathrm{DW}(\mathcal{X}) = 2 \iff \mathcal{X}$: 内関空間.
③ $\mathrm{DW}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) = \mathrm{DW}(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) = 4$.
④ $\mathrm{DW}(\mathcal{X}) < 4 \iff \mathcal{X}$ は uniformly nonsquare である：If there exists $\delta > 0$ such that for any pair $x, y \in B_{\mathcal{X}} (= \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\})$,
$$\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq \delta.$$

次に (1.1) の精密化を考える．最近，三角不等式に関わる次の研究を行った [4] (cf. [6])：

Theorem E. バナッハ空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|x+y\| + \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \\
&\leq \|x\| + \|y\| \\
&\leq \|x+y\| + \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}.
\end{aligned}$$

Theorem E の第 2 不等式において y を $-y$ で置き換えることにより，不等式 (1.1) をよりよく評価した次の定理を得ることが出来る：

Theorem F. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y (\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\|x-y\| + |\,\|x\| - \|y\|\,|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \tag{2.3}$$

更に，(1.1) の逆不等式を与える：

Theorem G. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \frac{\|x-y\| - |\,\|x\| - \|y\|\,|}{\min\{\|x\|, \|y\|\}}. \tag{2.4}$$

次に，不等式 (2.3) から導かれる結果を紹介する．Massera-Schaffer 不等式が $\|x-y\| + |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq 2\|x-y\|$ から得られる [7]：

Theorem H. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \tag{2.5}$$

また，任意の $x, y \in \mathcal{X}$ に対して

$$\|x-y\| + |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \sqrt{2}\sqrt{\|x-y\|^2 + (\|x\| - \|y\|)^2} \leq 2\|x-y\|$$

となるので [9] において考えられている次の結果を得ることが出来る：

Theorem I. ノルム空間 $\mathcal{X}$ 上の任意の元 $x, y(\neq 0)$ に対して

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{\|x-y\|^2 + (\|x\| - \|y\|)^2}}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \tag{2.6}$$

3. Dunkl-Williams operator inequality (1.3) の一般化

次の定理は，不等式 (1.3) の一般化である：

Theorem 3.1. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし，実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき

$$|(U-V)|A||^2 \;\leq\; p|A-B|^2 + q(|A| - |B|)^2. \tag{3.1}$$

不等式 (3.1) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$p(A-B) = qV(|B| - |A|) \quad and \quad U^*U = V^*V. \tag{3.2}$$

上記の Theorem 3.1 を証明するために，次の 2 つの補題を用意する：

Lemma 3.2. ([2, Corollary 1]) 作用素 A, B と，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす実数 $p, q > 1$ をとる．このとき

$$|A-B|^2 \;\leq\; p|A|^2 + q|B|^2. \tag{3.3}$$

不等式 (3.3) の等号が成り立つための必要十分条件は $pA = -qB$.

不等式 (3.3) は，Bohr inequality [8, p.312] の作用素への拡張である．

Lemma 3.3. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし，実数 $p, q \in \mathbb{R}$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．また，$p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ と仮定する．このとき

$$p|A - B|^2 \leq q(|A|^2 - |B|^2).$$

特に，$p > 1$ ならば，$|A| \geq |B|$, $U^*U \geq V^*V$ である．更に，$U^*U = V^*V$ ならば $p|A - B|^2 = q(|A|^2 - |B|^2)$ である．

Proof. 等号 $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ より

$$|p(A - qB)|^2 = |-qV|A||^2 = q^2|A|V^*V|A| \leq q^2|A|^2.$$

一方，

$$|p(A - qB)|^2 = p^2\{(1-q)|A|^2 + (q^2 - q)|B|^2 + q(|A - B|^2\}.$$

なので $p|A - B|^2 \leq q(|A|^2 - |B|^2)$ を得る． □

次に，これら 2 つの補題を用いて Theorem 3.1 の証明を行う：

Proof of Theorem 3.1. 等式 $|(U - V)|A||^2 = |A - B - V(|A| - |B|)|^2$ が成り立つから，Lemma 3.2 を作用素 $A - B$ と $V(|A| - |B|)$ とに適用することより，

$$|(U - V)|A||^2 \leq p|A - B|^2 + q|V(|A| - |B|)|^2 \tag{3.4}$$
$$\leq p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2. \tag{3.5}$$

Lemma 3.2 より，不等式 (3.4) の等式が成立する必要十分条件は $p(A-B) = qV(|B|-|A|)$. また，不等式 (3.5) の等号が成り立つための必要十分条件は $V^*V|A| = |A|$. よって $U^*U \leq V^*V$. 一方，条件 $p(A - B) = qV(|B| - |A|)$ より，$U^*U \geq V^*V$ であることが Lemma 3.3 を用いて得られる．

逆に，条件 $U^*U = V^*V$ より $V^*V(|A| - |B|) = |A| - |B|$ が得られるので，不等式 (3.4) と (3.5) の等号が成り立つ． □

Corollary 3.4. *Theorem A* は，*Theorem 3.1* から導かれる．

Proof. 3 つの関係式 $U = A|A|^{-1}$, $V = B|B|^{-1}$, $U^*U = V^*V = I$ から

$$\begin{aligned} |A|A|^{-1} - B|B|^{-1}|^2 &= |A|^{-1}|(U - V)|A||^2|A|^{-1} \\ &\leq |A|^{-1}(p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2)|A|^{-1} \quad \text{(by (3.1))}. \end{aligned}$$

不等式 (1.3) の等号が成り立つための必要十分条件は

$$p(A - B)|A|^{-1} = qV(|B| - |A|)|A|^{-1} = qB(|A|^{-1} - |B|^{-1}).$$

ゆえに，Theorem A が導かれる． □

4. THEOREM 3.1 の等号条件について

本節では，Theorem 3.1 における等号成立 (3.2) について精査する．はじめに，Theorem 3.1 の等号条件に関わる次の結果について述べる：

Proposition 4.1. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし，実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．また $U^*U = V^*V$ とする．このとき，次は同値である：

$$\text{(i)} \quad p(A - B) = qV(|B| - |A|).$$

$$\text{(ii)} \quad |A| = |B| + \frac{p}{q}|A - B|, \quad A - B = -V|A - B|.$$

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) のみを証明する．$p^2|A-B|^2 = q^2(|B|-|A|)^2$ なので $q(|A|-|B|) = p|A-B|$ となる．更に，$A - B = \frac{q}{p}V(|B| - |A|) = -V|A - B|$ が得られる． □

Theorem 3.1 と Proposition 4.1 の等号条件により，次の系が導かれる：

Corollary 4.2. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし，実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき

$$|(U - V)|A||^2 \;=\; p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2$$

ならば

$$|A| = |B| + \frac{p}{q}|A - B|, \quad A - B = -V|A - B|.$$

次に，不等式 (3.1) における等号の特徴付けを行う．その準備として次の 2 つの補題を用意し，その証明を与える：

Lemma 4.3. ([9, Lemma 2.9]) 正作用素 $S, T \in B(\mathcal{H})$ が，ある $t \in \mathbb{R}$ に対して $ST+TS = tS^2$ を満足するとき，次は同値である：

$$\text{(i)} \quad t < 0 \;\Rightarrow\; S = 0.$$

$$\text{(ii)} \quad t \geq 0 \;\Rightarrow\; ST = TS = \tfrac{1}{2}tS^2.$$

Proof. 作用素 $S^2T(= S(tS^2 - TS)$ は自己共役である．だから，S^2 と T は可換なので，S と T は可換である．$t < 0$ のとき $2ST = tS^2 \leq 0$ なので，$S = 0$ となる．一方，$t \geq 0$ のとき $2ST = tS^2$ が導かれる． □

Lemma 4.4. 作用素 $A, B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A = U|A|$, $B = V|B|$ とし，実数 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき

$$|(U - V)|A||^2 \;=\; p|A - B|^2 + q(|A| - |B|)^2. \tag{4.1}$$

ならば

$$|B||A - B| + |A - B||B| = (2 - p)|A - B|^2. \tag{4.2}$$

Proof. Corollary 4.2 により等式 (4.1) から $C(:= A - B) = -V|C|$ が導かれるので $B^*C = -|B|V^*V|C| = -|B||C|$ が得られる．ゆえに

$$|C + B|^2 \;=\; |C|^2 - |C||B| - |B||C| + |B|^2.$$

一方， Corollary 4.2 より

$$|C+B|^2 \;=\; (|B|+\frac{p}{q}|C|)^2.$$

上記 2 つの等式により

$$(\frac{p^2}{q^2}-1)|C|^2+(\frac{p}{q}+1)|B||C|+(\frac{p}{q}+1)|C||B|=0$$

が導かれる. □

上記 2 つの補題を用いて，不等式 (3.1) の等号条件についてその特徴付けを与える．ここでは，Lemma 4.3 に従い，実数 p で条件分けし，Theorem 4.5 では $p \geq 2$，Theorem 4.6 では $1<p<2$ の場合について述べる．

Theorem 4.5. 作用素 $A,B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A=U|A|$, $B=V|B|$ とし，実数 $p,q>1$ は $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を満たすとする．また $p \geq 2$ とする．このとき，次は同値である：

$$\text{(i)} \quad |(U-V)|A||^2 \;=\; p|A-B|^2+q(|A|-|B|)^2.$$

$$\text{(ii)} \quad A=B.$$

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) のみを証明する．$p>2$ のとき，Lemma 4.4 と Lemma 4.3 より $C(:=A-B)=0$ は明らか．$p=2$ のとき Lemma 4.3 より $|C||B|=0$ なので $|C|V^*V=0$. Corollary 4.2 から $C=-V|C|$ なので $|C|^2=|C|V^*V|C|=0$ を得る. □

Theorem 4.6. 作用素 $A,B \in B(\mathcal{H})$ の極分解を $A=U|A|$, $B=V|B|$ とし，実数 $p,q>1$ は $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を満たすとする．また，$1<p<2$ とする．このとき，次は同値である：

$$\text{(i)} \quad |(U-V)|A||^2 \;=\; p|A-B|^2+q(|A|-|B|)^2.$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} A=B(I-\frac{2}{2-p}W^*W) \\ |A|=|B|(I+\frac{2p}{(2-p)q}W^*W) \end{cases}.$$

ただし，$A-B$ の極分解を $A-B=W|A-B|$ とする．

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) $C=A-B$ とおく．条件 (i) より

$$C=-V|C|, \quad |B||C|+|C||B|=(2-p)|C|^2.$$

このとき，Lemma 4.3 より

$$|B||C|=|C||B|=\frac{1}{2}(2-p)|C|^2.$$

だから，$A|C|=\frac{p}{p-2}B|C|$ が得られる．ここで，$W^*W\mathcal{H}=[|C|\mathcal{H}]$ より

$$AW^*W=\frac{p}{p-2}BW^*W.$$

一方，$(I-W^*W)\mathcal{H}=\mathrm{Ker}C$, から，$A(I-W^*W)=B(I-W^*W)$ が導かれる．よって

$$A \;=\; AW^*W+A(I-W^*W) \;=\; B(I-\frac{2}{2-p}W^*W).$$

更に，

$$-V|C| \;=\; A-B \;=\; -\frac{2}{2-p}V|B|W^*W. \tag{4.3}$$

ここで，Theorem 3.1 より条件 (i) は $U^*U = V^*V$ を与えるので，$V^*V \geq W^*W$ となる．ゆえに，等式 (4.3) より $|C| = \frac{2}{2-p}|B|W^*W$ となる．よって Corollary 4.2 より

$$|A| = |B| + \frac{p}{q}|C| = |B|(I + \frac{2p}{(2-p)q}W^*W).$$

(ii) ⇒ (i) 等式

$$qV(|B| - |A|) = -\frac{2p}{(2-p)}V|B|W^*W = p(A - B)$$

が導かれる．更に，作用素 $I + \frac{2p}{(2-p)q}W^*W$ は可逆なので $[|A|\mathcal{H}] = [|B|\mathcal{H}]$ となる．ゆえに $U^*U = V^*V$．だから，Theorem 3.1 より条件 (i) が導かれる． □

REFERENCES

[1] C.F. Dunkl and K.S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly **71**(1964), 53–54.
[2] O. Hirzallah, *Non-commutative operator Bohr inequality*, J. Math. Anal. Appl. **282**(2003), 578–583.
[3] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and E.M. Mazcuñán-Navarro, *The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure*, J. Math. Anal. Appl. **342**(2008), 298-310.
[4] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl. **10**(2007), 451–460.
[5] W. Kirk and M. Smiley, *Another characterization of inner product spaces*, Amer. Math. Monthly **71**(1964), 890–891.
[6] L. Maligranda, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly **113**(2006), 256–260.
[7] J.L. Massera and J.J. Schaffer, *Linear differential equations and functional analysis, I*, Ann. Math. **67**(1958), 517–573.
[8] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1970.
[9] J. Pečarić and R. Rajić, *Inequalities of the Dunkl-Williams type for absolute value operators*, to appear in J. Math. Inequal.
[10] K. -S. Saito and M. Tominaga, *The Dunkl-Williams type inequality for absolute value operators*, to appear in Linear Algebra Appl.