

# 自己複製ダイナミクスの数理

九州大学大学院・数理学研究院 栄 伸一郎 (Shin-Ichiro Ei)  
Faculty of Mathematics, Kyushu University

この報告では反応拡散方程式系のさまざまな挙動, 特に自己複製ダイナミクスに注目して, そのダイナミクスをより低次元自由度の系 (いまの場合は常微分方程式系) に帰着することにより解析する. その主な方法は局在解間の弱い相互作用と分岐点近傍における中心多様体の理論である.

## 1 パルス状局在解の相互作用

Gray-Scott モデルをはじめ, 対象となる様々なモデル方程式は未知関数をまとめて  $U = {}^t(u_1, \dots, u_N)$  と表すことにすると一般に

$$U_t = D\Delta U + F(U) \tag{1.1}$$

の形に表すことができる. ここで  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  ( $d_j \geq 0$ ) であり反応項  $F$  は  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^n$  へのなめらかな関数とする. 式 (1.1) のタイプの様々なモデルにおいてパルス状に局在した解が存在する. ここではそうしたパルス状局在解の運動を理論的にどのようにとらえることができるか考えよう.

まず式 (1.1) の空間 1 次元の問題

$$\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

を考え, 式 (1.2) に現れるパルス状またはフロント状局在解の運動を考えることにする. 以降の議論の便宜のためにここで幾つかの用語の意味を明らかにしておく.

$S(x) \in \mathbb{R}^n$  が定常解であるとは  $S(x)$  が式 (1.2) の右辺を 0 として満たすとき, すなわち

$$0 = DS_{xx} + F(S), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

を満たすときいう. ここでは定常解の中でもとくに  $x \rightarrow \pm\infty$  における極限が存在するような  $S(x)$  について考え,  $S(x) \rightarrow S_{\pm}$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) とする.  $S_- = S_+$  のとき  $S(x)$  をパルス状定常解,  $S_- \neq S_+$  のときフロント状定常解と呼ぶことにする (図 1). パルス状定常解のときは, 解に適当に定数を加減することに

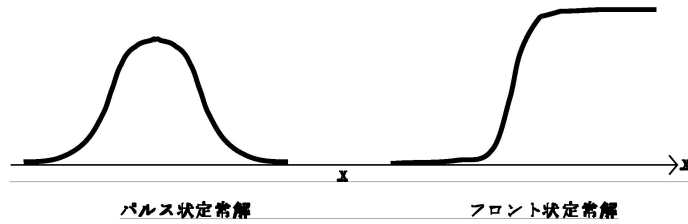


Figure 1.1: パルス状局在解とフロント状局在解.

よって一般性を失うことなく  $S_- = S_+ = 0$  としよことに注意しておく.

ここでは比較的単純なモデル方程式の例をいくつか挙げておく. いずれの例も, 係数がある特定の条件を満たすときにその存在が確認されているわけであるが, ここでは簡単な紹介にとどめ, 条件などについてはとくに述べない. 詳しくは参考文献を参照されたい.

(1) Allen-Cahn 方程式 ([16])

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

ここで  $f(u) = \frac{1}{2}u(1-u^2)$  とする. また,  $\varepsilon$  は正の微小パラメータである. 式 (1.4) においては  $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$  は右辺をちょうど 0 に, すなわち

$$\varepsilon^2 S_{xx} + f(S) = 0$$

を満たすことが容易に分かり, 定常解である. また  $S(x) \rightarrow \pm 1$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) であるから  $S(x)$  はフロント状定常解である.

(2) Gray-Scott 方程式 ([17], [26])

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - uv^2 + A(1-u), \\ v_t = D_v v_{xx} - Bv + uv^2, \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1.5)$$

ここで  $A, B, D$  は正定数である. この方程式に対しては [3] などにより, 定数の適当な条件のもとで  $S(x) \rightarrow (1, 0)$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) を満たすパルス状定常解  $S(x) = (u(x), v(x))$  が存在することがその安定性ととも考察されており, その関数形は図 1.2 のような形である.

(3) 2種競合モデル ([20])

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u-av), \\ v_t = dv_{xx} + v(c-bu-v), \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (1.6)$$

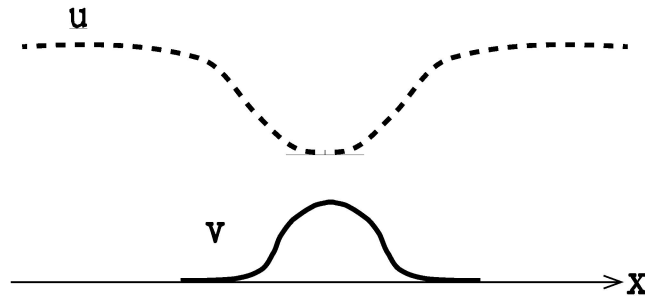


Figure 1.2: Gray-Scott モデルにおけるパルス状定常解.

ここで  $a, b, c, d$  はすべて正定数である. [20] により適当な条件下で  $S(x) \rightarrow S_- := (0, c)$  ( $x \rightarrow -\infty$ ),  $S(x) \rightarrow S_+ := (1, 0)$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) を満たすフロント状定常解  $S(x) = (u(x), v(x))$  が存在することがその安定性ととも考察されており, その形は図 1.3 のようなものである.

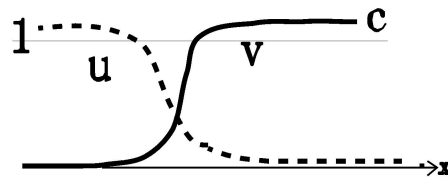


Figure 1.3: 2種競合モデルにおけるフロント状定常解.

これ以外にもさまざまなパルス状定常解やフロント状定常解の例があるが, 紙面の都合上これ以上は挙げない. 興味のある読者はいろいろな参考文献に当たってみることをお勧めする.

さて, ここでの目的は, 上で述べたようなパルス状定常解やフロント状定常解が  $x$ -軸上に複数存在した場合, どのように振る舞うかということを理論的に調べることである. そうした問題の典型例として, 例(1)で述べたアレクサンダー方程式(1.4)のフロント状定常解どうしの相互作用の問題をあげることができる. 式(1.4)は方程式が平行移動や折り返しに関して不変であるから, 一つのフロント状定常解  $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$  を任意に平行移動したもの  $S(x-l)$  や折り返したもの  $S(-x+l)$  もフロント状定常解となる. それでは  $x$ -軸上に2つのフロント状局在定常解  $S_1(x) := S(x-l_1)$  と  $S_2(x) := S(-x+l_2)$  ( $l_1 \ll l_2$ ) があつた場合それらはどのように振る舞うであろうか(図1.4). こ

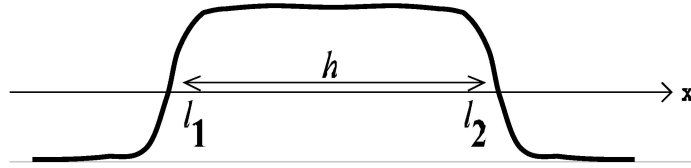


Figure 1.4: 2つのフロント状局在定常解  $S_1$  と  $S_2$ .

れに対して  $\varepsilon$  が十分小のときその運動を与える方程式として近似的に

$$\begin{cases} \dot{l}_1 = 12\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}h}, \\ \dot{l}_2 = -12\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}h} \end{cases} \quad (1.7)$$

が導かれた ([9], [21]). ここで  $h = l_2(t) - l_1(t)$  である. この結果は後に [2] や [15] によって厳密に証明された. 式 (1.7) において辺々引くことによって

$$\dot{h} = -24\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}h} < 0$$

を得る. これは2つのフロントが引き合うことを示している. パターンの時間発展の立場から見ると, フロントが引きあい衝突消滅することによって, 最初あった複数のフロント状定常解が徐々にその数を減らしていく, いわゆる粗視化の過程を経ていくことがわかる. このように, 局在解どうしの相互作用を解析することはパターンの時間発展を考察する上で大変重要な情報を与えてくれることが期待される.

それではつぎに, 一般にどのようにしてその相互作用を記述する方程式を導くことができるかを見ていくことにする.

## 2 相互作用方程式の導出

この節では局在解どうしの相互作用を記述する方程式を形式的に導く方法を示す. 簡単のためパルス状定常解どうしの相互作用についてのみ考えることにするが, その前に安定性の概念について述べておく.

反応拡散系 (1.2) が  $S(x) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) を満たすパルス状定常解  $S(x)$  を持つとする.  $S(x)$  が定常解であればそれを任意に平行移動したもの  $S(x-l)$  もすべて定常解となるから安定性の概念は普通とは若干異なり以下のようになる.

$S(x-l)$  という形の関数からなる定常解の族を

$$\mathcal{M} := \{S(x-l); l \in \mathbb{R}\}$$



とおく. 集合  $\mathcal{M}$  の近くを初期値として出発した式 (1.2) の解  $\mathbf{u}(t, x)$  が  $\text{dist}\{\mathbf{u}(t, \cdot), \mathcal{M}\} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) を満たすとき  $\mathcal{M}$  を軌道漸近安定という. また, ある  $l^* \in \mathbb{R}$  が存在して  $\mathbf{u}(t, x) \rightarrow S(x - l^*)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となるとき定常解族  $\mathcal{M}$  は漸近安定という. 定常解族の漸近安定性に関してつぎの結果がある (例えば [11] などを参照).

微分作用素

$$L\mathbf{u} := D\mathbf{u}_{xx} + F'(S(x))\mathbf{u}, \quad x \in \mathbb{R}$$

を  $S(x)$  に関する線形化作用素という. ここで  $F'(S(x))$  は  $S(x)$  における写像  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  の微分を表し  $n$  次の正方行列である. このとき  $0$  は必ず  $L$  の固有値になることに注意しておく. なぜなら  $S(x)$  は式 (1.3) を満たすから  $x$  で微分することによって  $LS_x = 0$  となり,  $0$  は  $S_x$  を固有関数に持つ固有値であることがわかるからである.

**補題 2.1**  $0$  が  $L$  の単純固有値でそれ以外のスペクトルが虚軸から一様に離れて左半平面内にあるとする. このとき集合  $\mathcal{M}$  は定常解族として漸近安定である. すなわち, ある正定数  $C, \gamma$  があって,  $\mathcal{M}$  の十分近くから出発した解  $\mathbf{u}(t, x)$  に対してある  $l^* \in \mathbb{R}$  が存在し

$$|\mathbf{u}(t, x) - S(x - l^*)| \leq Ce^{-\gamma t}$$

となる.

線形化作用素  $L$  が 補題 2.1 の仮定を満たすとき  $S(x)$  を線形化の意味で安定と呼ぶことにする.

以上の準備をした上で, パルス状定常解の相互作用を考える. いま  $x$ -軸上に, それぞれが単独で存在した場合は線形化の意味で安定な 2 つのパルス状定常解  $S(x - l_1)$  と  $S(x - l_2)$  がその距離を十分大 ( $h = l_2 - l_1 \gg 1$ ) とし てあったとする (これを弱い相互作用という). 各々のパルス状定常解は安定であるから式 (1.2) の解  $\mathbf{u}(t, x)$  は近似的にその和で表されると期待される. すなわち

$$\mathbf{u}(t, x) = S(x - l_1(t)) + S(x - l_2(t)) + \mathbf{v}(t, x) \quad (2.1)$$

と表されると仮定する. ただし  $\mathbf{v}(t, x)$  や  $\dot{l}_j$  は十分小とする. ここで  $\dot{l}_j$  は  $l_j = l_j(t)$  の時間微分を表す.

式 (2.1) を式 (1.2) に代入するとまず左辺は

$$\mathbf{u}_t = -\dot{l}_1 S_x^1 - \dot{l}_2 S_x^2 + \mathbf{v}_t \quad (2.2)$$

となる. ここで  $S^j(x) := S(x - l_j)$  ( $j = 1, 2$ ) である. 一方, 右辺を計算するために式 (1.2) の右辺を  $\mathcal{L}(\mathbf{u}) := D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u})$  とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}) &= \mathcal{L}(S^1 + S^2 + \mathbf{v}) \\ &= \mathcal{L}(S^1 + S^2) + \mathcal{L}'(S^1 + S^2)\mathbf{v} + O(\mathbf{v}^2) \end{aligned}$$

となる. ただし  $\mathcal{L}'(S^1 + S^2)\mathbf{v} = D\mathbf{v}_{xx} + F'(S^1 + S^2)\mathbf{v}$  である.

$S^1(x) = S(x - l_1)$  の運動を考えよう.  $x = l_1$  の近傍では  $S^2(x) = S(x - l_2)$  は十分小であるから近似的に  $\mathcal{L}'(S^1 + S^2)\mathbf{v} \simeq \mathcal{L}'(S^1)\mathbf{v}$  と思ってよいであろう. また,  $\mathbf{v}$  に関する高次項を無視することによれば右辺  $\mathcal{L}(\mathbf{u})$  は  $x = l_1$  の近傍では

$$\mathcal{L}(S^1 + S^2) + \mathcal{L}'(S^1)\mathbf{v} \quad (2.3)$$

で与えられると期待される. 一方式 (2.2) において  $x = l_1$  の近傍ではやはり  $\dot{l}_2$  および  $S_x^2$  とも小さいと仮定されるから, 式 (2.2) は

$$-\dot{l}_1 S_x^1 + \mathbf{v}_t \quad (2.4)$$

となる. 以上式 (2.3), (2.4) より結局  $x = l_1$  の近傍において

$$\mathbf{v}_t = \mathcal{L}'(S^1)\mathbf{v} + \mathcal{L}(S^1 + S^2) + \dot{l}_1 S_x^1 \quad (2.5)$$

を得る.  $x - l_1 \rightarrow x$  と変数を変換すると  $h := l_2 - l_1$  として

$$\mathbf{v}_t = \mathcal{L}'(S(x))\mathbf{v} + \mathcal{L}(S(x) + S(x - h)) + \dot{l}_1 S_x, \quad (2.6)$$

となる. これが  $x = l_1$  の近傍における剰余項  $\mathbf{v}$  の満たす方程式である. 微分作用素  $L\mathbf{v} = \mathcal{L}'(S(x))\mathbf{v} = D\mathbf{v}_{xx} + F'(S(x))\mathbf{v}$  は方程式 (1.2) の定常解  $S(x)$  に関する線形化作用素である. このとき式 (2.6) は

$$\mathbf{v}_t = L\mathbf{v} + g, \quad (2.7)$$

$$g = \mathcal{L}(S(x) + S(x - h)) + \dot{l}_1 S_x$$

と表される. 式 (2.7) において剰余項  $\mathbf{v}$  が  $t$  とともに大きくならないための条件は, その非斉次項  $g$  が  $L$  の共役作用素の固有関数と直交することである. すなわち, 関数空間  $X := L^2(\mathbb{R})$ , 内積  $\langle U, V \rangle_2 := \int_{\mathbb{R}} \langle U(x), V(x) \rangle dx$  および共役作用素  $L^* := D\partial_x^2 + {}^t F'(S(x))$  に対して  $L^*\phi^* = 0$  となる非自明な関数  $\phi^*$  を用いて  $\langle g, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$  が成り立つことである. ここで  ${}^t F'(S(x))$  は  $F'(S(x))$  の転置行列を表す.  $\phi^*$  は定数倍の自由度があるので条件

$$\langle S_x, \phi^* \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} \langle S_x, \phi^* \rangle dx = 1 \quad (2.8)$$

によって正規化しておく. このとき  $\langle g, \phi^* \rangle_{L^2} = 0$  より

$$\dot{l}_1 = -\langle \mathcal{L}(S(x) + S(x - h)), \phi^* \rangle_{L^2} =: -H_1(h) \quad (2.9)$$

を得る. 同様に  $x = l_2$  の近傍で考えることによって

$$\dot{l}_2 = -\langle \mathcal{L}(S(x) + S(x + h)), \phi^* \rangle_{L^2} =: -H_2(h) \quad (2.10)$$

を得る. 式 (2.9), (2.10) が 2 つのパルス状局在解の運動を与える方程式である. とくに辺々引くことによってパルス間  $h = l_2 - l_1$  のみの方程式

$$\dot{h} = H_1(h) - H_2(h) \quad (2.11)$$

を得る.

こうして元々の偏微分方程式 (1.2) の解の (ある特定の) 運動が式 (2.11) に帰着された. 式 (2.11) は 1 変数の常微分方程式でありその解析は式 (1.2) とは比べようもないくらい易しい. このように元々の方程式を遙かに自由度の低い方程式に帰着することを縮約という.

### 3 相互作用方程式の妥当性

前節では形式的な考察によって相互作用方程式を導出したが, それらはつぎのように正当化される ([4]).

まずパルス状定常解の相互作用について述べる.

$S(x)$  をパルス状定常解とする.

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(x-h))|$$

とおく.  $\mathcal{L}(S(x)) = \mathcal{L}(S(x-h)) = 0$  であるから  $\lim_{h \rightarrow \infty} \delta(h) = 0$  が成り立つことに注意しておく. また,  $\tau(l)\mathbf{u} = \mathbf{u}(x-l)$  と定義する (平行移動作用素). 最後に  $S(x)$  は線形化の意味で安定であると仮定する. すなわち  $S(x)$  に関する線形化作用素  $L$  のスペクトルが  $0$  と残りは複素平面上の左半分に, 虚軸から一様に離れて存在すると仮定する. 先にも注意したように  $LS_x = 0$  であるから  $0$  は必ず  $L$  の固有値で対応する固有関数は  $S_x$  である.

このときつぎの結果が成り立つ.

**定理 3.1** 式 (1.2) において初期値が  $S(x-l_1) + S(x-l_2)$  ( $l_1 \ll l_2$ ) に十分近いなら解  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$  はある正定数  $C$  があって

$$|\mathbf{u}(t, x) - \tau(l(t))\{S(x) + S(x-h(t))\}| \leq C\delta(h(t))$$

となる. また,

$$\dot{h} = H_1(h) - H_2(h) + O(\delta^2), \quad (3.1)$$

$$\dot{l} = -H_1(h) + O(\delta^2) \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで  $\delta = \delta(h(t))$  である.

**注 3.1**  $H_j(h) = O(\delta(h))$  ( $j = 1, 2$ ) であるから式 (3.1), (3.2) において  $h$  が十分大である限りつねに  $H_j(h)$  が  $O(\delta^2)$  に比べて支配的である.

$h$  の運動が本質的に式 (2.11) で与えられることが分かったが, その具体的な運動を見るためには  $H_j(h)$  の関数形を知る必要がある. しかし,  $H_j(h)$  は共役作用素の固有関数  $\phi^*(x)$  などを含んでおり, 一般には求めるのが困難である. つぎの結果はある場合には大変単純な形で  $H_j(h)$  が与えられることを主張する.

パルス状定常解  $S(x)$  が対称で  $|x| \rightarrow \infty$  で指数的に 0 に近づくものとする. すなわち, ある正定数  $\alpha$  とあるベクトル  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  があって

$$S(x) \rightarrow e^{-\alpha|x|}\mathbf{a} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

が成り立つとする. またこのとき,  $\phi^*(x)$  は奇関数にとることができるが,  $\phi^*(x)$  の漸近形についても同様の性質

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{-\alpha x}\mathbf{a}^* \quad (x \rightarrow \infty)$$

がある  $\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^n$  について成り立つと仮定する. このとき

**定理 3.2** ある  $\gamma > 0$  があって

$$H_1(h) = M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h})),$$

$$H_2(h) = -M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

が成り立つ.  $M_0$  は

$$M_0 = 2\alpha \langle D\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle$$

で与えられる定数である. したがってとくに

$$\dot{h} = 2M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

を得る.

この定理より, パルス状定常解の相互作用は  $M_0$  の符号でほぼ決まることがわかる. すなわち  $M_0 > 0$  ならば反発的であり,  $M_0 < 0$  ならば互いに引きあうことになる.

これらの定理の証明や進行波まで含めた一般解については [4] を参照されたい.

つぎにフロント状定常解の相互作用について述べる.

$S(x)$  をフロント状定常解とし  $S(x) \rightarrow S_{\pm}$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) を満たすとする. 2つのフロント解  $S(x - l_1)$  と  $S(-x + l_2)$  の相互作用を考えるが, パルス解の相互作用のときとほぼ同じ結論が成り立つ.

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(-x + h) - S_+)|,$$

$$H_1(h) := \langle \mathcal{L}(S(x) + S(-x + h) - S_+), \phi^*(x) \rangle_{L^2},$$

$$H_2(h) := \langle \mathcal{L}(S(x) + S(-x + h) - S_+), \phi^*(-x) \rangle_{L^2}$$

とそれぞれおく. このとき

**定理 3.3** 式 (1.2) において初期値が  $S(x - l_1) + S(-x + l_2) - S_+$  ( $l_1 \ll l_2$ ) に十分近いなら解  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$  はある正定数  $C$  があって

$$|\mathbf{u}(t, x) - \tau(l(t))\{S(x) + S(-x + h(t)) - S_+\}| \leq C\delta(h(t))$$

となる. また,

$$\dot{h} = H_1(h) + H_2(h) + O(\delta^2), \quad (3.3)$$

$$\dot{l} = -H_1(h) + O(\delta^2) \quad (3.4)$$

が成り立つ. ここで  $\delta = \delta(h(t))$  である.

$H_j(h)$  の具体的な関数形はつぎのように求めることができる. ある正定数  $\alpha_{\pm}$  とベクトル  $\mathbf{a}_{\pm} \in \mathbb{R}^n$  があって

$$S(x) - S_{\pm} \rightarrow e^{-\alpha_{\pm}|x|}\mathbf{a}_{\pm} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

が成り立つとする. またこのとき,  $\phi^*(x)$  の漸近形に関しても同様の性質

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{-\alpha_{\pm}x}\mathbf{a}_{\pm}^* \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

がある  $\mathbf{a}_{\pm}^* \in \mathbb{R}^n$  について成り立つと仮定する. このとき

**定理 3.4** ある  $\gamma > 0$  があって

$$H_1(h) = M_+e^{-\alpha_+h} (1 + O(e^{-\gamma h})),$$

$$H_2(h) = M_+e^{-\alpha_+h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

が成り立つ.  $M_+$  は

$$M_+ = 2\alpha_+ \langle D\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_+^* \rangle$$

で与えられる定数である. したがってとくに

$$\dot{h} = 2M_+e^{-\alpha_+h} (1 + O(e^{-\gamma h}))$$

を得る.

以下, 応用例として Allen-Cahn 方程式 (1.4) におけるフロント解  $S(x) = \tanh \frac{x}{2\varepsilon}$  の相互作用方程式をこれまでの結果を用いて導出してみよう.

まず  $S(x) \rightarrow \pm 1$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) より  $S_{\pm} = \pm 1$  である. このとき

$$S(x) - 1 \rightarrow -2e^{-\frac{h}{\varepsilon}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(S(x) + S(-x + h) - S_+)| = O(e^{-\frac{h}{\varepsilon}})$$

である。また線形化作用素は  $Lv = \varepsilon^2 v_{xx} + f'(S(x))v$  よりその共役作用素は  $L$  と一致する;  $L^* = L$ . したがって式 (2.8) により正規化された  $L^* = L$  の固有関数  $\phi^*(x)$  は

$$\phi^*(x) = \frac{3\varepsilon}{2} S_x(x)$$

と求めることができる。とくに

$$\phi^*(x) \rightarrow 3e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3.5)$$

である。こうして定理 3.4 の結果を用いるために必要な各定数が

$$D = \varepsilon^2, \quad \alpha_+ = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \mathbf{a}_+ = -2, \quad \mathbf{a}_+^* = 3$$

と計算され,  $H_j(h)$  が

$$\begin{aligned} H_1(h), H_2(h) &\sim M^+ e^{-\alpha_+ h} = 2\alpha_+ \langle \mathbf{a}_+, D\mathbf{a}_+^* \rangle e^{-\alpha_+ h} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (-2) \cdot \varepsilon^2 \cdot 3 \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} h} \\ &= -12\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon} h} \end{aligned}$$

と求められる。結局  $l_1$  と  $h (= l_2 - l_1)$  の方程式は

$$\begin{cases} \dot{l} &= -H_1(h) + O(\delta^2(h)) \sim 12\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon} h}, \\ \dot{h} &= (H_1(h) + H_2(h)) + O(\delta^2(h)) \sim -24\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon} h}. \end{cases} \quad (3.6)$$

となり式 (1.7) で述べた結果と一致する。

同様にして Gray-Scott 方程式 (1.5) におけるパルス状定常解は反発的に作用することや 2 種競合モデル (1.6) におけるフロント状定常解が互いに吸引的に作用することなどが分かっている。いずれも定理 3.2 や 3.4 における定数  $M_0$  や  $M_{\pm}$  の値を具体的に求めることによって示される。本原稿を読んで興味を持たれた読者は [4] を参照されたい。

## 4 複雑な挙動と分岐現象

前節まではパルス解が線形安定な場合の運動について考察した。しかし前節までの考察から、線形安定な解を考える限り、(少なくとも互いの距離が十分離れている限り) 引きあうか離れあうかわからないことがわかった。それでは自己複製など、パルスの複雑な挙動はどのようにすれば理論的にとらえられるであろうか。この報告の残りではその一つの方法として、解の分岐点近傍における相互作用を考察することにより、自己複製パターンが説明でき

ることを示す. そのために反応項  $F$  に対して  $F = F(U; k)$  というふうに,  $U$  だけでなくあるパラメータ  $k$  にも依存しているとする.

いまパラメータ  $k$  を変化させるときある値  $k_c$  が存在して, その値を境として解の状態が定常状態から別の状態へと変化すると仮定する. 例えば進行パルスや自己分裂などの挙動が  $k_c$  を境として出現するとする. このような値  $k_c$  は**分岐点**と呼ばれる. この節では分岐点近傍における解の挙動に注目し, どのような構造が自己分裂といった挙動を引き起こすのかを調べることを目標とする. なお以降, 微小パラメータに依存しない  $O(1)$  の正定数を一般的に  $C$  と表すことにする.

当分 1 次元の問題

$$\mathbf{u}_t = D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u}; k), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

を考えることとし,  $k = k_c$  においてつぎのような仮定をおく. 以下式 (4.1) の右辺を  $\mathcal{L}(U; k) := DU_{xx} + F(U; k)$  と表す. 考える関数空間は先と同様  $X := L^2(\mathbb{R})$ , 内積  $\langle U, V \rangle_2 := \int_{\mathbb{R}} \langle U(x), V(x) \rangle dx$  である.

以下に分岐に関する幾つかの仮定 (H1), (H2),  $\dots$  をおく.

(H1)  $k = k_c$  においてある対称な定常解  $S(x)$  で  $S(x) \rightarrow \mathbf{0}$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) を満たすものが存在する.

$S(x)$  における線形化作用素  $\mathcal{L}_U(S(x); k_c)$  を  $L$  と表す. すなわち  $LU = DU_{xx} + F'(S(x); k_c)U$  である.  $F'(S(x); k_c)$  は  $F(U; k_c)$  の  $U = S(x)$  におけるヤコビ行列を表す.

いま  $S(x)$  が  $k = k_c$  における定常解であることから  $\mathcal{L}(S(x); k_c) = \mathbf{0}$  を満たしている. したがって  $x$  で微分することにより

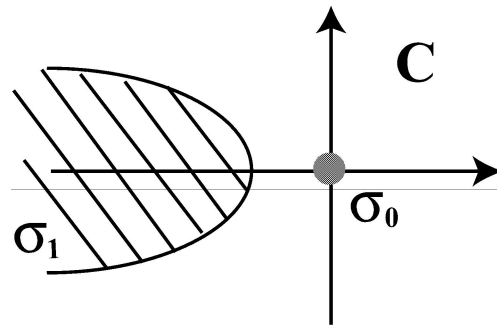
$$LS_x = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

が成り立つことに注意しておく. これは  $L$  が必ず  $0$  を固有値として持つことを意味する.

(H2)  $X$  における  $L$  の  $0$  以外のすべてのスペクトラムは複素平面内の左側半平面内にあり虚軸より一様にある距離だけ離れている (図 4.1).

$\sigma_0 := \{0\}$ , その他のスペクトルの集合を  $\sigma_1$  と表すことにする. 仮定 (H2) よりある正定数  $\gamma_0$  が存在して  $\sigma_1 \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) < -\gamma_0\}$  となる.

$X$  の部分空間  $E$  を  $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} L^n$  と定義する. これを  $0$  固有値に対する**一般固有空間**という. 仮定 (H2) のもとでは  $S(x)$  の安定性に関して補題 2.1 を言い換えるとつぎのようになる.

Figure 4.1:  $L$  のスペクトル分布.

**命題 4.1**  $E$  が  $S_x$  のみで張られる 1次元空間ならば  $k = k_c$  の近傍において定常解の族  $\{S(x; k)\}$ ,  $S(x; k_c) = S(x)$  が存在し定常解  $S(x; k)$  は平行移動を除いて漸近安定である. すなわち  $k_c$  の近傍の  $k$  に対して  $S(x; k)$  の十分近くの任意の初期値から出発した式 (4.1) の解  $U(t, x)$  はある  $l$  に対して  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |U(t, x) - S(x - l; k)| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) を満たす.

命題 4.1 より  $E = \text{span}\{S_x\}$  ならば  $k = k_c$  は分岐点ではないことがわかる. 実際  $S(x)$  の近傍から出発した任意の解は  $S(x)$  またはそれを平行移動したものに近づくだけであるため, 進行パルスや自己分裂の挙動は現れない. そこでつぎの仮定をおくことにする.

H3)  $S_x$  と一次独立なある関数  $\xi(x)$  が存在して  $E = \text{span}\{S_x, \xi\}$  となる.

仮定 H3) により  $k = k_c$  の近傍において解の挙動に質的な変化 (分岐現象) が起きることが期待される. 以下ではどのような条件下でどのような分岐現象が生じるかを見ていくことにする.

## 5 サドル・ノード分岐と中心多様体

この節では前節 H1) ~ H3) の仮定の下, 分岐点  $k = k_c$  の近傍において中心多様体と呼ばれる不変多様体が構成できる.

$k = k_c$  の近傍を考察するために  $k = k_c + \eta$  とおく. また  $F(U; k_c + \eta) = F(U) + \eta g(U; \eta)$ ,  $g(U; \eta) = g_0(U) + O(|\eta|)$ ,  $\mathcal{L}(U; k_c + \eta) = \mathcal{L}(U) + \eta g(U; \eta)$  と表すことにする. このとき式 (4.1) は

$$U_t = \mathcal{L}(U) + \eta g(U; \eta) \quad (5.1)$$

となる.



いくつかの準備をする. まずスペクトル集合  $\sigma_0, \sigma_1$  に対応する射影作用素をそれぞれ  $Q, R$  と表す.  $QX = E$  および  $Q + R = Id$  ( $Id$  は恒等写像) が成り立つことに注意しておく.  $E^\perp := RX$  とおく.

**命題 5.1** (参考 [18])  $L$  から生成される半群を  $e^{tL}$  と表すとき空間  $E^\perp$  は  $e^{tL}$  に関して不変集合であり,  $E^\perp$  上  $\|e^{tL}\| \leq Ce^{-\gamma_0 t}$  が成り立つ.

平行移動作用素  $\tau$  を  $(\tau(l)U)(x) := U(x - l)$ , 集合  $\mathcal{M} := \{\tau(l)S; l \in \mathbb{R}\}$  とすることは前節と同様である.

**命題 5.2** (参考 [4])  $\mathcal{M}$  の近傍の任意の元  $U \in X$  に対してある  $l, r \in \mathbb{R}$ ,  $V \in E^\perp$  が存在して

$$U = \tau(l)\{S + r\xi + V\}$$

と一意に表される.

この表現を用いて式 (5.1) を  $(l, r, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E^\perp$  の方程式に書き換える. まず

$$\begin{aligned} U_t &= -\dot{l}\tau(l)\{S_x + r\xi_x + V_x\} + \tau(l)\{\dot{r}\xi + V_t\} \\ &= \tau(l)\{-\dot{l}S_x - \dot{l}r\xi_x - \dot{l}V_x + \dot{r}\xi + V_t\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

を得る.

一方, 式 (5.1) の右辺は

$$\mathcal{L}(U) + \eta g(U; \eta) = \tau(l)\{\mathcal{L}(S + r\xi + V) + \eta g(S + r\xi + V; \eta)\} \quad (5.3)$$

となるので, 式 (5.2) と式 (5.3) より

$$-\dot{l}S_x - \dot{l}r\xi_x - \dot{l}V_x + \dot{r}\xi + V_t = \mathcal{L}(S + r\xi + V) + \eta g(S + r\xi + V; \eta) \quad (5.4)$$

が成り立つ.  $r, V$  は小としてよいかから式 (5.4) の右辺第 1 項  $\mathcal{L}(S + r\xi + V)$  が

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(S + r\xi + V) &= \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}'(S)(r\xi + V) + O(|r|^2 + |V|^2) \\ &= L(r\xi + V) + O(|r|^2 + |V|^2), \\ \eta g(S + r\xi + V; \eta) &= \eta g_0(S) + O(|r|^2 + |V|^2 + |\eta|^2) \end{aligned}$$

となることに注意すれば, 式 (5.4) の両辺に  $Q, R$  を作用することにより

$$-\dot{l}S_x + \dot{r}\xi \quad (5.5)$$

$$= rL\xi + \eta Qg(S + r\xi + V; \eta) - \dot{l}Q(r\xi_x + V_x) + O(|r|^2 + |V|^2),$$

$$V_t \quad (5.6)$$

$$= LV + \eta Rg(S + r\xi + V; \eta) - \dot{l}R(r\xi_x + V_x) + O(|r|^2 + |V|^2)$$

を得る. ここで  $QS_x = S_x, QV = 0$  などを用いた.

パルスの分裂ダイナミクスにおいてはサドルノード分岐構造が本質的役割を果たしていることがわかってきた. ここでは  $\xi$  が

$$(H5) \quad L\xi = 0$$

を満たす場合を考え, サドルノード分岐と深い関係があることを示す. このときその共役作用素  $L^*$  に対しても同様に, ある  $\phi^*, \xi^*$  が存在して

$$L^*\phi^* = L^*\xi^* = 0$$

を満たす.

関数  $\xi, \phi^*$  および  $\xi^*$  を以下のように正規化しておく:

$$\langle S_x, \phi^* \rangle_2 = \langle \xi, \xi^* \rangle_2 = 1, \quad \langle S_x, \xi^* \rangle_2 = \langle \xi, \phi^* \rangle_2 = 0.$$

ここで関数  $S_x$  は仮定 (H1) より奇関数である. その他の関数に対しては

**命題 5.3**  $\xi, \xi^*$  は偶関数に,  $\phi^*$  は奇関数にとることができる. またこの取り方により  $\phi^*$  は一意に,  $\xi, \xi^*$  は定数倍を除いて一意に決まる.

$\xi, \xi^*$  を一意に決めるために天下りの的ではあるが条件

$$\langle F''(S)\xi \cdot \xi, \xi^* \rangle_2 = 2 \quad (5.7)$$

を課しておく.

いまの場合, 空間  $E = \text{span}\{S_x, \xi\}$  への射影  $Q$  は  $QU = \langle U, \phi^* \rangle_2 S_x + \langle U, \xi^* \rangle_2 \xi$  で与えられる. したがって射影  $R$  により定義される  $E$  の補空間  $E^\perp = RX$  は  $E^\perp = \{U \in X; \langle U, \phi^* \rangle_2 = \langle U, \xi^* \rangle_2 = 0\}$  となる.

これらを用いて中心多様体  $\mathcal{F}$  に沿った運動を求める.  $\mathcal{F}$  上の点は解

$$U(t, x) = \tau(l(t))\{S(x) + r(t)\xi(x) + \Sigma(r(t); \eta)(x)\},$$

$$\|\Sigma(r(t); \eta)\|_Y \leq C(|r(t)|^2 + |\eta|)$$

に対応するから  $V = \Sigma(r; \eta)$  に対して  $|V(t, x)|, |V_x(t, x)| \leq O(|r(t)|^2 + |\eta|)$  が成り立つことに注意すると, 式 (5.5) は

$$-iS_x + r\xi = \eta Qg_0(S) - iO(|r| + |\eta|) + O(|r|^2 + |\eta|^2) \quad (5.8)$$

となるが,  $\phi^*, \xi^*$  の偶奇性に注意してそれぞれ内積をとると

$$\begin{aligned} \dot{l} &= H_1(r, \Sigma(r; \eta); \eta) = O(|r|^2 + |\eta|^2), \\ \dot{r} &= H_2(r, \Sigma(r; \eta); \eta) = \eta \langle g_0(S), \xi^* \rangle_2 + O(|r|^2 + |\eta|^2) \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる。

式 (5.9) 第2式において  $r$  の挙動を知るためにはもう少し詳細な計算が必要である。そのために  $|V(t, x)|, |V_x(t, x)| \leq O(|r(t)|^2 + |\eta|)$  に注意しながら式 (5.4) を展開すると

$$\begin{aligned}
& -\dot{l}\{S_x + r\xi_x + V_x\} + \dot{r}\xi + V_t \\
&= LV - rS_x + \frac{1}{2}r^2F''(S)\xi \cdot \xi + \eta g_0(S) \\
&\quad + O(|r|^3 + |r| \cdot |V| + (|r| + |V|) \cdot |\eta| + |\eta|^2 + |V|^2) \\
&= LV - rS_x + \frac{1}{2}r^2F''(S)\xi \cdot \xi + \eta g_0(S) + O(|r|^3 + |r| \cdot |\eta| + |\eta|^2)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

となるから  $\xi^*$  との内積をとることにより

$$\dot{r} = r^2 - \eta M_2 + O(|r|^3 + |r| \cdot |\eta| + |\eta|^2) \tag{5.11}$$

を得る。ここで  $M_2 := \langle g_0(S), \xi^* \rangle_2$  であり、また正規化条件 (5.7) を用いた。 $|r| \cdot |\eta| \leq O(|r|^3 + |\eta|^{3/2})$  より式 (5.11) は結局

$$\dot{r} = r^2 - \eta M_2 + O(|r|^3 + |\eta|^{3/2}) \tag{5.12}$$

となる。

式 (5.9), (5.12) において高次項を無視した方程式

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 - M_2\eta, \\ \dot{l} = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

を用いて分岐の構造を調べてみよう。ただし  $M_2 > 0$  と仮定する。解は本質的に  $\tau(l)(S + r\xi)$  によって与えられるから、まず第2式より、分岐してくる解は存在するとしてもすべて定常解であることがわかる。つぎに  $r$  に関する第1式を考えると、 $\eta < 0$  では平衡点は存在せずつねに  $\dot{r} > 0$  である。これは  $S(x)$  に対する変形  $r\xi$  が増大することを示している。一方  $\eta > 0$  では  $r_{\pm} := \pm\sqrt{M_2\eta}$  という2つの平衡点が出現し、 $r_+$  は安定、 $r_-$  は不安定である。以上よりその分岐図式は図 5.1 のようになることがわかる。これを**サドル・ノード型分岐**という。

グレイ-スコットモデルにおいては、定常解  $S(x)$  は図 5.2 のような空間的形状をしている。これに対して分岐点における固有関数  $\xi(x)$  の形状は図 5.3 のようである。その形状から  $\xi$  はとくに  $v$  成分に対してへこみを増加させる働きがあると考えられる。したがってダイナミクスも込めた分岐点近傍における分岐図式は図 5.4 のようになることが示唆される。

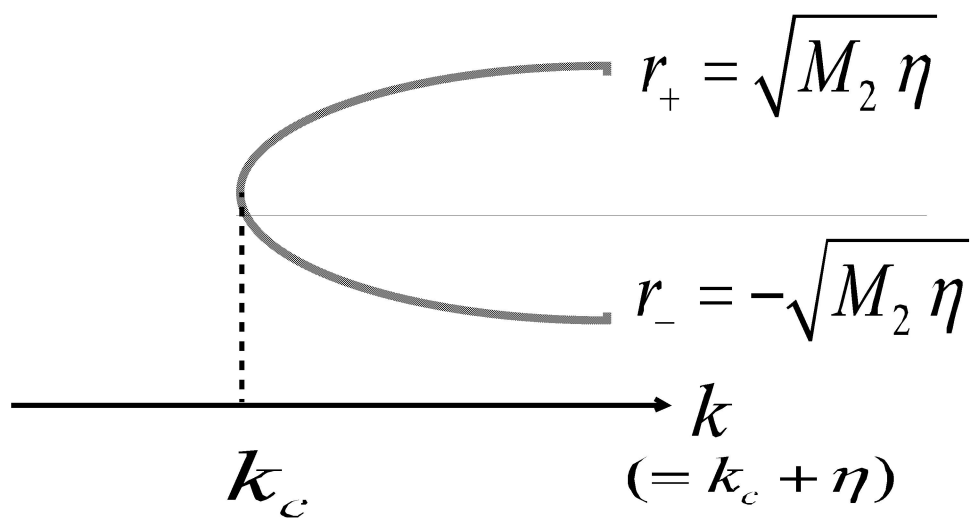


Figure 5.1:  $\eta$  に関する分岐図式.

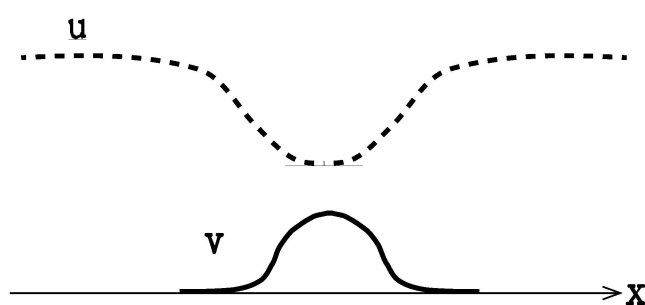


Figure 5.2:  $S(x) = (u(x), v(x))$  の形状.

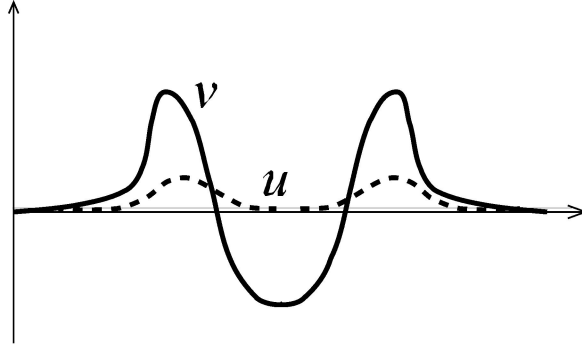


Figure 5.3:  $\xi(x)$  の関数形.

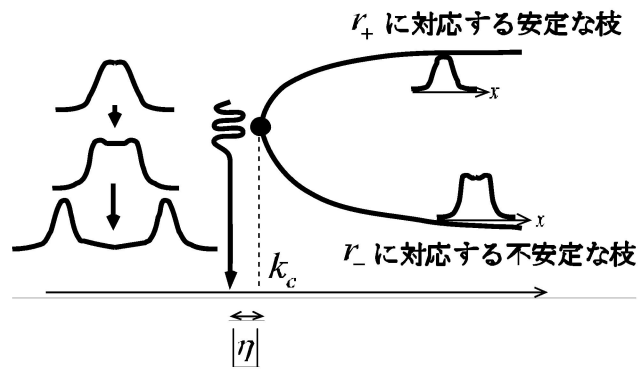


Figure 5.4: ダイナミクスまで込めた分岐図式.

## 6 サドル・ノード分岐点近傍におけるパルスの相互作用

この節では (H5) のもとでのパルスの相互作用を考察する. この場合 前節で見たように, サドル・ノード型の分岐構造がある. なおこの節の内容は [8] にほぼ従っている.

前節と同様, 遠く離れた2つのパルスは

$$S(x - l_1) + r_1 \xi(x - l_1) + S(x - l_2) + r_2 \xi(x - l_2)$$

と近似的に表されると思ってよい. そこで  $\widehat{\xi}(x; h, \mathbf{r}) := r_1 \xi(x) + r_2 \xi(x - h)$  とおき前節と同様に解を

$$U(t, x) = \tau(l_1) \{S(x; h) + \widehat{\xi}(x; h, \mathbf{r}) + V(t, x)\} \quad (6.1)$$

と表すことにする. このとき  $(l, h, \mathbf{r})$  ( $l = l_1$ ) に関する方程式

$$\begin{cases} \dot{l} &= -J_1(h) + O(\delta^2 + |\mathbf{r}|^2 + |\eta|^{3/2}), \\ \dot{h} &= J_1(h) - J_2(h) + O(\delta^2 + |\mathbf{r}|^2 + |\eta|^{3/2}), \\ \dot{r}_1 &= r_1^2 - M_2 \eta - J_1^*(h) + O(\delta^2 + |\mathbf{r}|^3 + |\eta|^{3/2}), \\ \dot{r}_2 &= r_2^2 - M_2 \eta - J_2^*(h) + O(\delta^2 + |\mathbf{r}|^3 + |\eta|^{3/2}) \end{cases} \quad (6.2)$$

を得る. ここで  $\delta = \delta(h)$ ,  $J_1^*(h) := \langle \mathcal{L}(S(x; h)), \xi^*(x) \rangle_2$ ,  $J_2^*(h) := \langle \mathcal{L}(S(x; h)), \xi^*(x - h) \rangle_2$ ,  $J_1(h) := \langle \mathcal{L}(S(x; h)), \phi^*(x) \rangle_2$ ,  $J_2(h) := \langle \mathcal{L}(S(x; h)), \phi^*(x - h) \rangle_2$  である.

$J_i$  や  $J_i^*$  の具体形を求めることは前節と同様, やはり一般には困難である. そのために以下を仮定する.

(H6) 正定数  $\alpha$  に対してある  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{b}$  が存在して  $\xi(x)$  は  $\xi(|x|) \rightarrow e^{-\alpha|x|} \mathbf{b}$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) を満たす. また  $\xi^*(x)$  に対しても同様にある  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $\mathbf{b}^*$  が存在して  $\xi^*(x)$  は  $\xi^*(|x|) \rightarrow e^{-\alpha|x|} \mathbf{b}^*$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) を満たす.

このときつぎの命題が成り立つ.

**命題 6.1** ある正定数  $\gamma_1$  があつて  $h \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} J_1(h) &= M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma_1 h})), \\ J_2(h) &= -M_0 e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma_1 h})), \\ J_1^*(h) &= M_0^* e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma_1 h})), \\ J_2^*(h) &= M_0^* e^{-\alpha h} (1 + O(e^{-\gamma_1 h})) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで定数  $M_0, M_0^*$  はそれぞれ

$$M_0 = 2\alpha \langle D\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \rangle, \quad (6.3)$$

$$M_0^* = -2\alpha \langle D\mathbf{a}, \mathbf{b}^* \rangle \quad (6.4)$$

で与えられる.

命題 6.1 と式 (6.2) より高次項を除いた方程式は

$$\begin{cases} \dot{l} &= -M_0 e^{-\alpha h}, \\ \dot{h} &= 2M_0 e^{-\alpha h}, \\ \dot{r}_1 &= r_1^2 - M_2 \eta - M_0^* e^{-\alpha h}, \\ \dot{r}_2 &= r_2^2 - M_2 \eta - M_0^* e^{-\alpha h} \end{cases} \quad (6.5)$$

となり, サドル・ノード分岐点近傍における 2 つのパルスの相互作用を記述する縮約方程式を得たことになる. 式 (6.5) を考察することにより, パルスがどのように相互作用するかを解析してみよう. なお, 式 (6.5) においては前節と同様, 係数  $M_j, M_0^*$  はすべて正であると仮定する. 式 (6.5) において  $h$  はそれだけでダイナミクスが決まり,  $M_0 > 0$  と仮定しているからつねに  $\dot{h}$  は正である.  $h$  は 2 つのパルス間の距離であるから, これは 2 つのパルスが徐々に離れて行くことを示している (反発的相互作用).

つぎに  $\eta$  に応じてダイナミクスがどのように変わるかを調べてみる. まず  $\eta > 0$  の範囲で考えると  $r_j$  の式の右辺は  $h > 0$  を固定するごとに 1 つの不安定平衡点  $r_- = r_-(h) := -\sqrt{M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h}}$  と 1 つの安定平衡点  $r_+ = r_+(h) := \sqrt{M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h}}$  を持つ.  $h$  が十分大であれば  $\dot{h}$  および  $M_0^* e^{-\alpha h}$  は十分小であるから安定平衡点  $r_+$  の近傍にある解  $r_j(t)$  は  $h$  が変化しても  $r_+$  の近傍にあると考えてよいであろう. このように  $\eta > 0$  では  $r_+$  に対応する 2 つのパルスが互いに離れていくというダイナミクスになることがわかる.

つぎに  $\eta < 0$  の範囲を考える. 前節でみたように, この範囲では単独のパルスは  $r_j$  の増大に伴い分裂していく (図 5.4). ここで  $r_j$  が各パルスのへこみの度合いを表していることに注意しておく. それではそのようなパルスが 2 つある場合どのような振る舞いをするであろうか. いま  $h(t)$  は時間とともに単調増加であるからもし初期のパルス間距離  $h(0)$  が  $M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h(0)} < 0$  を満たしたとするとすべての  $t > 0$  で  $M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h(t)} < 0$  であり  $\dot{r}_j > 0$  となるから  $r_j(t)$  は時間とともに増加することになる. これはパルスが分裂に向かうことに対応していると思っていよい.

一方  $M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h(0)} > 0$  であったとしよう. このとき  $h(t)$  は単調増加であるがしばらくは  $M_2 \eta + M_0^* e^{-\alpha h(t)} > 0$  を満たしている. この間, 式 (6.5) 第 3, 4 式は先にも考察したように,  $h$  を固定するごとに安定平衡点  $r_+(h(t))$  を持つから解は  $r_+$  に対応するパルスに近い状態を保っていると考えられる.

しかし  $h(t)$  の増加に伴いいずれ  $M_2\eta + M_0^*e^{-\alpha h(t)} < 0$  となり分裂が始まることになる. これは  $M_2\eta + M_0^*e^{-\alpha h^*} = 0$  を満たす臨界距離  $h^*$  が存在して, 2つのパルス間距離  $h$  が  $h < h^*$  である間は分裂せず式 (6.5) 第2式に従ってただ離れていくだけであるが,  $h > h^*$  となると分裂が始まるということである. この  $h^*$  は  $\log |\eta|$  のオーダーであるから分岐点に近いほど臨界距離が長くなることがわかる.

## 7 縁分裂現象の理解

前節で得られた分裂開始のための臨界距離  $h^*$  の存在を主導原理として, パルスの分裂の仕方について考えてみよう.

$N + 1$  個のパルス  $S(x - x_j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ) が互いに十分大きな間隔をもって存在しているとする. 各パルスの間隔を  $h_j := x_j - x_{j-1}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) とする. このとき式 (6.5), とくにパルス間隔に関する第2式はつぎのように拡張される:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 &= -M_0(e^{-\alpha h_2} - 2e^{-\alpha h_1}), \\ \dot{h}_j &= -M_0(e^{-\alpha h_{j-1}} - 2e^{-\alpha h_j} + e^{-\alpha h_{j+1}}), \quad (j = 2, \dots, N-1) \\ \dot{h}_N &= -M_0(e^{-\alpha h_{N-1}} - 2e^{-\alpha h_N}). \end{cases} \quad (7.1)$$

以下  $M_0 > 0$  とする. これはパルスが互いに反発的に作用していることを意味する. このときつぎの結果が成り立つ.

**定理 7.1** [8] 常微分方程式系 (7.1) の解  $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_N(t))$  に対して  $h_j(0) < h^*$  が成り立つとする. このとき有限時間後に  $h_1$  かまたは  $h_N$  が最初に  $h^*$  に到達する. すなわちある有限時間  $t^* > 0$  が存在して  $j = 1$  または  $N$  に対して  $h_j(t^*) = h^*$ ,  $j = 2, 3, \dots, N-1$  に対して  $h_j(t^*) < h^*$  となる.

この結果は, 最初に臨界距離  $h^*$  に到達するのは必ず一番外側のパルス間隔であるということであり, したがって最初に分裂をスタートさせるのは必ず縁のパルスということになる. これは数値実験の結果とも合致している. 以上より分裂の仕方は  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$  となることがわかる.

この節および前節の内容に関する証明やより詳しい説明は [8] や [25], [23] に詳しく記されているので興味のある読者は参照されたい.

## References

- [1] J. Carr, Applications of centre manifold theory, Applied Mathematical Sciences, vol. 35, Springer-Verlag (1981).



- [2] J. Carr and R. L. Pego, Metastable patterns in solutions of  $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + f(u)$ , *Comm. Pure Appl. Math.* 42 (1989) 523-576.
- [3] A. Doelman, R.A. Gardner and T.J. Kaper, Stability analysis of singular patterns in 1-D Gray-Scott model: A matched asymptotic approach, *Physica D* 122 (1998).
- [4] S.-I. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems*, *J. Dynamics and Differential Equations* 14(1) (2002) 85-137.
- [5] 柴伸一郎, 神経繊維モデルにおけるパルスの相互作用について、横浜市立大学論叢 自然科学系列 46 巻 2 号 (1995) 45-64.
- [6] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems*, *Physica D* 165 (2002) 176-198.
- [7] S.-I. Ei, M. Mimura and M. Nagayama, *Interacting Spots in reaction diffusion systems*, *DCDS* 14 (2006) 31-62.
- [8] S.-I. Ei, Y. Nishiura and K. Ueda,  $2^n$ -splitting or Edge-splitting, *Japan J. Ind. Appl. Math.* 18(2) (2001) 181-205.
- [9] S.-I. Ei and T. Ohta, Equation of motion for interacting pulses, *Physical Review E* vol. 50(6) (1994) 4672-4678.
- [10] S.-I. Ei and J. Wei, *Dynamics of metastable localized patterns and its application to the interaction of spike solutions for the Gierer-Meinhardt systems in two spatial dimension*, *Japan J. Ind. Appl. Math.* 19(2) (2002) 181-226.
- [11] J.W. Evans, Nerve axon equations: I Linear approximations, *Indiana Univ. Math. J.*, 21 (1972) 877-955.
- [12] J.W. Evans, Nerve axon equations: II Stability at rest, *Indiana Univ. Math. J.* 22 (1972) 75-90.
- [13] J.W. Evans, Nerve axon equations: III Stability of the nerve impulse, *Indiana Univ. Math. J.* 22 (1972) 577-593.
- [14] J.W. Evans, Nerve axon equations: IV The stable and unstable impulses, *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1975) 1169-1190.
- [15] G. Fusco and J. Hale, Slow motion manifold, dormant instability and singular perturbations, *J. Dynamics and Differential Equations* 1 (1989) 75-94.

- [16] P. C. Fife and J. B. McLeod, The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 65 (1977) 335-361.
- [17] P. Gray and S. K. Scott, Autocatalytic reaction in the isothermal continuous stirred tank reactor, *Chem. Engng. Sci.* 39 (1984) 1087-1097.
- [18] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Note in Math. Vol.840 Springer-Verlag (1981).
- [19] H. Ikeda, Global bifurcation phenomena of standing pulse solutions for three-component systems with competition and diffusion, *Hiroshima Math. J.* 32 (1) (2002) 87-124.
- [20] Y. Kan-on, Parameter dependence of propagation speed of travelling waves for competition-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Math.* 26 (1995) 340-363.
- [21] K. Kawasaki and T. Ohta, Kink dynamics in one-dimensional nonlinear systems, *Physica* 116A (1982) 573-593.
- [22] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer-Verlag (1984).
- [23] 三村, 上山, 西浦, 長山, 栄, *パターン形成とダイナミクス*, 東大出版会, 2006, 149p.
- [24] A.H. Nayfeh, *Perturbation methods*, Wiley-Interscience Publication, 1976.
- [25] 西浦廉政, 「自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス」, 岩波講座「物理の世界」 (2003) 84 ページ.
- [26] Y. Nishiura and D. Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, *Physica D* 130 (1999) 73-104.
- [27] J. Wei, *Pattern formation two-dimensional Gray-Scott model: existence of single spot solutions and their stability*, *Physica D.* 148 (2001) 20-48.