数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 18-22

集合値選択関数による強パラコンパクト性の特徴付け

Valentin Gutev
School of Mathematical Sciences,
University of KwaZulu-Natal

島根大学 総合理工学部 山内貴光 (Takamitsu Yamauchi)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

本稿は, 論文 [9] の解説である. 以下, 空間は正則空間を表す. 空間 X の点を空間 Y の部分集合へ対応させる集合値関数を $\Phi : X \multimap Y$ で表す. 特に, 各 $x \in X$ に対して $\Phi(x) \neq \varnothing$ であるときは, $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ と表す.

一価写像 $f : X \to Y$ が $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ の選択関数であるとは, 各点 $x \in X$ に対して $f(x) \in \Phi(x)$ をみたすことである. また, 集合関数 $\Phi : X \multimap Y$ に対して, 集合値関数 $\psi : X \multimap Y$ が各点 $x \in X$ について $\psi(x) \subset \Phi(x)$ をみたすとき, ψ を Φ の集合値選択関数という. 集合値関数 $\Phi : X \multimap Y$ が下半連続であるとは, Y の任意の開集合 U に対して,

$$\Phi^{-1}(U) = \{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \varnothing\}$$

が X の開集合であることである. また, 集合値関数 $\psi : X \multimap Y$ が上半連続であるとは, Y の任意の開集合 U に対して,

$$\psi^{\#}(U) = \{x \in X : \psi(x) \subset U\}$$

が X の開集合であることである. 集合値関数 $\Phi : X \multimap Y$ と空間 Y の部分集合に関する性質 P に対して, 各 $x \in X$ に対して, $\Phi(x)$ が性質 P をみたすとき, Φ を P 値関数とよぶ. また, 上半連続なコンパクト値関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$ を *usco* 関数とよぶ.

Michael の [10, 11, 12] における連続選択関数の存在定理では, Y に線形性, または, X の有限次元性と集合値関数の像の連結性が本質的に関わる. 一方, Michael [13] は, より弱い仮定の下で, 半連続な集合値選択関数の存在を証明した. さらに, Choban[2] は, その Michael [13] の定理を用いて, 次の集合値選択関数を用いたパラコンパクト性の特徴付けを与えた.

定理 1 (Michael [13], Choban [2]). **空間 X がパラコンパクトであるための必要十分条件は, 任意の完備距離空間 Y に対して, 任意の下半連続な閉集合値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ が, *usco* 集合値選択関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$ をもつことである.**

定理 1 を発端とし, これまでにいくつかの位相的性質が, 完備距離空間への下半連続集合値関数に対する半連続な集合値選択関数の存在, または, 距離空間への集合値関数を集合値選択関数としてもつ半連続集合値関数の存在を用いて特徴

付けられた [2, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. これらの論文において特徴付けられた位相的性質は, 被覆の性質に関わるものである. その理由として, 次の事実が挙げられる.

事実 2. X を空間とし, $\{U_y : y \in Y\}$ を X の集合族とする. Y を離散空間とし, 集合値関数 $\Phi : X \multimap Y$ を $\Phi(x) = \{y \in Y : x \in U_y\}$, $x \in X$ によって定め, $\psi : X \multimap Y$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\{U_y : y \in Y\}$ は X を被覆する $\Leftrightarrow$ Φ の値は空でない (i.e. $\Phi : X \rightsquigarrow Y$).

(2) ψ は Φ の集合値選択関数
$\Leftrightarrow$ $\{\psi^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ は $\{U_y : y \in Y\}$ の shrinking
(i.e. 各 $y \in Y$ について $\psi^{-1}(\{y\}) \subset U_y$).

(3) $\psi : X \rightsquigarrow Y$ は下半連続 $\Leftrightarrow$ $\{\psi^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ は X の開被覆.

(4) $\psi : X \rightsquigarrow Y$ は下半連続かつコンパクト値
$\Leftrightarrow$ $\{\psi^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ は点有限な開被覆.

(5) $\psi : X \rightsquigarrow Y$ は上半連続 $\Leftrightarrow$ $\{\psi^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ は遺伝的閉包保存な閉被覆.

(6) $\psi : X \rightsquigarrow Y$ は usco $\Leftrightarrow$ $\{\psi^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ 局所有限な閉被覆.

定理 1 の十分性の証明では, 任意に与えた開被覆に対して, 事実 2 で定められた離散空間への集合値関数 Φ を考える. そして, 定理の条件と事実 2 の (2), (6) を用いることによって, X のパラコンパクト性が得られる. 集合値関数を用いた他の位相的性質の特徴付けにおいても, 同様な議論で, 必要十分条件の十分性 (集合値選択関数の条件から位相的性質が満たされること) が証明される. さらに, Choban, Mihaylova and Nedev [4] は, 空間から離散空間への集合値選択関数と factorization を用いることにより, 強パラコンパクト性の特徴付けを与えた. 空間 X が強パラコンパクトであるとは, 任意の開被覆が星有限な開被覆によって細分されることである. ここで, 空間 X の開被覆 $\mathscr{U}$ が星有限であるとは, 任意の $U \in \mathscr{U}$ に対して $\{W \in \mathscr{U} : W \cap U \neq \varnothing\}$ が有限であることである. 集合値関数 $\psi : X \rightsquigarrow Z$ と $A \subset X$ に対して, $\psi(A) = \bigcup\{\psi(x) : x \in A\}$ とおく. ψ が X から Z への写像 (または集合値関数) で θ が Z から Y への写像 (または集合値関数) のとき, ψ と θ の合成 $\theta \circ \psi$ は, $(\theta \circ \psi)(x) = \theta(\psi(x))$, $x \in X$ で定義される. 集合値関数 $\psi : X \rightsquigarrow Z$ に対して, 集合値関数の列 $\psi^n : X \rightsquigarrow Z$, $n < \omega$ を, $\psi^0 = \psi$, $\psi^{n+1}(x) = \psi(\psi^{-1}(\psi^n(x)))$, $x \in X$ で定める. また, $\psi^\omega : X \rightsquigarrow Z$ を $\psi^\omega(x) = \bigcup\{\psi^n(x) : n < \omega\}$, $x \in X$ で定める. Choban, Mihaylova and Nedev [4] は, 次の定理を証明した.

定理 3 (Choban, Mihaylova and Nedev [4]). *空間 X が強パラコンパクトであることの必要十分条件は, 任意の離散空間 Y と任意の下半連続な集合値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ に対して, 離散空間 Z, usco 関数 $\psi : X \rightsquigarrow Z$, 写像 $g : Z \to Y$ が存在し, $g \circ \psi : X \rightsquigarrow Y$ が Φ の集合値選択関数, かつ $\psi^\omega : X \rightsquigarrow Z$ が可算集合値であることである.*

定理3ではYが離散空間であるため, 十分性のみならず必要性も, 事実2と同様に, 被覆と集合値関数の言い換えを行うことで証明できる. 一方, 定理1を初めとする集合値選択関数を用いた位相的性質の特徴付けでは, 集合値関数の値域Yは完備距離空間である. そのため, それらの定理の必要性の証明では, 集合値関数の収束等, 細かい議論を必要とする場合が多い. それでは, 定理3におけるYを完備距離空間とした場合, 集合値選択関数を用いた強パラコンパクト性の特徴付けは, どのようなものになるか. この問題に対して, 以下の結果を得た.

集合Zの距離dが*ultrametric*であるとは, 任意の$x, y, z \in Z$に対して$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\}$が成り立つことである. このとき, 距離空間$(Z,d)$は*ultrametric*空間と呼ばれる. 距離空間(Z,d)の点$z \in Z$と$\varepsilon > 0$に対して, $B^d_\varepsilon(z) = \{y \in Z : d(y,z) < \varepsilon\}$. とおく. また, 距離空間$(Z,d)$の部分集合$S \subset Z$と$\varepsilon > 0$に対して, $S \subset \bigcup_{z \in F} B^d_\varepsilon(z)$をみたす有限集合$F \subset S$が存在するとき, Sを全ε-有界という. このとき, 次が成り立つ.

定理 4 ([9]). 空間Xに対して, 次は同値である:

(a) Xは強パラコンパクト.

(b) 任意の完備距離空間(Y,ρ)と任意の下半連続な閉値関数$\Phi : X \rightsquigarrow Y$に対して, 完備な*ultrametric*空間$(Z,d)$と*usco*関数$\psi : X \rightsquigarrow Z$, および一様連続写像$g : Z \to Y$が存在し, $g \circ \psi : X \rightsquigarrow Y$が$\Phi$の集合値選択関数であり, かつ, 各$\varepsilon > 0$と任意の全$\varepsilon$-有界な集合$S \subset Z$に対して, $\psi(\psi^{-1}(S))$は全ε-有界である.

(c) 任意の離散空間Yと任意の下半連続な集合値関数$\Phi : X \rightsquigarrow Y$に対して, 離散空間$Z$と*usco*関数$\psi : X \rightsquigarrow Z$, および写像$g : Z \to Y$が存在し, $g \circ \psi : X \rightsquigarrow Y$が$\Phi$の集合値選択関数であり, かつ, 任意の有限集合$S \subset Z$に対して, $\psi(\psi^{-1}(S))$は有限集合である.

注意 5. 定理4において, (b) $\Rightarrow$ (c) は自明である. また, (c) より定理3の条件が得られるため, (c) $\Rightarrow$ (a) を得る. (a) $\Rightarrow$ (b) の証明のためには, これまでの定理と同様, 与えられた下半連続関数から適当なsieve ([1]) を構成する事により, 求めるultrametric 空間, usco関数, 及び一様連続写像を得る. 論文 [9] においては, 記法の簡略化のため, [7] に従いsieveをtreeからの集合値関数とみなして議論しているが, [1] において定義された被覆の族によるものと本質的には同じものである.

定理3および4は, factorization をとることによって強パラコンパクト性を特徴付けている. 定理3および4において, factorizationをとることなく, ψがΦの集合値選択関数であるとすることによって特徴付けられる位相的性質は, 強パラコンパクト性よりも強ことがChoban, Mihaylova and Nedev [4] によって示された. 空間Xに対して$\omega(X) = \bigcup\{U : U \text{ is open in } X \text{ and } \dim(U) = 0\}$, とおき, $c\omega(X) = X \setminus \omega(X)$とする. ここで, $\dim(U)$はUの被覆次元を表す. また, 空間Xの開被覆$\mathscr{U}$が星可算であるとは, 任意の$U \in \mathscr{U}$に対して$\{W \in \mathscr{U} : W \cap U \neq \varnothing\}$

が可算であることである. Choban, Mihaylova and Nedev [4] は, 次の定理を証明した.

定理 6 (Choban, Mihaylova and Nedev [4]). 空間 X に対して, 次は同値である:

(a) X は強パラコンパクトかつ $c\omega(X)$ は *Lindelöf*.

(b) X の任意の開被覆 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ は星可算な X のある開被覆 $\{V_\alpha :\in A\}$ によって *shrink* される (i.e. 各 $\alpha \in A$ について $V_\alpha \subset U_\alpha$ をみたす).

(c) 任意の離散空間 Y と任意の下半連続な集合値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ に対して, *usco* な Φ の集合値選択関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$, が存在し, $\psi^\omega : X \rightsquigarrow Y$ が可算集合値である.

さらに, Choban, Mihaylova and Nedev は, 強パラコンパクト空間 X で $c\omega(X)$ が Lindelöf でない例を与えた [4, Example 7].

空間 X に対して, 条件「任意の X の開被覆は, 濃度が τ より小さい部分被覆をもつ」をみたす無限濃度 τ のうち, 最小の濃度を $k(X)$ と表す. このとき, 次が成り立つ.

定理 7 ([9]). 空間 X がパラコンパクトで, $\tau = k(c\omega(X))$ が正則基数であるとする. このとき, 任意の完備距離化可能空間 Y と任意の下半連続な閉値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ に対して, *usco* な Φ の集合値選択関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$ が存在し, $k(S) \leqslant \tau$ をみたす任意の集合 $S \subset Y$ に対して $k(\psi(\psi^{-1}(S))) \leqslant \tau$ が成り立つ.

定理 7 から, 定理 6 の (a) ⇒ (b) も以下のように完備距離空間 Y へ拡張できる.

命題 8 ([3, 5, 6, 9]). 空間 X が強パラコンパクトで $c\omega(X)$ が *Lindelöf* であるための必要十分条件は, 任意の完備距離化可能空間 Y と任意の下半連続な閉値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ に対して, *usco* な Φ の集合値選択関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$ が存在し, $\psi^\omega : X \rightsquigarrow Y$ が可分値である.

また, Choban, Mihaylova and Nedev [4] は, 定理 6 の類似として次の特徴付けを与えた.

定理 9 (Choban, Mihaylova and Nedev [4]). 空間 X に対して, 次は同値である:

(a) X は強パラコンパクトかつ $c\omega(X)$ はコンパクト.

(b) X の任意の開被覆 $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ は星有限な X のある開被覆 $\{V_\alpha :\in A\}$ によって *shrink* される.

定理 9 で定められる位相的性質は, 定理 6 のそれより強い ([4, Example 7]). 定理 7 より, 定理 9 の空間に対しても集合値選択関数を用いた次の特徴付けが与えられる.

命題 10 ([9]). 空間 X に対して, 定理 *9* の (a) および (b) と次は同値である:

(c) 任意の完備距離化可能空間 Y と任意の下半連続な閉値関数 $\Phi : X \rightsquigarrow Y$ に対して, *usco* な Φ の集合値選択関数 $\psi : X \rightsquigarrow Y$ が存在し, 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して $\psi(\psi^{-1}(K))$ はコンパクトである.

なお, 命題10 と同様な結果が, Choban, Mihaylova and Nedev [3, 5, 6] によって報告されている.

References

[1] J. Chaber, M. Choban, and K. Nagami, *On monotone generalizations of Moore spaces, Čech-complete spaces and p-spaces*, Fund. Math. **84** (1974), 107–119.

[2] M. Choban, *Many-valued mappings and Borel sets. II*, Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 286–310.

[3] M. Choban, E. Mihaylova, and S. Nedev, *On paracompactness via selections*, International Conference on Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics, Chisinau, August 2007, 50–53.

[4] M. Choban, E. Mihaylova, and S. Nedev, *On selections and classes of spaces*, Topology Appl. **155** (2008), 797–804.

[5] M. Choban, E. Mihaylova, and S. Nedev, *On the geometry of paracompact spaces*, Conference on Mathematics & Information Technologies: Research and Education, Mitre–2008, Chisinau, October 2008, 8–10.

[6] M. Choban, E. Mihaylova, and S. Nedev, *Selections of lower semi-continuous mappings and compactness*, The 16th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CIAM–2008, Oradea , October 2008, 13–14.

[7] V. Gutev, *Completeness, sections and selections*, Set-Valued Analysis **15** (2007), 275–295.

[8] V. Gutev, H. Ohta, K. Yamazaki, *Selections and sandwich-like properties via semi-continuous Banach-valued functions*, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 499–521.

[9] V. Gutev and T. Yamauchi, *Strong paracompactness and multi-selections*, Topology Appl. (to appear).

[10] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.

[11] E. Michael, *Continuous selections II*, Ann. of Math. **64** (1956), 562–580.

[12] E. Michael, *Continuous selections III*, Ann. of Math. **65** (1957), 375–390.

[13] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. **26** (1959), 647–656.

[14] K. Miyazaki, *Characterizations of paracompact-like properties by means of set-valued semi-continuous selections*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2777–2782.

[15] S. Nedev, *Selection and factorization theorems for set-valued mappings*, Serdica **6** (1980), 291–317.

[16] I. Shishkov, *Hereditarily normal Katětov spaces and extending of usco mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **41** (2000), no. 1, 183–196.

[17] T. Yamauchi, *A characterization of metrizable finitistic spaces and its applications to upper semicontinuous set-valued selections*, Houston J. Math. **33** (2007), 735–751.

[18] K. Yamazaki, *Locally bounded set-valued mappings and monotone countable paracompactness*, Topology Appl. **154** (2007), 2817–2825.