数理解析研究所講究録
第 1678 巻 2010 年 55-73

正定値行列の空間における平均と関連する Riemann 計量

東北大学・情報科学研究科　日合 文雄 (Fumio Hiai)
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1　序論と動機

$n\times n$ 複素行列の全体 $\mathbb{M}_n=M_n(\mathbb{C})$ は Hilbert-Schmidt 内積 $\langle X,Y\rangle_{\mathrm{HS}}:=\mathrm{Tr}\,X^*Y$ $(X,Y\in\mathbb{M}_n)$ により，n^2 次元 Hilbert 空間である．$X\in\mathbb{M}_n$ の Hilbert-Schmidt ノルムは $\|X\|_{\mathrm{HS}}:=(\mathrm{Tr}\,X^*X)^{1/2}$. ただし Tr は $n\times n$ 行列に対する通常のトレースを表す．$n\times n$ Hermite 行列の全体 $\mathbb{H}_n$ は $\mathbb{M}_n$ の実部分空間であり，n^2 次元の Euclid 空間となる．実際，$H=[H_{ij}]\in\mathbb{H}_n$ に対する n^2 個の座標変数 H_{ii} $(1\le i\le n)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,H_{ij}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Im}\,H_{ij}$ $(1\le i<j\le n)$ をとると，Hilbert-Schmidt 内積を $\mathbb{H}_n$ 上に制限したものは n^2 次元の Euclid 内積となる．$n\times n$ 正定値行列の全体 $\mathbb{P}_n$ は $\mathbb{H}_n$ の開集合であるから，自然に C^∞ 微分多様体の構造が入り，$\mathbb{P}_n$ の各点 D における接平面は $\mathbb{H}_n$ と同一視できる．

任意の $D\in\mathbb{P}_n$ に対して，D の左，右掛算作用素 $\mathbf{L}_D$, $\mathbf{R}_D$ を

$$\mathbf{L}_DX:=DX,\quad \mathbf{R}_DX:=XD,\qquad X\in\mathbb{M}_n$$

と定めると，$\mathbf{L}_D$, $\mathbf{R}_D$ は Hilbert 空間 $(\mathbb{M}_n,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$ 上の可換な正値作用素である．つまり，$\mathbf{L}_D\mathbf{R}_D=\mathbf{R}_D\mathbf{L}_D$ であり，任意の $X\in\mathbb{M}_n$ に対して $\langle X,\mathbf{L}_DX\rangle_{\mathrm{HS}}\ge0$, $\langle X,\mathbf{R}_DX\rangle_{\mathrm{HS}}\ge0$ である．滑らかな核関数 $\phi:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ が与えられたとき，各 $D\in\mathbb{P}_n$ において，$(\mathbb{M}_n,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$ 上の正値作用素 $\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)$ が funcitonal calculus により定義される．つまり，D のスペクトル分解 $D=\sum_{i=1}^k\lambda_iP_i$ を用いて，

$$\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)X:=\sum_{i,j=1}^k\phi(\lambda_i,\lambda_j)\mathbf{L}_{P_i}\mathbf{R}_{P_j}X=\sum_{i=1}^k\phi(\lambda_i,\lambda_j)P_iXP_j,\qquad X\in\mathbb{M}_n.$$

以下では常に ϕ の対称性 $\phi(x,y)=\phi(y,x)$ を仮定する．このとき，$\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)$ は $\mathbb{H}_n$ からそれ自身への可逆作用素であり，

$$\begin{aligned}K_D^\phi(H,K)&:=\langle H,\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)^{-1}K\rangle_{\mathrm{HS}}\\&=\sum_{i,j}\phi(\lambda_i,\lambda_j)^{-1}\mathrm{Tr}\,P_iHP_jK,\qquad H,K\in\mathbb{H}_n\end{aligned}\tag{1.1}$$

により，$\mathbb{H}_n$ 上の正定値内積 (i.e., 計量) K_D^ϕ が定まる．$K_D^\phi(H,K)$ は D の滑らかな関数となるから，K_D^ϕ $(D\in\mathbb{P}_n)$ は多様体 $\mathbb{P}_n$ 上の Riemann 計量である．特に $\phi(x,y)\equiv1$ の場合，(1.1) で定義される Riemann 計量は，平坦な Hilbert-Schmidt 内積 $\langle H,K\rangle_{\mathrm{HS}}$ $(H,K\in\mathbb{H}_n)$ そのものである．(1.1) で $\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)$ の逆作用素をとっているのは，この方面の文献に合わせた便宜的なものである．

ここで，Riemann 計量 (1.1) の設定で，測地距離や測地最短曲線の定義について簡単にまとめておこう．$\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}_n$ を C^1 曲線とするとき (連続曲線で区分的に C^1 である場合でも同様), γ の計量 K^ϕ に関する長さは

$$L_\phi(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{K^\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt = \int_0^1 \|\phi(\mathbf{L}_{\gamma(t)}, \mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-1/2}\gamma'(t)\|_{\mathrm{HS}}\, dt$$

と定義される．$L_\phi(\gamma)$ は γ の径数 (parametrization) のとり方によらないことに注意する．$A, B \in \mathbb{P}_n$ の間の**測地距離** $\delta_\phi(A, B)$ は，γ が A, B を結ぶ C^1 曲線 (C^∞ 曲線に制限しても同じ) 全体にわたるときの $L_\phi(\gamma)$ の下限として定義される．A, B を結ぶ C^1 曲線で $L_\phi(\gamma) = \delta_\phi(A, B)$ を満たすものを**測地最短曲線**という．測地最短曲線は (存在すれば), 定速径数 (i.e., 弧長に比例した径数) をとると，自動的に C^∞ 曲線であり，$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ の意味でいわゆる測地線であることに注意する [21, 33].

量子情報理論や量子情報幾何などで重要な役割を果たしている種々の Riemann 計量は，上の (1.1) で $\phi(x, y)$ が特別な関数の場合に得られるものになっている．このことについて，[18, Introduction] で書いたことのくり返しになるが，この節の残りでいくつかの例を挙げて説明しよう．

例 1.1. (1.1) の形の Riemann 計量で最も古くから議論されている例は，$\phi(x, y) = xy$ の場合である [27, 34, 28, 25, 26, 5]. この例を**統計計量**と呼ぶのは以下の理由による．平均 0 で共分散行列が D (正定値実対称行列) の n 次元 Gauss 分布は密度関数

$$p_D(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det D}} \exp\left(-\frac{\langle x, D^{-1}x\rangle}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

で与えられ，その Boltzmann エントロピー (情報ポテンシャル) は

$$S(p_D) = \frac{1}{2}\log(\det D) + \mathrm{const.}$$

である．$n \times n$ 実対称行列の全体は $n(n+1)/2$ 次元の Euclid 空間であり，$n \times n$ 正定値実対称行列の全体はその開集合である．Gauss 分布と D を同一視することにより，Gauss 分布の集合に C^∞ 微分多様体の構造が自然に入る．その各点の接平面は実対称行列の全体となる．ポテンシャル $S(p_D)$ の Hessian によって導入される Riemann 計量は，この多様体に自然なものである．実際に簡単な計算により，Hessian は

$$g_D(H, K) := \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} S(p_{D+sH+tK})\bigg|_{s=t=0} = \mathrm{Tr}\, D^{-1}HD^{-1}K$$

(H, K は実対称行列) となり，これは (1.1) で $\phi(x, y) = xy$ としたものである (ただし，接平面を実対称行列の空間に制限している). 以下，複素行列に拡張して，$D \in \mathbb{P}_n$, $H, K \in \mathbb{H}_n$ に対して $g_D(H, K) = \mathrm{Tr}\, D^{-1}HD^{-1}K$ を考える．この Riemann 計量は対称性が非常に高い．実際，任意の可逆な $X \in \mathbb{M}_n$ に対して，**合同不変性**

$$g_{XDX^*}(XHX^*, XKX^*) = g_D(H, K)$$

を満たす．この性質により，$A, B \in \mathbb{P}_n$ の間の測地最短曲線を求めるには，I (単位行列) と $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ の間のそれを求めれば十分である．その結果，A, B 間の測地最短曲線は一意に存在して

$$\gamma(t) = A \#_t B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}, \qquad 0 \le t \le 1$$

で与えられることが分かる [25, 26, 5]. この $\gamma(t)$ は幾何補間曲線とも呼ばれ，測地中点 $\gamma(1/2)$ は A, B の**幾何平均**であることに注意する [32, 1]. さらに，A, B の測地距離は

$$\delta(A, B) = \| \log(A^{-1/2} B A^{-1/2}) \|_{\mathrm{HS}}$$

で与えられる．このように，統計計量は幾何平均と密接に関係している．

例 1.2. トレース 1 の $n \times n$ 正定値行列 (i.e., 正定値密度行列) の全体 $\mathcal{D}_n$ は，$\mathbb{P}_n$ の部分多様体として，C^∞ 微分多様体である．各 $D \in \mathcal{D}_n$ の接平面は，トレース 0 の $n \times n$ Hermite 行列の全体 $\mathbb{H}_n \ominus \mathbb{R}I := \{H \in \mathbb{H}_n : \mathrm{Tr}\, H = 0\}$ である．各 $\mathcal{D}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 上に定義された Riemann 計量 K_D (正確には Riemann 計量 K_D の列) が**単調**であるとは，任意のトレースを保存する完全正値写像 (いわゆる CPTP 写像) $\beta : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ に対して

$$K_{\beta(D)}(\beta(H), \beta(H)) \le K_D(H, H), \qquad D \in \mathcal{D}_n,\ H \in \mathbb{H} \ominus \mathbb{R}I$$

が成立するときをいう．古典＝可換 (つまり，多様体 $\{p = (p_1, \dots, p_n) : p_i > 0,\ \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ 上の計量) の場合，Chentsov の定理によれば，単調計量は (スカラー倍を除いて) 唯 1 つであり，**Fisher-Rao 計量**と呼ばれるものである．非可換の場合，Petz [29] によって，単調計量は対称 (i.e., $x f(x^{-1}) = f(x)$, $x > 0$) な作用素単調関数 $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ と次式により 1 対 1 に対応することが示された：

$$K_D^f(H, K) := \langle H, (\mathbf{J}_D^f)^{-1} K \rangle_{\mathrm{HS}},\ \ \mathbf{J}_D^f := f(\mathbf{L}_D, \mathbf{R}_D^{-1}) \mathbf{R}_D, \quad D \in \mathcal{D}_n,\ H, K \in \mathbb{H}_n \ominus \mathbb{R}I. \tag{1.2}$$

この $K_D^f(H, K)$ はそのまま同じ式で $D \in \mathbb{P}_n$ と $H, K \in \mathbb{H}_n$ に拡張される．これと Kubo-Ando [24] による作用素平均の理論と合わせると，(対称) 作用素単調関数，(対称) 作用素平均，単調計量の 3 つの間に 1 対 1 の対応があることが知られる．$f(1) = 1$ を満たし対称な作用素単調関数 $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ に対応する対称作用素平均は

$$\sigma_f(A, B) := A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}, \qquad A, B \in \mathbb{P}_n$$

で定義されるから，K_D^f は

$$K_D^f(H, K) = \langle H, \sigma_f(\mathbf{L}_D, \mathbf{R}_D)^{-1} K \rangle_{\mathrm{HS}}, \qquad D \in \mathbb{P}_n,\ H, K \in \mathbb{H}_n$$

と表すことができ，さらに D が対角行列 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のときは，

$$K_D^f(H, H) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\lambda_j f(\lambda_i/\lambda_j)} |H_{ij}|^2, \qquad H = [H_{ij}] \in \mathbb{H}_n$$

と書くことができる．単調計量 K_D^f $(D \in \mathcal{D}_n)$ はしばしば**量子 Fisher 情報量**と呼ばれる．

例 1.3. 有名な **Wigner-Yanase-Dyson 歪情報量**は，$0 < p < 1$ に対して

$$I_D^{\mathrm{WYD}}(p, K) := -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, [D^p, K][D^{1-p}, K], \qquad D \in \mathcal{D}_n\ K \in \mathbb{H}_n$$

(ただし，$[H, K] := HK - KH$) と定義される．この量は単調 Riemann 計量を用いて

$$I_D^{\mathrm{WYD}}(p, K) = K_D^{f_p}(i[D, K], i[D, K]) \tag{1.3}$$

と定義されることが [31] で示された．ただし，f_p は

$$f_p(x) := p(1-p)\,\frac{(x-1)^2}{(x^p-1)(x^{1-p}-1)}$$

で定義される対称な作用素単調関数である．(正確には，[31] では (1.3) の両辺が比例することが示された.) 最近 Hansen [14] は，WYD 歪情報量の概念を拡張して，正則な (i.e., $f(0) := \lim_{x\searrow 0} f(x) > 0$ である) 任意の対称作用素単調関数に付随した**量子** (または **metric adjusted**) **歪情報量**を

$$I_D^f(K) := \frac{f(0)}{2}\,K_D^f(i[D,K], i[D,K]), \qquad D \in \mathcal{D}_n,\ K \in \mathbb{H}_n$$

と定義している．

例 1.4. 任意の対称な作用素単調関数 f に対して，(1.2) の $\mathbf{J}_D^f$ を用いて定義される

$$\varphi_D[K,K] := \langle K, \mathbf{J}_D^f K\rangle_{\mathrm{HS}}, \qquad D \in \mathcal{D}_n,\ K \in \mathbb{H}_n$$

は一般化された**量子分散**と呼ばれる [30]. D, K が可換のとき，$\varphi_D[K,K] = \mathrm{Tr}\, DK^2$ であることに注意する．この分散は，不確定性原理と関連する不等式についての最近の研究で有用である (例えば [12]).

上記の例 1.1–1.4 で現れる Riemann 計量はすべて，核関数 $\phi : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$ が適当な平均関数 $M(x,y)$ の次数 $\theta \in \mathbb{R}$ のベキ

$$\phi(x,y) = M(x,y)^\theta$$

の場合に (1.1) で定義されるものになっている．こうような形の $\mathbb{P}_n$ 上の Riemann 計量について一般的な性質を研究することは意味があると思われる．以下の節では，論文 [18] とその後の考察を基に，主に測地線の性質を作用素の平均と関連づけた結果について述べる．証明の概略は第 5 節でまとめて説明するが，手法的には微分幾何的というよりむしろ関数解析的である．

2 測地最短曲線と測地距離

まず，2つの正数に対する対称斉次平均の定義 [16] を思い出しておく．関数 $M : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$ が**対称斉次平均**とは，任意の $x, y > 0$ に対して次の性質が成立するときをいう：

- $M(x,y) = M(y,x)$,
- $M(\alpha x, \alpha y) = \alpha M(x,y)$, $\alpha > 0$,
- $M(x,y)$ は x, y について単調非減少,
- $\min\{x,y\} \le M(x,y) \le \max\{x,y\}$.

以下では，このような平均 M で $M(x,y)$ が x,y について滑らかであるもの全体を $\mathfrak{M}_0$ で表す．$M(x,y)=yM(x/y,1)$ であるから，M が滑らかであるためには，$M(x,1)$ が C^∞ であれば十分である．

$M\in\mathfrak{M}_0$ と $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$\phi(x,y):=M(x,y)^\theta$ と定義して，ϕ から (1.1) によって定まる $\mathbb{P}_n$ 上の Riemann 計量 K_D^ϕ $(D\in\mathbb{P}_n)$ を考える．ユニタリ行列 U により $D=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*$ と対角化すると，

$$\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)^{-1/2}H=U\left(\left[\frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda_i,\lambda_j)}}\right]_{ij}\circ(U^*HU)\right)U^*$$

と書くことができるから，

$$K_D^\phi(H,H)=\|\phi(\mathbf{L}_D,\mathbf{R}_D)^{-1/2}H\|_{\mathrm{HS}}^2=\left\|\left[\frac{1}{\sqrt{\phi(\lambda_i,\lambda_j)}}\right]_{ij}\circ(U^*HU)\right\|_{\mathrm{HS}}^2$$

と表されることに注意する．ここで $\circ$ は **Schur 積** (i.e., **Hadamard 積**) を表す．

次の定理は [18, Theorem 3.1] で証明された．

定理 2.1. $M\in\mathfrak{M}_0$ と $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $\phi(x,y):=M(x,y)^\theta$ とすると，*Riemann* 多様体 $(\mathbb{P}_n,K^\phi)$ が完備 (*i.e.,* 測地距離 $\delta_\phi(A,B)$ が完備) であるための必要十分条件は $\theta=2$. したがって，$\theta=2$ ($M\in\mathfrak{M}_0$ は任意) のとき，任意の $A,B\in\mathbb{P}_n$ に対して，A,B を結ぶ K^ϕ に関する測地最短曲線が存在する．

次数が $\theta\neq2$ の場合に今のところ証明できているのは，次の定理と命題に述べる弱い結果である．定理 2.2 は，測地最短曲線の一意性を除いて [18, Theorem 4.10] の拡張になっている．実際，[18, Theorem 4.10] では，$\theta=1$ で M が算術平均と異なる作用素平均である特別の場合に，測地最短曲線の一意性も示した．筆者は，本編で取り扱っている Riemann 計量 K^ϕ については，測地最短曲線の存在と一意性は一般に成立すると予想している．しかし，筆者の知る限りでは，[18] 以前には何の結果もないようである．

定理 2.2. M,θ,ϕ は定理 *2.1* と同じとする．$A,B\in\mathbb{P}_n$ が可換ならば，

$$\delta_\phi(A,B)=\begin{cases}\frac{2}{|2-\theta|}\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}}-B^{\frac{2-\theta}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}} & (\theta\neq2)\\ \|\log A-\log B\|_{\mathrm{HS}} & (\theta=2)\end{cases}$$

であり，

$$\gamma(t)=\begin{cases}\left((1-t)A^{\frac{1-\theta}{2}}+tB^{\frac{2-\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\theta}}, & 0\le t\le1 \quad (\theta\neq2)\\ \exp((1-t)\log A+t\log B), & 0\le t\le1 \quad (\theta=2)\end{cases}$$

が A,B を結ぶ K^ϕ に関する (1 つの) 測地最短曲線である．

命題 2.3. $M\in\mathfrak{M}_0$ と $A,B\in\mathbb{P}_n$ が任意に与えられたとき，それらに依存して θ が 2 に十分近いならば，A,B を結ぶ K^ϕ $(\phi:=M^\theta)$ に関する測地最短曲線が存在する．

3 等長変換の特徴付け

$M, N \in \mathfrak{M}_0$ と $\theta, \kappa \in \mathbb{R}$ に対して，核関数 ϕ, ψ を

$$\phi(x,y) := M(x,y)^{\theta}, \qquad \psi(x,y) := N(x,y)^{\kappa}$$

と定め，Riemann 計量 K^{ϕ}, K^{ψ} を

$$K_D^{\phi}(H,K) := \langle H, \phi(\mathbf{L}_D, \mathbf{R}_D)^{-1}K\rangle_{\mathrm{HS}}, \quad K_D^{\psi}(H,K) := \langle H, \psi(\mathbf{L}_D, \mathbf{R}_D)^{-1}K\rangle_{\mathrm{HS}}$$

と定める．さらに，F は $(0,\infty)$ からそれ自身の上への滑らかな関数で，すべての $x > 0$ で $F'(x) \neq 0$ とする．したがって，F は $(0,\infty)$ からそれ自身への C^{∞} 同相写像である．次の定理は，functional calculus $D \in \mathbb{P}_n \mapsto F(D) \in \mathbb{P}_n$ で定義される $\mathbb{P}_n$ 上の変換により，K^{ψ} が K^{ϕ} の定数倍と等長的になるための特徴付けを与える．作用素・行列の立場から最も自然な $\mathbb{P}_n$ 上の変換は，このように functional calculus で定義されるものである．

定理 3.1. 上述の仮定の下で，$\alpha > 0$ とするとき，変換 $D \in \mathbb{P}_n \mapsto F(D) \in \mathbb{P}_n$ が $(\mathbb{P}_n, \alpha^2 K^{\phi})$ から $(\mathbb{P}_n, K^{\psi})$ の上への等長写像であるための必要十分条件は，以下の (1°)-(5°) のいずれかが成立することである：

(1°) $\theta = \kappa = 0$ であり，$F(x) = \alpha x$, $x > 0$. (この場合，M, N に関係なく，K^{ϕ}, K^{ψ} は *Euclid* 計量である.)

(2°) $\theta \neq 0, 2$, $\kappa = 0$ であり，

$$F(x) = \alpha\left|\frac{2}{2-\theta}\right| x^{\frac{2-\theta}{2}}, \qquad x > 0,$$

$$M(x,y) = \left(\frac{2-\theta}{2} \cdot \frac{x-y}{x^{\frac{2-\theta}{2}} - y^{\frac{2-\theta}{2}}}\right)^{2/\theta}, \qquad x, y > 0.$$

(この場合，N に関係なく K^{ψ} は *Euclid* 計量で，K^{ϕ} は *Euclid* 計量の *pull-back* である.)

(3°) $\kappa \neq 0, 2$, $\theta = 0$ であり，

$$F(x) = \left(\alpha\left|\frac{2-\kappa}{2}\right| x\right)^{\frac{2}{2-\kappa}}, \qquad x > 0,$$

$$N(x,y) = \left(\frac{2-\kappa}{2} \cdot \frac{x-y}{x^{\frac{2-\kappa}{2}} - y^{\frac{2-\kappa}{2}}}\right)^{2/\kappa}, \qquad x, y > 0.$$

(この場合，M に関係なく K^{ϕ} は *Euclid* 計量である.)

(4°) $\theta, \kappa \neq 0, 2$ であり，

$$F(x) = \left(\alpha\left|\frac{2-\kappa}{2-\theta}\right|\right)^{\frac{2}{2-\kappa}} x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}, \qquad x > 0,$$

$$M(x,y) = \left(\frac{2-\theta}{2-\kappa} \cdot \frac{x-y}{x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}} - y^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}}\right)^{2/\theta} N\left(x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}, y^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}\right)^{\kappa/\theta}, \qquad x, y > 0.$$

(5°) $\theta = \kappa = 2$ であり,

$$F(x) = cx^{\alpha}, \quad x > 0 \quad (c > 0 \text{ は定数}),$$
$$M(x,y) = \alpha\left(\frac{x-y}{x^{\alpha}-y^{\alpha}}\right)N(x^{\alpha}, y^{\alpha}), \qquad x, y > 0,$$

または

$$F(x) = cx^{-\alpha}, \quad x > 0 \quad (c > 0 \text{ は定数}),$$
$$M(x,y) = \alpha\left(\frac{x-y}{y^{-\alpha}-x^{-\alpha}}\right)N(x^{-\alpha}, y^{-\alpha}), \qquad x, y > 0.$$

上定理で, (1°), (2°), (3°) は (4°) の特別の場合とみなせるが, 分かりやすくするために細かく場合分けして書いた. この定理は [18] の Theorem 2.1, 3.3 を含んでいることに注意する. 実際, [18, Theorem 2.1] は上の (2°) の場合であり, [18, Theorem 3.3] は上の (5°) で $N(x,y) = \sqrt{xy}$ (よって K^{ψ} は例 1.1 の統計計量) とした特別の場合である.

4　Riemann 計量の 2 種類の等長族

定理 3.1 の (4°), (5°) を考慮して, 任意の $N \in \mathfrak{M}_0$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ および $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, 次の 2 種類の関数族を導入する:

$$N_{\kappa,\theta}(x,y) := \left(\frac{2-\theta}{2-\kappa} \cdot \frac{x-y}{x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}} - y^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}}\right)^{2/\theta} N\left(x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}, y^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}\right)^{\kappa/\theta}, \tag{4.1}$$

$$N_{\alpha}(x,y) := \alpha\left(\frac{x-y}{x^{\alpha}-y^{\alpha}}\right)N\left(x^{\alpha}, y^{\alpha}\right), \qquad x, y > 0. \tag{4.2}$$

特に, $N_{0,\theta}$ ($\kappa = 0$ の場合) は **Stolarsky 平均** [35, 11, 6]

$$S_{\theta}(x,y) := \left(\frac{2-\theta}{2} \cdot \frac{x-y}{x^{\frac{2-\theta}{2}} - y^{\frac{2-\theta}{2}}}\right)^{2/\theta}, \tag{4.3}$$

と一致し, これは以下のいくつかの典型的な平均を補間している:

$$S_{-2}(x,y) = M_{\mathrm{A}}(x,y) := \frac{x+y}{2} \quad (\textbf{算術平均}),$$
$$S_{1}(x,y) = M_{\sqrt{}}(x,y) := \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^{2} \quad (\textbf{ルート平均}),$$
$$S_{2}(x,y) := \lim_{\theta \to 2} S_{\theta}(x,y) = M_{\mathrm{L}}(x,y) := \frac{x-y}{\log x - \log y} \quad (\textbf{対数平均}),$$
$$S_{4}(x,y) = M_{\mathrm{G}}(x,y) := \sqrt{xy} \quad (\textbf{幾何平均}).$$

$S_{\theta}(x,y)$ は θ について狭義単調減少であり [35], S_{θ} が作用素平均であるのは $-2 \le \theta \le 6$ の範囲である [23]. 特に, $S_{-2} = M_{\mathrm{A}}$, $S_{1} = M_{\sqrt{}}$, $S_{2} = M_{\mathrm{L}}$ に対応する単調計量 ($\theta = 1$ の場合) は, それぞれ **Bures-Uhlmann 計量**, **Wigner-Yanase 計量**, **Bogoliubov 計量** (または **Kubo-Mori 計量**) と呼ばれ有名である. 定理 3.1 の (2°) は, Euclid 計量の pull-back になる単調計量は Wigner-Yanase 計量だけであることを示している ([13] の結果).

上で定義した $N_{\kappa,\theta}$ と N_{α} について次が成立する.

命題 4.1.

(a) 任意の $N \in \mathfrak{M}_0$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ に対して,

$$N_{\kappa,\theta}(x,y) = S_{\frac{2(\theta-\kappa)}{2-\kappa}}(x,y)^{\frac{2(\theta-\kappa)}{\theta(2-\kappa)}} N\left(x^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}, y^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}\right)^{\kappa/\theta},$$

$$\lim_{\theta \to 2} N_{\kappa,\theta}(x,y) = M_{\mathrm{L}}(x,y).$$

さらに, $0 \leq \kappa \leq \theta < 2$ または $2 < \theta \leq \kappa$ のとき, $N_{\kappa,\theta} \in \mathfrak{M}_0$.

(b) 任意の $N \in \mathfrak{M}_0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$N_\alpha(x,y) = S_{2-2\alpha}(x,y)^{1-\alpha} N(x^\alpha, y^\alpha),$$

$$\lim_{\alpha \to 0} N_\alpha(x,y) = M_{\mathrm{L}}(x,y).$$

さらに, $0 < \alpha \leq 1$ のとき, $N_\alpha \in \mathfrak{M}_0$.

任意の $N \in \mathfrak{M}_0$ に対して, 定理 3.1 と命題 4.1 は次のことを示す.

(a) $\kappa \in [0, \infty) \setminus \{2\}$ のとき, $K^{N^\theta_{\kappa,\theta}}$ ($\kappa \leq \theta < 2$ または $\kappa \geq \theta > 2$) は, K^{N^κ} から出発して $\theta \to 2$ で $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に収束する Riemann 計量の 1 径数等長族である.

(b) $\kappa = 2$ のとき, $K^{N^2_\alpha}$ ($1 \geq \alpha > 0$) は, K^{N^2} から出発して $\alpha \searrow 0$ で $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に収束する Riemann 計量の 1 径数等長族である.

ここで注目すべき点は, 任意の $N \in \mathfrak{M}_0$ と任意の $\kappa \geq 0$ に対して, K^{N^κ} から出発して $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に収束する 1 径数等長族が引けることである. しかし, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ 自身は他のどの K^{N^κ} とも等長的にならない. この事実から, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ が Riemann 計量の集合 $\{K^{N^\kappa} : N \in \mathfrak{M}_0,\ \kappa \geq 0\}$ において, **アトラクタ** (**吸収点**) として特異的な位置を占めていることがわかる. 実際, 次数 $\theta = 2$ の Riemann 計量の中で, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ は Euclid 計量の pull-back になる唯 1 つのものである. しかし, この pull-back は変換 $D \in \mathbb{P}_n \mapsto \log D \in \mathbb{H}_n$ で与えられ [18, Theorem 2.1], $\mathbb{P}_n$ からそれ自身への変換でないため, 定理 3.1 の特徴付け (2°) の中に現れない. この等長変換 $D \mapsto \log D$ により, 任意の $A, B \in \mathbb{P}_n$ に対して, A, B を結ぶ $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に関する唯 1 つの測地最短曲線が

$$\gamma_{A,B}(t) := \exp((1-t)\log A + t \log B), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

であり, その測地距離が

$$\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(A,B) := \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}}$$

であることが知られる. 変換 $D \mapsto \log D$ の逆変換は Euclid 空間 $\mathbb{H}_n$ の指数座標 e^H ($H \in \mathbb{H}_n$) であるから, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ は指数座標による $\mathbb{H}_n$ の Euclid 計量とみなすことができる. また, Hamiltonian $H \in \mathbb{H}_n$ から Gibbs 密度行列 $e^{-H}/\mathrm{Tr}\, e^{-H}$ への対応からも, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ は基本的な計量と考えられる.

本編の主要な結果である次の 2 つの定理は, $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ が Riemann 計量としての極限点であるばかりでなく, 測地距離と測地最短曲線の意味でも極限点 (アトラクタ) であることを主張する.

定理 4.2. $N \in \mathfrak{M}_0$, $\kappa \in [0,\infty) \setminus \{2\}$, $A, B \in \mathbb{P}_n$ は任意とし，$N_{\kappa,\theta}$ を (4.1) で，N_α を (4.2) で定める.

(a) *Riemann* 計量の 1 径数族 $K^{N^\theta_{\kappa,\theta}}$ ($\kappa \le \theta < 2$ または $2 < \theta \le \kappa$) について，

$$\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,B) = \delta_{N^\kappa}(A_{k,\theta}, B_{\kappa,\theta}) \longrightarrow \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}} \quad (\theta \to 2).$$

ここで

$$A_{\kappa,\theta} := \left(\frac{2-\kappa}{2-\theta}\right)^{\frac{2}{2-\kappa}} A^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}, \qquad B_{\kappa,\theta} := \left(\frac{2-\kappa}{2-\theta}\right)^{\frac{2}{2-\kappa}} B^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}}. \tag{4.4}$$

(b) *Riemann* 計量の 1 径数族 $K^{N^2_\alpha}$ ($0 < \alpha \le 1$) について，

$$\delta_{N^2_\alpha}(A,B) = \frac{1}{\alpha}\,\delta_{N^2}(A^\alpha, B^\alpha) \longrightarrow \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}} \quad (\alpha \searrow 0).$$

定理 4.3. 定理 *4.2* と同じ前提とし，測地最短曲線はすべて定速径数をもつものとする.

(a) A, B に依存して θ が十分 2 に近いならば，(4.4) で定義した $A_{\kappa,\theta}, B_{\kappa,\theta}$ を結ぶ K^{N^κ} に関する測地最短曲線 $\gamma_{A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}}(t)$, $0 \le t \le 1$ が存在する．このとき，A, B を結ぶ $K^{N^\theta_{\kappa,\theta}}$ に関する測地最短曲線は

$$\left(\frac{2-\theta}{2-\kappa}\right)^{\frac{2}{2-\theta}} \left(\gamma_{A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}}(t)\right)^{\frac{2-\kappa}{2-\theta}}, \qquad 0 \le t \le 1 \tag{4.5}$$

であり，

$$\lim_{\theta\to 2}\left(\frac{2-\theta}{2-\kappa}\right)^{\frac{2}{2-\theta}} \left(\gamma_{A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}}(t)\right)^{\frac{2-\kappa}{2-\theta}} = \exp((1-t)\log A + t\log B), \quad 0 \le t \le 1. \tag{4.6}$$

(b) $\gamma_{A^\alpha,B^\alpha}(t)$, $0 \le t \le 1$ を A^α, B^α を結ぶ K^{N^2} に関する測地最短曲線 (定理 *2.1* より存在) とすると，A, B を結ぶ $K^{N^2_\alpha}$ に関する測地最短曲線は

$$\left(\gamma_{A^\alpha,B^\alpha}(t)\right)^{1/\alpha}, \qquad 0 \le t \le 1$$

であり，

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\left(\gamma_{A^\alpha,B^\alpha}(t)\right)^{1/\alpha} = \exp((1-t)\log A + t\log B), \qquad 0 \le t \le 1. \tag{4.7}$$

注意 4.4. 測地最短曲線の収束 (4.6) と (4.7) は，いわゆる **Lie-Trotter 公式**の変形とみなすことができる．他に，似たような Lie-Trotter 公式の変形として，次も知られている [15, Theorem 4.11]: σ が作用素単調関数 f に対応する作用素平均で $s := f'(1)$ とするとき，

$$\lim_{\alpha\to 0}(A^\alpha\,\sigma\,B^\alpha)^{1/\alpha} = \exp((1-s)\log A + s\log B).$$

例 4.5.

(a) $\kappa = 0$ の場合，$N_{0,\theta} = S_\theta$ は Stolarsky 平均 (4.3) である．任意の $A, B \in \mathbb{P}_n$ に対して，$K^{S_\theta^\theta}$ に関する A, B 間の測地距離は

$$\delta_{S_\theta^\theta}(A,B) = \frac{2}{|2-\theta|}\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - B^{\frac{2-\theta}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}},$$

であり，A, B を結ぶ $K^{S_\theta^\theta}$ に関する測地最短曲線は

$$\gamma_{A,B}(t) = \left((1-t)A^{\frac{2-\theta}{2}} + tB^{\frac{2-\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\theta}}$$

の唯 1 つである [18, Theorem 2.1]．このとき，

$$\lim_{\theta\to 2}\frac{2}{|2-\theta|}\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - B^{\frac{2-\theta}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}} = \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}},$$

$$\lim_{\theta\to 2}\left((1-t)A^{\frac{2-\theta}{2}} + tB^{\frac{2-\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\theta}} = \exp((1-t)\log A + t\log B), \qquad 0 \le t \le 1.$$

(b) $N = M_{\mathrm{G}}$ (幾何平均) の場合，$K^{N^2} = K^{M_{\mathrm{G}}^2}$ は統計計量 (例 1.1) であり，

$$N_\alpha(x,y) = \alpha\left(\frac{x-y}{x^\alpha - y^\alpha}\right)(xy)^{\alpha/2}, \qquad x, y > 0$$

である．任意の $A, B \in \mathbb{P}_n$ に対して，$K^{N_\alpha^2}$ に関する A, B 間の測地距離は

$$\delta_{N_\alpha^2}(A,B) = \frac{1}{\alpha}\,\delta_{M_{\mathrm{G}}^2}(A^\alpha, B^\alpha) = \left\|\log(A^{-\alpha/2}B^\alpha A^{-\alpha/2})^{1/\alpha}\right\|_{\mathrm{HS}}$$

であり，A, B を結ぶ $K^{N_\alpha^2}$ に関する測地最短曲線は

$$\gamma_{A,B}(t) = (A^\alpha \#_t B^\alpha)^{1/\alpha}, \qquad 0 \le t \le 1$$

の唯 1 つである [18, Theorem 3.3]．このとき，

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\|\log(A^{-\alpha/2}B^\alpha A^{-\alpha/2})^{1/\alpha}\right\|_{\mathrm{HS}} = \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}}, \tag{4.8}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(A^\alpha \#_t B^\alpha)^{1/\alpha} = \exp((1-t)\log A + t\log B), \qquad 0 \le t \le 1.$$

さらに，(4.8) の収束は単調減少である [3, 2]．

5　定理の証明

この節で主定理の証明の概略について述べよう．

まず，定理 3.1 は [18] の Theorem 2.1, 3.3 の証明を少し修正するだけで証明できる．命題 4.1 は直接計算で簡単である．次に，定理 4.2 の証明に定理 2.2 を使うので，定理 2.2 を先に証明する．

定理 2.2 の証明. A, B を対角行列としてよい．$\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}_n$ を A, B を結ぶ任意の C^1 曲線とし，各 $t \in [0,1]$ に対して，$\gamma(t) = U(t)\mathrm{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))U(t)^*$ と対角化する．ここで，$\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ は連続であり，さらに，高々可算個の分岐点以外では，$\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ および $U(t)$ は C^1 とできる [20]．このとき，[18, Lemma 3.2] の証明と同様にして，可算個の t の点を除いて

$$\|\phi(\mathbf{L}_{\gamma(t)}, \mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-1/2}\gamma'(t)\|_{\mathrm{HS}} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i(t)^{-\theta/2}\lambda_i'(t)\}^2}.$$

2点 $\frac{2}{2-\theta}A^{\frac{2-\theta}{2}}, \frac{2}{2-\theta}B^{\frac{2-\theta}{2}}$ を結ぶ連続曲線を

$$\xi(t) := \mathrm{diag}\left(\frac{2}{2-\theta}\lambda_1(t)^{\frac{2-\theta}{2}}, \ldots, \frac{2}{2-\theta}\lambda_n(t)^{\frac{2-\theta}{2}}\right), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

と定めると，可算個の点を除いて $\xi'(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t)^{-\theta/2}\lambda'(t), \ldots, \lambda_n(t)^{-\theta/2}\lambda_n'(t)\big)$ だから，

$$L_\phi(\gamma) \geq \int_0^1 \|\xi'(t)\|_{\mathrm{HS}}\,dt \geq \frac{2}{|2-\theta|}\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - B^{\frac{2-\theta}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}}.$$

さらに，$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ として，

$$\gamma_0(t) := \mathrm{diag}\left(\left((1-t)\lambda_1^{\frac{2-\theta}{2}} + t\mu_1^{\frac{2-\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\theta}}, \ldots, \left((1-t)\lambda_n^{\frac{2-\theta}{2}} + t\mu_n^{\frac{2-\theta}{2}}\right)^{\frac{2}{2-\theta}}\right), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

とすると，

$$L_\phi(\gamma_0) = \frac{2}{|2-\theta|}\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - B^{\frac{2-\theta}{2}}\right\|_{\mathrm{HS}}$$

と計算できる． □

次の補題の証明は難しくない．

補題 5.1. 任意の $N \in \mathfrak{M}_0$ と $\kappa \in [0,\infty) \setminus \{2\}$ に対して，$N_{\kappa,\theta}$ ($\kappa \leq \theta < 2$ または $2 < \theta \leq \kappa$) と N_α ($0 < \alpha \leq 1$) を (4.1) と (4.2) で定める．任意の $R > 1$ に対して，

$$\lim_{\theta\to 2}\max_{x,y\in[R^{-1},R]}\frac{N_{\kappa,\theta}(x,y)^\theta}{M_{\mathrm{L}}(x,y)^2} = 1,$$

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\max_{x,y\in[R^{-1},R]}\frac{N_\alpha(x,y)^2}{M_{\mathrm{L}}(x,y)^2} = 1.$$

定理 4.2 の証明. (a) $\kappa \leq \theta < 2$ または $2 < \theta \leq \kappa$ とする．定理 3.1 より

$$\lim_{\theta\to 2}\delta_{N_{\kappa,\theta}^\theta}(A,B) = \delta_{M_{\mathrm{L}}^2}(A,B).$$

を示せばよい．定理 2.2 と [18, Lemma 3.2] より，

$$\delta_{N_{\kappa,\theta}^\theta}(A,B) \leq \delta_{N_{\kappa,\theta}^\theta}(A,I) + \delta_{N_{\kappa,\theta}^\theta}(B,I) = \frac{2}{|2-\theta|}\left(\left\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - I\right\|_{\mathrm{HS}} + \left\|B^{\frac{2-\theta}{2}} - I\right\|_{\mathrm{HS}}\right),$$

$$\delta_{M_{\mathrm{L}}^2}(A,B) \leq \delta_{M_{\mathrm{L}}^2}(A,I) + \delta_{M_{\mathrm{L}}^2}(B,I) = \|\log A\|_{\mathrm{HS}} + \|\log B\|_{\mathrm{HS}}.$$

さらに

$$\lim_{\theta\to 2}\frac{2}{|2-\theta|}\Big(\big\|A^{\frac{2-\theta}{2}}-I\big\|_{\mathrm{HS}}+\big\|B^{\frac{2-\theta}{2}}-I\big\|_{\mathrm{HS}}\Big)=\|\log A\|_{\mathrm{HS}}+\|\log B\|_{\mathrm{HS}}.$$

したがって，すべての θ ($\in[\kappa,2)$ または $(2,\kappa]$) に対して

$$\|\log A\|_{\mathrm{HS}}+\|\log B\|_{\mathrm{HS}}<\beta,\quad \frac{2}{|2-\theta|}\Big(\big\|A^{\frac{2-\theta}{2}}-I\big\|_{\mathrm{HS}}+\big\|B^{\frac{2-\theta}{2}}-I\big\|_{\mathrm{HS}}\Big)<\beta$$

となる $\beta>0$ を選ぶことができる．A,B を結ぶ C^1 曲線 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{P}_n$ が $L_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(\gamma)<\beta$ を満たすとすると，

$$\frac{2}{|2-\theta|}\left\|\gamma(t)^{\frac{2-\theta}{2}}-I\right\|=\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(\gamma(t),I)\le\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,\gamma(t))+\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,I)<2\beta.$$

よって，$|2-\theta|<1/\beta$ とすると，

$$(1-\beta|2-\theta|)^{\frac{2}{|2-\theta|}}I\le\gamma(t)\le(1-\beta|2-\theta|)^{-\frac{2}{|2-\theta|}}I.$$

それゆえ，$\lim_{\theta\to2}(1-\beta|2-\theta|)^{\frac{2}{|2-\theta|}}=e^{-2\beta}$ に注意すると，十分小さい $\delta>0$ と $R>e^{2\beta}$ が存在して，($\kappa<$) $2-\delta<\theta<2$ または $2<\theta<2+\delta$ ($<\kappa$) であるとき，A,B を結ぶ C^1 曲線 γ が $L_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(\gamma)<\beta$ を満たすならば，

$$R^{-1}I\le\gamma(t)\le RI,\qquad 0\le t\le 1 \tag{5.1}$$

が成立する．別に，γ が $L_{M^2_{\mathrm{L}}}(\gamma)<\beta$ を満たすならば，

$$\|\log\gamma(t)\|=\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(\gamma(t),I)\le\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(A,\gamma(t))+\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(A,I)<2\beta$$

であるから，(5.1) がやはり成立．

補題 5.1 より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta_0\in(0,\delta)$ が存在して，$2-\delta_0<\theta<2$ または $2<\theta<2+\delta_0$ ならば，

$$\frac{1-\varepsilon}{M_{\mathrm{L}}(x,y)}\le\frac{1}{\sqrt{N_{\kappa,\theta}(x,y)^\theta}}\le\frac{1+\varepsilon}{M_{\mathrm{L}}(x,y)},\qquad x,y\in[R^{-1},R].$$

このとき，A,B を結ぶ C^1 曲線 γ が $L_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(\gamma)<\beta$ または $L_{M^2_{\mathrm{L}}}(\gamma)<\beta$ を満たすならば，

$$(1-\varepsilon)L_{M^2_{\mathrm{L}}}(\gamma)\le L_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(\gamma)\le(1+\varepsilon)L_{M^2_{\mathrm{L}}}(\gamma)$$

を示すことができる．これより，$2-\delta_0<\theta<2$ または $2<\theta<2+\delta_0$ のとき，

$$(1-\varepsilon)\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(A,B)\le\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,B)\le(1+\varepsilon)\delta_{M^2_{\mathrm{L}}}(A,B)$$

であり，結論を得る．

(b) も (a) と同様なやり方で証明できる． □

定理 4.3 の証明のかなりの部分が命題 2.3 のそれと実質的に同じでああるので，命題 2.3 を先に証明すると便利である．

命題 2.3 の証明. 任意の $A,B\in\mathbb{P}_n$ を固定すると，θ が有界な範囲にあれば，$\delta_{M^\theta}(A,B)$ が有界であることに注意する．よって，θ を 2 の近くに制限すれば，$\delta_{M^\theta}(A,B)+\delta_{M^\theta}(A,I)<\beta$ となる $\beta>0$ がとれる．A,B を結ぶ C^1 曲線の列 $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ で $L_{M^\theta}(\gamma_k)\to\delta_{M^\theta}(A,B)$ となるものをとる．このとき，定理 2.2 より

$$\begin{aligned}\frac{1}{|2-\theta|}\left\|\gamma_k(t)^{\frac{2-\theta}{2}}-I\right\|_{\mathrm{HS}}&=\delta_{M^\theta}(\gamma_k(t),I)\le\delta_{M^\theta}(A,\gamma_k(t))+\delta_{M^\theta}(A,I)\\&\le L_{M^\theta}(\gamma_k)+\delta_{M^\theta}(A,I)\longrightarrow\delta_{M^\theta}(A,B)+\delta_{M^\theta}(A,I)\quad(k\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，定理 4.2 の証明と同様にして，θ を 2 に十分近い範囲に制限すれば，ある $R>0$ が存在して

$$R^{-1}I\le\gamma_k(t)\le RI,\qquad k\in\mathbb{N},\ 0\le t\le 1.\tag{5.2}$$

γ_k は定速径数をもつから，各 $k\in\mathbb{N}$ と各 $t\in[0,1]$ ごとに $\gamma_k(t)=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U^*$ と対角化すると，

$$L_{M^\theta}(\gamma_k)=\sqrt{K^{M^\theta}_{\gamma_k(t)}(\gamma_k'(t),\gamma_k'(t))}=\left\|\left[\frac{1}{\sqrt{M(\lambda_i,\lambda_j)^\theta}}\right]_{ij}\circ(U^*\gamma_k'(t)U)\right\|_{\mathrm{HS}}.\tag{5.3}$$

(5.2) と (5.3) から，ある $C>0$ が存在して

$$\|\gamma_k'(t)\|_{\mathrm{HS}}\le C,\qquad k\in\mathbb{N},\ 0\le t\le 1.\tag{5.4}$$

(5.4) より $\{\gamma_k'\}_{k=1}^\infty$ は $L^1([0,1];\mathbb{M}_n)$ において弱位相で相対コンパクトであるから，部分列を選ぶことにより，$\{\gamma_k'\}$ 自身がある $\eta\in L^1([0,1];\mathbb{M}_n)$ に弱収束するとしてよい．$\|\eta(t)\|\le C$ a.e. $t\in[0,1]$ に注意して，

$$\gamma(t):=A+\int_0^t\eta(s)\,ds,\qquad 0\le t\le 1$$

と定めると，$\gamma'(t)=\eta(t)$ a.e. $t\in[0,1]$ であり，

$$\gamma(t)=\lim_{k\to\infty}\left(A+\int_0^t\gamma_k'(s)\,ds\right)=\lim_{k\to\infty}\gamma_k(t),\qquad 0\le t\le 1.\tag{5.5}$$

よって γ も (5.2) を満たすので，γ は $\mathbb{P}_n$ 内にあり，A,B を結ぶ絶対連続曲線である．

(5.4) を使って評価すると，次が示せる：

$$\begin{aligned}\left\|M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta/2}\gamma_k'(t)\right\|_{\mathrm{HS}}&\le C\left\|M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta}-M(\mathbf{L}_{\gamma_k(t)},\mathbf{R}_{\gamma_k(t)})^{-\theta}\right\|^{1/2}\\&\quad+\sqrt{K^{M^\theta}_{\gamma_k(t)}(\gamma_k'(t),\gamma_k'(t))},\qquad 0\le t\le 1\end{aligned}\tag{5.6}$$

(ただし $\|\cdot\|$ は $(\mathbb{M}_n,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}})$ 上の作用素ノルム)．$L^1([0,1];\mathbb{M}_n)$ 上の有界作用素 $\mathbf{A}$ を

$$(\mathbf{A}f)(t):=M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta/2}f(t),\qquad f\in L^1([0,1];\mathbb{M}_n),\ 0\le t\le 1$$

と定義すると，$\mathbf{A}\gamma_k'\to\mathbf{A}\gamma'$ (弱収束) だから，$\|\mathbf{A}\gamma'\|_{L^1}\le\liminf_{k\to\infty}\|\mathbf{A}\gamma_k'\|_{L^1}$，つまり

$$L_\phi(\gamma)=\int_0^1\left\|M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta/2}\gamma'(t)\right\|_{\mathrm{HS}}dt\le\liminf_{k\to\infty}\int_0^1\left\|M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta/2}\gamma_k'(t)\right\|_{\mathrm{HS}}dt.\tag{5.7}$$

また，有界収束定理より

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \|M(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-\theta}-M(\mathbf{L}_{\gamma_k(t)},\mathbf{R}_{\gamma_k(t)})^{-\theta}\|^{1/2}\,dt=0. \tag{5.8}$$

さらに，

$$\int_0^1\sqrt{K^{M^\theta}_{\gamma_k(t)}(\gamma_k'(t),\gamma_k'(t))}\,dt=L_{M^\theta}(\gamma_k)\longrightarrow\delta_{M^\theta}(A,B)\quad(k\to\infty). \tag{5.9}$$

(5.6)-(5.9) を合わせると，$L_{M^\theta}(\gamma)\le\delta_{M^\theta}(A,B)$ を得られる．よって γ は A,B を結ぶ K^{M^θ} に関する測地最短曲線である．上では，γ は絶対連続としか言っていないが，γ が a.e. に定速径数をもつことが示せて，測地最短曲線は一般に局所的に一意であることから [21, Chap. IV, Theorem 3.6]，γ が C^1 曲線 (結果として C^∞ 曲線) であることがいえる． □

定理 4.3 の証明. (a) 任意の $A,B\in\mathbb{P}_n$ を固定して，θ を 2 の近くに制限すると，補題 5.1 より，$\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,B)$ が有界であることがわかる．よって命題 2.3 の証明と同じやり方で，θ ($\in[\kappa,2)$ または $(2,\kappa]$) が 2 に十分近いとき，A,B を結ぶ $K^{N^\theta_{\kappa,\theta}}$ に関する測地最短曲線 γ_θ が存在することが証明できる．このとき，定理 3.1 (4°) の等長変換により，$A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}$ を結ぶ K^{N^κ} に関する測地最短曲線 $\gamma_{A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}}$ を

$$\gamma_{A_{\kappa,\theta},B_{\kappa,\theta}}(t)=\left(\frac{2-\kappa}{2-\theta}\right)^{\frac{2}{2-\kappa}}(\gamma_\theta(t))^{\frac{2-\theta}{2-\kappa}},\qquad 0\le t\le 1$$

と定めると，γ_θ は逆に (4.5) と表すことができる．残りは

$$\lim_{\theta\to2}\gamma_\theta(t)=\gamma_*(t):=\exp((1-t)\log A+t\log B),\qquad 0\le t\le1 \tag{5.10}$$

を示せばよい．定理 2.2, 4.2 より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|2-\theta|}\|\gamma_\theta(t)^{\frac{2-\theta}{2}}-I\|&\le\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,\gamma_\theta(t))+\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,I)\le\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,B)+\delta_{N^\theta_{\kappa,\theta}}(A,I)\\&\longrightarrow\|\log A-\log B\|_{\mathrm{HS}}+\|\log A\|_{\mathrm{HS}}\quad(\theta\to2)\end{aligned}$$

であるから，命題 2.3 の証明と同様にして，θ を 2 に十分近い範囲に制限すれば，

$$R^{-1}I\le\gamma_\theta(t)\le RI,\quad \|\gamma_\theta'(t)\|_{\mathrm{HS}}\le C,\qquad 0\le t\le1$$

となる $R>0$ と $C>0$ を選ぶことができる．(5.10) を示すには，$L^1([0,1];\mathbb{M}_n)$ において $\gamma_\theta'\to\gamma_*'$ (弱収束) を示せば十分である．したがって，$\theta\to2$ のときの $\{\gamma_\theta'\}$ の $L^1([0,1];\mathbb{M}_n)$ における弱位相による極限点を η として，$\eta=\gamma_*'$ を示せばよい．$\theta(k)\nearrow2$ (または $\theta(k)\searrow2$) で $\gamma_{\theta(k)}'\to\eta$ (弱収束) とするとき，補題 5.1 を使って命題 2.3 の証明と同様にして，$\gamma(t):=A+\int_0^t\eta(s)\,ds$, $0\le t\le1$ が A,B を結ぶ $K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に関する測地最短曲線であることが証明できる．$K^{M^2_{\mathrm{L}}}$ に関する測地最短曲線が γ_* 唯 1 つであることから，$\gamma=\gamma_*$, つまり $\eta=\gamma_*'$ である．

(b) も (a) と同様に証明できる． □

6 Riemann 計量の大小関係

この節は [18, Sect. 4] の概要である．一般に核関数で定まる $\mathbb{P}_n$ 上の Riemann 計量の大小関係について，次が成立する．

定理 6.1. $\phi^{(1)}, \phi^{(2)} : (0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ を滑らかで対称な核関数とするとき，次の条件は同値である：

(i) すべての $x, y > 0$ に対して $\phi^{(1)}(x,y) \le \phi^{(2)}(x,y)$;

(ii) すべての $D \in \mathbb{P}_n$ と $H \in \mathbb{H}_n$ に対して $K_D^{\phi^{(1)}}(H,H) \ge K_D^{\phi^{(2)}}(H,H)$;

(iii) $\mathbb{P}_n$ 内のすべての C^1 曲線 γ に対して $L_{\phi^{(1)}}(\gamma) \ge L_{\phi^{(2)}}(\gamma)$;

(iv) すべての $A, B \in \mathbb{P}_n$ に対して $\delta_{\phi^{(1)}}(A,B) \ge \delta_{\phi^{(2)}}(A,B)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) は明らかであり，(iv) $\Rightarrow$ (i) は

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\delta_\phi(D, D+\varepsilon H)}{\varepsilon} = \|\phi(\mathbf{L}_D, \mathbf{R}_D)^{-1/2} H\|_{\mathrm{HS}}, \qquad D \in \mathbb{P}_n,\ H \in \mathbb{H}_n$$

を示すことにより証明される．

例えば，$M \in \mathfrak{M}_0$, $\theta \in \mathbb{R}$ として，すべての $x, y > 0$ に対して $M(x,y)^\theta \le (\ge)\, S_\theta(x,y)^\theta$ のとき，

$$\delta_{M^\theta}(A,B) \ge\ (\le)\, \delta_{S_\theta^\theta}(A,B) = \begin{cases} \frac{2}{|2-\theta|}\|A^{\frac{2-\theta}{2}} - B^{\frac{2-\theta}{2}}\|_{\mathrm{HS}} & (\theta \ne 2) \\ \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}} & (\theta = 2) \end{cases}$$

であり，さらに次が成立：

定理 6.2. $M \in \mathfrak{M}_0$，$\theta \in \mathbb{R}$ として，$A, B \in \mathbb{P}_n$ が $AB \ne BA$ とする．$x \ne y$ であるすべての $x, y > 0$ に対して $M(x,y)^\theta <\ (>)\, S_\theta(x,y)^\theta$ ならば，$\delta_{M^\theta}(A,B) >\ (<)\, \delta_{S_\theta^\theta}(A,B)$.

以下は定理 6.1, 6.2 の応用例である：

- $\theta = 2$ の場合に，$M_{\mathrm{G}}^2 \le M_{\mathrm{L}}^2$ だから
$$\|\log(A^{-1/2}BA^{-1/2})\|_{\mathrm{HS}} \ge \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}}$$
これは **EMI (exponential metric increasing)** と呼ばれる有名な不等式である [27, 4, 5]. 等号成立は $AB = BA$ の場合に限る．

- $\theta = 2$ の場合に，$M_{\mathrm{A}}^2 \ge M_{\mathrm{L}}^2$ だから
$$\delta_{M_{\mathrm{A}}^2}(A,B) \le \|\log A - \log B\|_{\mathrm{HS}}$$
これは上の EMI にならうと，exponential metric decreasing と呼んでもよい．等号成立は $AB = BA$ の場合に限る．

- $\theta = 1$ の場合に，$M_{\mathrm{G}} \le M_{\mathrm{L}} \le M_{\sqrt{}} \le M_{\mathrm{A}}$ だから
$$\delta_{M_{\mathrm{G}}}(A,B) \ge \delta_{M_{\mathrm{L}}}(A,B) \ge 2\|A^{1/2} - B^{1/2}\|_{\mathrm{HS}} \ge \delta_{M_{\mathrm{A}}}(A,B).$$
後ろの 3 項は Bogoliubov, Wigner-Yanase, Bures-Uhlmann 計量の測地距離の大小関係を示す．これは square metric increasing/decreasing と呼んでもよいかもしれない．

7 ユニタリ不変ノルム

$\mathbb{M}_n$ 上のノルム $|||\cdot|||$ が**ユニタリ不変**であるとは，任意の $n\times n$ ユニタリ行列 U,V と $X\in\mathbb{M}_n$ に対して，$|||UXV|||=|||X|||$ であるときをいう．Hilbert-Schmidt ノルム $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ の代わりに一般のユニタリ不変ノルム $|||\cdot|||$ を用いて，C^1 曲線 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{P}_n$ の長さを

$$L_{\phi,|||\cdot|||}(\gamma):=\int_0^1 |||\phi(\mathbf{L}_{\gamma(t)},\mathbf{R}_{\gamma(t)})^{-1/2}\gamma'(t)|||\,dt$$

と定義する．ここで，ϕ は前と同じく，滑らかで対称な核関数とする．さらに，$A,B\in\mathbb{P}_n$ の間の距離 $\delta_{\phi,|||\cdot|||}(A,B)$ を．γ が A,B を結ぶ C^1 曲線全体にわたるときの $L_{\phi,|||\cdot|||}(\gamma)$ の下限として定義する．距離 $\delta_{\phi,|||\cdot|||}$ をもつ多様体 $\mathbb{P}_n$ はもはや Riemann 多様体でなく，ある種の Finsler 型の多様体となる．この種の多様体は，例えば，作用素ノルムの場合に C^*-環の設定で Corach 等 [7, 8] によって研究された．また最近，Fujii [10] は [18] の Theorem 2.1, 3.3 の状況で，ユニタリ不変ノルムの場合に厳密な Finsler 構造が入ることを示している．

上述の定理 3.1 はユニタリ不変ノルムの場合に拡張することができて，次が成立する．

命題 7.1. $|||\cdot|||$ を任意のユニタリ不変ノルムとする．定理 *3.1* と同じ仮定で，変換 $D\in\mathbb{P}_n\mapsto F(D)\in\mathbb{P}_n$ が $(\mathbb{P}_n,\alpha^2\delta_{\phi,|||\cdot|||})$ から $(\mathbb{P}_n,\delta_{\psi,|||\cdot|||})$ の上への等長写像であるための必要十分条件は，定理 *3.1* の (1°)-(5°) のいずれかが成立することである．

ユニタリ不変ノルムから入る C^1 曲線の長さの大小関係については，次が [18, Proposition 5.3] で示された．

命題 7.2. $M^{(1)},M^{(2)}\in\mathfrak{M}_0$, $\theta\in\mathbb{R}$ に対して，$\phi^{(k)}(x,y):=M^{(k)}(x,y)^\theta$, $k=1,2$ とするとき，次の条件は同値である：

(i) $(M^{(1)}(e^t,1)/M^{(2)}(e^t,1))^{\theta/2}$ は $\mathbb{R}$ 上の正定値関数;

(ii) $\mathbb{P}_n$ 内のすべての C^1 曲線 γ とすべてのユニタリ不変ノルム $|||\cdot|||$ に対して $L_{\phi^{(1)},|||\cdot|||}(\gamma)\ge L_{\phi^{(2)},|||\cdot|||}(\gamma)$;

(iii) $\mathbb{P}_n$ 内のすべての C^1 曲線 γ と作用素ノルム $\|\cdot\|$ に対して $L_{\phi^{(1)},\|\cdot\|}(\gamma)\ge L_{\phi^{(2)},\|\cdot\|}(\gamma)$.

上の命題 7.2 から想像されるように，$\phi^{(k)}(x,y):=M^{(k)}(x,y)^\theta$, $k=1,2$ に対して $L_{\phi^{(1)},|||\cdot|||}(\gamma)$ と $L_{\phi^{(2)},|||\cdot|||}(\gamma)$ を比較するために，$M^{(1)}(e^t,1)/M^{(2)}(e^t,1)$ が**無限分解可能**であること，つまり，すべての $r>0$ に対して

$$\left(\frac{M^{(1)}(e^t,1)}{M^{(2)}(e^t,1)}\right)^r$$

が $\mathbb{R}$ 上で正定値関数であることが重要である (詳しくは [18, Sect. 5] 参照)．平均関数の比の関数の無限分解可能性については，Bhatia-Kosaki [5, 22] の研究がある

8 今後の問題

最後に，興味のある問題をいくつか述べる．

問題 8.1. 筆者が一番関心があるのは，測地最短曲線の存在と一意性の問題である．ここで扱っている Riemann 多様体は，次数が $\theta = 2$ の場合を除いて完備でないので (定理 2.1)，測地最短曲線の存在は何か特別な方法で示す必要がある．今のところ，定理 2.2 や命題 2.3 の弱い結果しか得られていない．この問題には微分幾何あるいは微分方程式の手法が有効かもしれないが，筆者にはその方面の知識が乏しいので難しい．

問題 8.2. 測地最短距離が明示的な式で得られているのは，[18] の Theorem 2.1, 3.3 などの場合しかない．これらの以外の場合で明示的な式を得るのはほとんど不可能と思われるが，積分，極限，dilation (purification) などの技法を用いて公式を作ることはできないか．

問題 8.3. Riemann 多様体のスカラー曲率は大きな問題である．Petz, Toth と筆者 [19] は，正定値密度行列の作る多様体上の Bogoliubov 計量のスカラー曲率について，トレース状態の密度行列 (i.e., $n^{-1}I$) でスカラー曲率が最大値をとると予想した．Dittmann [9] は，膨大な計算をしてこの予想を証明しようとしたが，完全には成功しなかった．Bogoliubov 計量のスカラー曲率は正負の両方の値をとるので複雑である．筆者の知る限りでは，上の予想は未解決のようである．他方 Bhatia-Holbrook [5] は，EMI などの定性的な理由から，統計計量 (例 1.1) が負曲率をもつことを主張しているが，スカラー曲率の計算をしているわけではない．

問題 8.4. 無限次元の von Neumann 環，特に II_1 型 von Neumann 環の設定で似たような議論ができないか．von Neumann 環の場合，多様体としての構造がはっきりしないのが難点である．Corach 等がむしろ C^*-環の設定で作用素ノルムの場合に研究したようなやり方でないと上手く行かないのかもしれない．無限次元作用素の空間に計量を入れるには，[17] で解説した二重積分変換 (double integral transformation) の理論が有用であろう．von Neumann 環 (また C^*-環) の設定で有限次元の Riemann 多様体を作る有力な方法は，正作用素の有限次元摂動を考えることである．つまり，有限個の自己共役作用素 $h_0, h_1, \ldots, h_n$ をとって $\left\{\exp\left(h_0 + \sum_{i=1}^n x_i h_i\right) : x_i \in \mathbb{R}\right\}$ を考えると，有限次元の Riemann 多様体の構造が入り，Riemann 計量の議論ができるであろう．

問題 8.5. 量子情報理論，量子情報幾何では，正定値行列の全体 $\mathbb{P}_n$ ではなく，正定値密度行列 (i.e., 正定値でトレース 1 の行列) の全体 $\mathcal{D}_n$ が基本である．量子情報理論への応用を考えるならば，$\mathbb{P}_n$ の部分多様体 $\mathcal{D}_n$ に制限して議論をする必要がある．この場合，測地最短曲線や等長変換を決定する問題がかなり複雑になるように思われる．

参考文献

[1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[2] T. Ando and F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **197/198** (1994), 113–131.

[3] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 167–170.

[4] R. Bhatia, On the exponential metric increasing property, *Linear Algebra Appl.* **375** (2003), 211–220.

[5] R. Bhatia and J. A. R. Holbrook, Riemannian geometry and matrix geometric means, *Linear Algebra. Appl.* **423** (2006), 594–618.

[6] R. Bhatia and H. Kosaki, Mean matrices and infinite divisibility, *Linear Algebra. Appl.* **424** (2007), 36–54.

[7] G. Corach, H. Porta and L. Recht, A geometric interpretation of Segal's inequality $\|e^{X+Y}\| \leq \|e^{X/2}e^{Y}e^{X/2}\|$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 229–231.

[8] G. Corach, H. Porta and L. Recht, Geodesics and operator means in the space of positive operators, *Internat. J. Math.* **4** (1993), 193–202.

[9] J. Dittmann, On the curvature of monotone metrics and a conjecture concerning the Kubo-Mori metric, *Linear Algebra Appl.* **315** (2000), 83–112.

[10] J. I. Fujii, Structure of Hiai-Petz parametrized geometry for positive definite matrices, *Linear Algebra Appl.*, **432** (2010) 318–326.

[11] J. I. Fujii, M. Fujii, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, Continuously differentiable means, *J. Inequal. Appl.* **2006**, Art. ID 75941, 15 pp.

[12] P. Gibilisco, F. Hiai and D. Petz, Quantum covariance, quantum Fisher information and the uncertainty principle, *IEEE Trans. Inform. Theory* **55** (2009), 439–443.

[13] P. Gibilisco and T. Isola, A characterization of Wigner-Yanase skew information among statistically monotone metrics, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **4** (2001), 553–557.

[14] F. Hansen, Metric adjusted skew information, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **105** (2008), 9909–9916.

[15] F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, in *Linear Operators*, J. Janas, F. H. Szafraniec and J. Zemánek (eds.), Banach Center Publications, Vol. 38, 1997, pp. 119–181.

[16] F. Hiai and H. Kosaki, Means for matrices and comparison of their norms, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 899–936.

[17] F. Hiai and H. Kosaki, *Means of Hilbert Space Operators*, Lecture Notes in Math. **1820**, Springer-Verlag, 2003.

[18] F. Hiai and D. Petz, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means, *Linear Algebra Appl.* **430** (2009), 3105–3130.

[19] F. Hiai, D. Petz and G. Toth, Curvature in the geometry of canonical correlation, *Studia Sci. Math. Hungar.* **32** (1996), 235–249.

[20] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1980.

[21] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Wiley Interscience, New York-London, 1963.

[22] H. Kosaki, On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, *J. Funct. Anal.* **254** (2008) 84–108.

[23] H. Kosaki, Notes on the Stolarsky means, Notes, 2008.

[24] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operator*Math. Ann.* **246** (1980), 205–224.

[25] J. D. Lawson and Y. Lim, The geometric mean, matrices, metrics, and more, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001) 797–812.

[26] M. Moakher, A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive definite matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **26** (2005), 735–747.

[27] G. D. Mostow, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Annals Math. Studies 78, Princeton University Press, Princeton, 1973.

[28] A. Ohara, N. Suda and S. Amari, Dualistic differential geometry of positive definite matrices and its applications to related problems, *Linear Algebra Appl.* **247** (1996), 31–53.

[29] D. Petz, Monotone metrics on matrix spaces, *Linear Algebra Appl.* **244** (1996), 81–96.

[30] D. Petz, Covariance and Fisher information in quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 1–11.

[31] D. Petz and H. Hasegawa, On the Riemannian metric of α-entropies of density matrices, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 221–225.

[32] W. Pusz and S. L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, *Rep. Math. Phys.* **8** (1975) 159–170.

[33] 酒井隆，リーマン幾何学，数学選書 11, 裳華房，1992.

[34] L. T. Skovgaard, A Riemannian geometry of the multivariate normal model, *Scand. J. Statistics*, **11** (1984), 211–223.

[35] K. B. Stolarsky, Generalizations of the logarithmic mean, *Math. Mag.* **48** (1975), 87–92.