

すす燃焼に現れる自己組織化パターン -3変数 Gray-Scott モデルの視点から-

明治大学 先端数理科学インスティテュート
出原浩史 (Hirofumi Izuhara)

Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences, Meiji University

明治大学理工学部数学科 / 先端数理科学インスティテュート
三村昌泰 (Masayasu Mimura)

School of Science and Technology, Department of Mathematics /
Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences, Meiji University

1 はじめに

微小重力環境下でのすす燃焼は地球上のそれとは異なっていることが知られている.[1] 通常の重力環境下で, 紙の中心に着火したとき, 燃焼は同心円状に広がっていくが, 微小重力環境下においては気体の対流がないため, 酸素不足になり燃焼が持続しない. そこである一方向から酸素と窒素の希薄混合気体を供給し, その上で紙の中心に着火する. するとこのとき, スポット状の燃焼が形成され, それらの燃焼スポットは酸素の供給される向きに進み, その結果, たこの足のような数本の燃焼跡が紙の上に残される. このように微小重力環境下での燃焼は通常の重力環境下でのそれとは全く異なる振る舞いを見せる.

O.Zik らはこの微小重力環境下での実験を定性的かつ定量的に調べた. 彼等はある実験装置を用いて微小重力環境での燃焼を実現させた.[2] 紙をサンプル台の上で固定し, その紙をサンプル台と挟むようにガラス板をセットする. このとき, ガラス板とサンプル台との間隔を小さくする. その紙の一方向から酸素と窒素の希薄混合気体を一定濃度, 一定速度で一様に供給し, 気体が供給される逆側の紙の端を熱線で一様に着火する. このようにサンプル台とガラス板との間隔を小さくし, その間に気体を流すことで気体の対流をなくし, 微小重力環境における実験を再現できると考えた. 彼等の実験によると, 気体の供給速度に応じて燃焼跡パターンに大きな違いが現れることが報告されている.

- 気体の供給速度が速いときには, 燃焼は一様に進み, 燃焼面は着火線と並行になる.
- 気体の供給速度を遅くすると, 燃焼は一様に進むが, 燃焼面が波状になる. さらによく燃えた部分とそうでない部分があるため燃焼跡に濃淡が残る.
- 気体の供給速度をさらに遅くすると, スポット状の燃焼が形成され, 燃焼部分と非燃焼部分とが明確になる. この燃焼スポットは先端分裂を繰り返しながら進み, 指状の燃焼跡が残される.

- 気体の供給速度を非常に遅いときには、スポット状の燃焼が形成されるが、先端分裂は生じない。したがって分裂の生じない指状の燃焼跡が紙の上に現れる。

一様に着火し、一様に気体を供給しているにも関わらず、供給速度に応じて燃焼跡が複雑な形状を示す。これらの燃焼跡パターンの形成現象をモデルを用いて数理的に理解しようという試みがなされている。ここでは以下のモデルを用いる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + \omega k(u)vw - au \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -k(u)vw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - k(u)vw + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

ここで u, v, w はそれぞれ温度、紙の密度、酸素の濃度を表し、 ω, a, λ, Le は熱転換率、熱輻射率、酸素の供給速度、レイス数をそれぞれ表している。さらに反応率 $k(u)$ はここで

$$k(u) = \begin{cases} K & u \geq u^* \\ 0 & u < u^* \end{cases}$$

で表し、 u^* は着火温度を意味する。計算領域は2次元矩形領域 $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ とし、境界条件、初期条件はそれぞれ次で与える。

初期条件

$$\begin{cases} u(0, x, y) = u_0(x, y) \\ v(0, x, y) = v_0 \\ w(0, x, y) = w_0 \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega$$

境界条件

$$\begin{cases} u_x(t, 0, y) = u_x(t, L_x, y) = 0 \\ u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, L_y), u(t, x, 0) = u(t, x, L_y) \\ w_x(t, 0, y) = 0, w(t, L_x, y) = w_0 \\ w_y(t, x, 0) = w_y(t, x, L_y), w(t, x, 0) = w(t, x, L_y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} t > 0 \\ 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{array}$$

ここで用いたパラメータは $Le = 0.3$, $\omega = 20.0$, $a = 0.25$, $K = 5.0$, $u^* = 1.0$, $v_0 = 1.0$, $w_0 = 0.1$, $L_x = 200.0$, $L_y = 100.0$ である。

2 シミュレーション

上記モデルにおいて、気体の供給速度に対応するパラメータ λ を下げていくと、実験と対応する結果が得られるのだろうか。以下では我々のシミュレーション結果を示す。図1にあるように、(a) 酸素の供給速度が速いとき ($\lambda = 0.9$) には燃焼は一様に進み、燃焼面は直線的になる。(b) λ を少し下げる ($\lambda = 0.45$) と紙全体にわたって燃焼が生じるが、燃焼跡にはよく燃えている部分とそうでない部分により濃淡が生じる。(c) λ をさらに下げてゆく ($\lambda = 0.21$) と燃焼はスポット状になり、そのスポットは先端分裂を繰り返しながら進む。その結果、燃焼跡には指状のパターンが形成される。

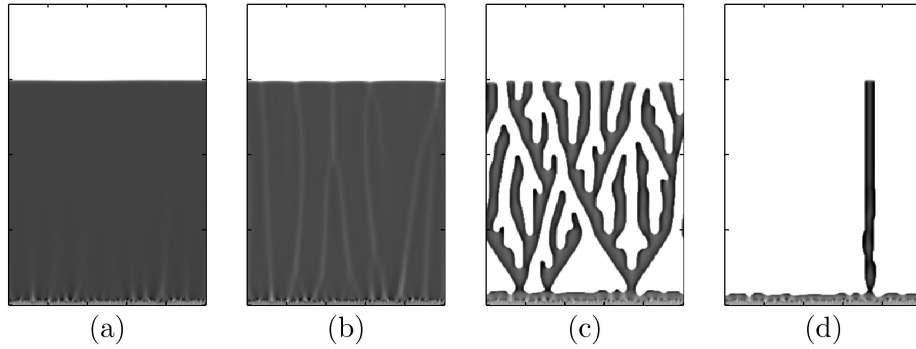


図 1: 左から順に $\lambda = 0.9, \lambda = 0.45, \lambda = 0.21, \lambda = 0.16$ に現れる v の空間パターン.

(d) λ を非常に小さくする ($\lambda = 0.16$) と, スポット状の燃焼が生じるが, そのスポットは先端分裂を起こさずに進む. その結果燃焼跡には分裂が生じない指状のパターンが形成される. このように燃焼モデルは気体の供給速度に対応するパラメータ λ を下げていくと実験で観察されたような燃焼跡パターンが再現されることがわかる.

3 燃焼モデルと Gray-Scott モデルとの関係

燃焼モデルは 3 変数 Gray-Scott モデルと見なすことができるであろう. なぜなら, この燃焼モデルは 2 つの意味で Gray-Scott モデル

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = D_U \Delta U + U^2 V - (F + k)U \\ \frac{\partial V}{\partial t} = D_V \Delta V - U^2 V + F(1 - V) \end{cases}$$

を含んでいることがわかる.

燃焼モデルで $\lambda \rightarrow \infty$ を考える. これは気体の供給速度が非常に速いことを意味する. この極限操作により $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ が得られ, 境界条件から $w = w_0$ が得られる. よって $\lambda \rightarrow \infty$ のときの燃焼モデルは

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le \Delta u + \omega k(u) v w_0 - au \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -k(u) v w_0 \end{cases} \quad (2)$$

と書くことができる. この方程式の u, v は, 上記 Gray-Scott モデルの U, V にそれぞれ対応していると考えると, (2) は Gray-Scott モデルの V の拡散と供給がない系であると分かる.

また一方で, 紙の密度 v は常に一定値 $v = v_0$ であると考えると,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le \Delta u + \omega k(u) v_0 w - au \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - k(u) v_0 w + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

が得られる. この方程式の u, w は上記 Gray-Scott モデルの U, V に対応していると考えられる. しかしながらこの方程式の w において, ある一方向から供給がなされるという点が Gray-Scott モデ

ルとは異なっている. このように燃焼モデルは $u - v$ 系, $u - w$ 系, 2つの意味で Gray-Scott モデルを含んでいることがわかる.

さらに $u - v$ 系では燃焼モデルに現れる多様なパターンは見られなかったが, $u - w$ 系では燃焼モデルに非常に類似したパターンが見られた. ここで, 新たに変数 p を導入し,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + \omega k(u)vw - au \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -k(u)vw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - k(u)vw + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = au \end{cases} \quad (4)$$

と

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + \omega k(u)v_0w - au \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - k(u)v_0w + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = au \end{cases} \quad (5)$$

とで変数 p の空間分布を比較する. この変数 p は温度 u の積算を意味している.

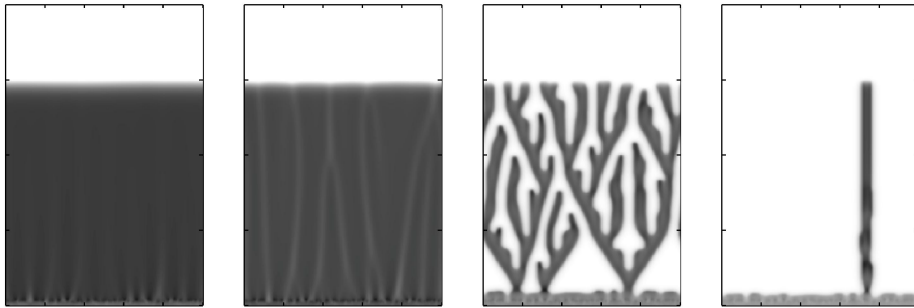


図 2: (4) の p の空間分布. 左から順に $\lambda = 0.9, \lambda = 0.45, \lambda = 0.21, \lambda = 0.16$.

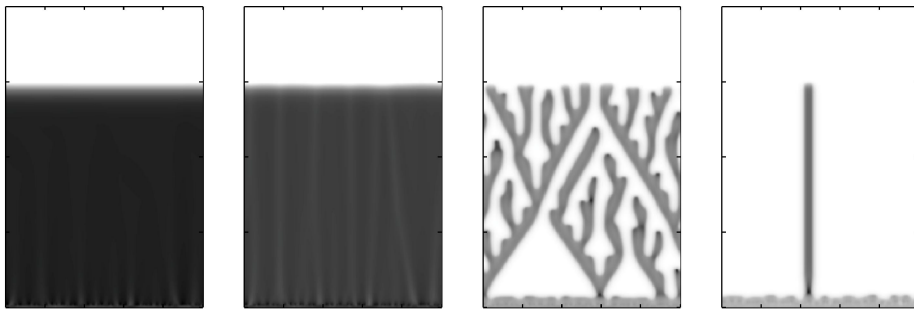


図 3: (5) の p の空間分布. 左から順に $\lambda = 1.2, \lambda = 0.6, \lambda = 0.19, \lambda = 0.124$.

図2, 3からわかるように, (4) と (5) の p のパターンは非常に類似していることが分かる. p の値が高い部分を黒く表示させている. また, (5) においても λ の値を下げていくにつれて実験と同様のパターンが得られることがわかる. そこで, なぜ (3) は (1) と類似の振る舞いをするのかに着目し, (v_0, λ) における出現するパターンの領域を調べた.

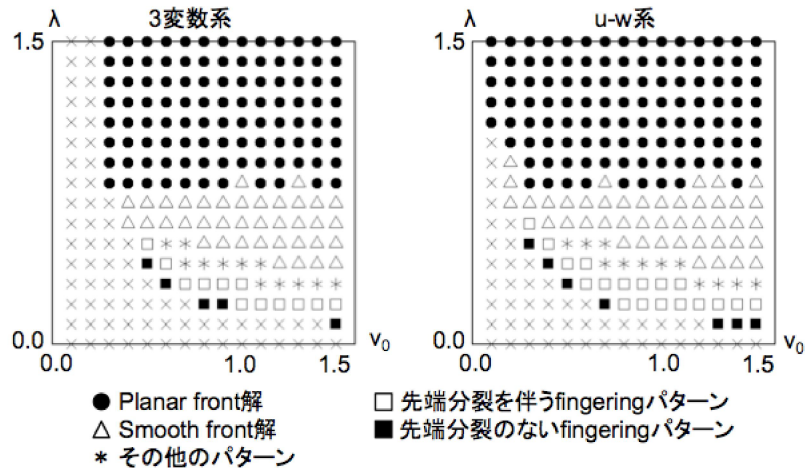


図 4: 横軸 v_0 , 縦軸 λ における得られる燃焼跡パターンの領域

図 4 からわかるように, パターンが出現するパラメータの領域は (3) も (1) も定性的に同じであることがわかる.

4 おわりに

3変数 Gray-Scott モデル (1) と 2変数 $u-w$ 系 (3) ではなぜこのように類似のパターンが出現するのだろうか. (1) の第 2 式において, v は形式的に $v(t, x) = v_0 e^{-\int_0^t k(u)w(s,x)ds}$ と書くことができる. これを第 1, 3 式に代入することで,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Le\Delta u + \omega k(u)v_0 e^{-\int_0^t k(u)w(s,x)ds} w - au \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w - k(u)v_0 e^{-\int_0^t k(u)w(s,x)ds} w + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \quad (6)$$

が得られる. (6) と (3) との違いは方程式に含まれる $e^{-\int_0^t k(u)w(s,x)ds}$ があるか否かであるが, 図 2, 3 で示したように, 類似のパターンが出現している. 我々はこの 2 つの方程式の関連性に注目している.

参考文献

- [1] S.L.Olson, H.R.Baum and T.Kashiwagi, Finger-like smoldering over thin cellulosic sheets in microgravity, The Combustion Institute, (1998)2525-2533.

- [2] O.Zik, Z.Olami and E.Moses, Fingering instability in combustion, *Phys.Rev.Lett.*, 81(1998)3868-3871.
- [3] A. Fasano, H. Izuhara, M. Mimura and M. Primecerio, Traveling wave solutions in a simplified smoldering combustion model, manuscript