数理解析研究所講究録
第1679巻 2010年 71-74

Morita equivalences for principal blocks of general linear groups

Naoko Kunugi (Tokyo University of Science)
功刀直子 (東京理科大学・理学部)

1 はじめに

有限群のモジュラー表現における問題は主に，与えられた有限群の素数 p に関する表現の情報は p-部分群の正規化群などの p-局所部分群の表現の情報から得られるのではないか，という考えに基づいている。すなわち，p-局所構造（p-部分群の共役の状況）が同じ2つの有限群のブロックでは，表現論的な情報が保たれるのではないかと考えられ，とくに加群の圏やその導来圏の関係について調べることは重要である。

以下，G を有限群とし，k を標数が p の代数的閉体とする。$B_0(G)$ で G の主ブロック，すなわち，自明な加群を零化しない kG の多元環としての直既約因子を表す。有限群 G_1 と G_2 は，シロー p-部分群 P を共有し，P の任意の部分群 Q_1 と Q_2 について，Q_1 から Q_2 への同型写像が G_1 の元の共役により与えられることと G_2 の元により与えられることが同値となるとき，同じ p-局所構造をもつという。

予想 1 (Broué [2]) 有限群 G_1 と G_2 は同じ p-局所構造をもつとする。このとき，共通のシロー p-部分群 P が可換群であれば，$B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ は導来同値ではないだろうか？

この予想は，シロー p-部分群が非可換の場合には，成立しない例が知られている。しかし，指標の対応などから，シロー p-部分群が非可換の場合でも予想と同様のことが成立すると思われる場合も多い。とくに，有限体上の一般線型群など，Lie 型の系列で現れる群では，シロー p-部分群が可換でない場合でも，p-局所構造に関する条件のもとで系列内の主ブロックは森田同値になるだろうと考えられている。これは，可換シロー p-部分群をもつ場合では，ブルエ予想を確認する過程あるいは結論として，いくつかの場合に確認され

ている。例えば，次の結果がある。

定理 2 (Okuyama-Waki [6, 7]) $p=3$ とし，q_1, q_2 はそれぞれ p とは異なる素数のべきで，$(q_1+1)_3=(q_2+1)_3=3$ が成立しているとする (すなわち，(q_i+1) の 3-部分が 3 である)。このとき，主 3 ブロック $B_0(Sp_4(q_1))$ と $B_0(Sp_4(q_2))$ は森田同値である。

無限系列で現れるブロックにおける森田同値は，次の予想と関係し，とても重要である。

予想 3 (Donovan, [1] 参照) P を有限 p-群とする。不足群 P をもつ有限群のブロックの森田同値類は高々有限個ではないだろうか？

このような無限系列で現れる有限群のブロックの森田同値の問題に対し，次の節において，とくに一般線型群の場合について述べる。

2 一般線型群の場合

以下，p は奇素数であるとし，$G_1=GL_n(q_1)$, $G_2=GL_n(q_2)$ $(p \nmid q_1, q_2)$ とする。また，素数のべき q に対し，

$$e(q) := \min\{e \in \mathbb{N} | q^e \equiv 1 \pmod p\}$$

とする。

考えるべき問題は次の場合で，多くの人により成立が期待されている。

予想 4 $e(q_1)=e(q_2)=e$ とし，$({q_1}^e-1)_p=({q_2}^e-1)_p$ とする。このとき，$B_0(GL_n(q_1))$ と $B_0(GL_n(q_2))$ は森田同値ではないだろうか？

まず，共通のシロー p-部分群 P が可換である場合を考える。Puig [8] により，$e(q)=1$ のとき，$B_0(GL_n(q))$ はシロー p-部分群 P の正規化群 $H(q)=N_{GL_n(q)}(P)$ の主ブロック $B_0(H(q))$ と森田同値になることが示されている。$e=e(q_1)=e(q_2)=1$, $(q_1-1)_p=(q_2-1)_p$ のとき，$B_0(H(q_1))$ と $B_0(H(q_2))$ は同型となることが容易にわかり，これを介して，$B_0(GL_n(q_1))$ と $B_0(GL_n(q_2))$ は森田同値となる (予想 1 も当然成立している)。$e>1$ のとき，予想 1 の解決に関する Chuang-Rouquier [3]，Hida-Miyachi [5, 4], Turner [9] の結果を組み合わせると，やはりシロー p-部分群の正規化群のブロックを介することにより，予想 4 が成立することがわかる。

そこで，シロー p-部分群 P が非可換である場合を考える。このときは，P の正規化群のブロックとの間には森田同値も導来同値も存在せず，直接の議論が必要となる。これに

対し，奥山哲郎，宮地兵衛との共同研究により，次が得られた。

定理 5 (Miyachi-Okuyama-K) $e = e(q_1) = e(q_2) = 1$ とし，$(q_1-1)_p = (q_2-1)_p = p^a$ とする。また，$G_i = GL_p(q_i)$ $(i=1,2)$ とする。このとき，$B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ は森田同値である。とくに，P を G_1 と G_2 の共通のシロー p-部分群としたとき，vertex が $\Delta(P)$ の Scott $k[G_1 \times G_2]$-加群 M が，森田同値を与える。

$e(q) = 1$ のとき，$GL_n(q)$ のシロー p-部分群が可換であるための必要十分条件は，$n < p$ である。よって，定理の設定はシロー p-部分群が非可換になる最初の場合であり，このときの $GL_p(q_i)$ のシロー p-部分群 P は，

$$
\begin{aligned}
P &\cong \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_p \end{pmatrix} ; t_i \in GF(q_i), {t_i}^{p^a} = 1 \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\cong (C_{p^a} \times \cdots \times C_{p^a}) \rtimes C_p \cong C_{p^a} \wr C_p
\end{aligned}
$$

である。

定理 5 の証明の方針について，簡単に述べる。まず，P の部分群 Q で中心 $Z(G)$ のシロー部分群 Z を真に含むものについて，$B_0(C_{G_1}(Q))$ と $B_0(C_{G_2}(Q))$ が森田同値であることを確認する。ここには，例えば，次数 n が p より小さいときの $GL_n(q_1)$ と $GL_n(q_2)$ の主ブロックの森田同値が必要となり，前述の Puig の結果 [8] が使われる。次に，vertex が $\Delta(P)$ の Scott $k[G_1 \times G_2]$-加群 M に $\Delta(Q)$ に関する Brauer construction を施したものが，直既約な $k[C_{G_1}(Q) \times C_{G_2}(Q)]$-加群となることを確認する。これが，証明のなかで重要な部分の一つである。これにより，直前に確認してある $B_0(C_{G_1}(Q))$ と $B_0(C_{G_2}(Q))$ の森田同値をはり合わせることができて，M は $B_0(G_1)$ と $B_0(G_2)$ の間の"Z-射影的な加群を法とした同値"を与えることがわかる。さらに，$-\otimes_{B_0(G_1)} M$ により，単純 $B_0(G_1)$-加群が，Z-射影的な加群を法として，単純 $B_0(G_2)$-加群に移ることを確認する。これには，$B = B_i$ を $GL_p(q_i)$ の Borel 部分群としたとき，$\mathrm{End}_{kG_i}(k_B \uparrow^{G_i}) \cong kS_p$ (S_p は p 次対称群) の構造が使われる。とくに，kS_p のシロー p-部分群が巡回群で，kS_p に現れる Brauer tree が 一直線の形であることが重要である。最後に，単純加群の対応において Z-射影的な加群がでてこないことを確認することにより，M が森田同値を与えると結論づける。

参考文献

[1] J. L. Alperin, Local representation theory, Proc. Sym. Pure Math. **37** (1980), A.M.S., Providence, RI, 369–375.

[2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[3] J. Chuang, R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and sl2-categorification, Ann. of Math. **167** (2008), 245–298.

[4] A. Hida, H. Miyachi, Module correspondences in Rouquier blocks of finite general linear groups, to appear in Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[5] H. Miyachi, Unipotent blocks of finite general linear groups in non-defining characteristic, Ph. D. thesis, Chiba University 2001.

[6] 奥山哲郎, Some examples of derived equivalent blocks of finite groups, in 第6回多元環の表現論シンポジウム報告集 (越谷重夫, 佐藤真久偏) 1996.

[7] T. Okuyama, K. Waki, Decomposition numbers of $\mathrm{Sp}(4,q)$, J. Algebra **199** (1998), no. 2, 544–555.

[8] L. Puig, Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley, Astérisque **181–182** (1990), 221–236.

[9] W. Turner, Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic, J. Algebra **247** (2002), no. 1, 244–267.