数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 33-37

On rank-one isometries of right-angled Coxeter groups and their boundaries

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では, Coxeter 群 W の rank-one isometry と Coxeter 群 W が幾何学的に (ココンパクト, 離散的, 等長的に) 作用する CAT(0) 空間 X の理想境界 ∂X のフラクタルのような構造について述べる.

CAT(0) 空間およびその境界については [6], [9], [16] を, Coxeter 群および Coxeter 系については [5], [7], [24] を, また, Coxeter 系から定義される Davis 複体とよばれる CAT(0) 空間については [10], [12], [28] を参照されたい.

CAT(0) 空間 X の isometry $g: X \to X$ が, rank-one であるとは, まず g は hyperbolic isometry (cf. [6, p.229]) であり, axis とよばれる geodesic line $\sigma: \mathbb{R} \to X$ が存在する. ここで g の axis とは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $g(\sigma(t)) = \sigma(t+t_0)$ と g である定数 t_0 だけ平行移動する軸のことである. このとき, ある axis σ のイメージ $\mathrm{Im}\,\sigma$ をふちにもつような平坦な半平面 $\mathbb{R}^2_+ (= \mathbb{R} \times [0, \infty))$ が等長的に X に埋め込まれないとき, g を X の rank-one isometry という.

Rank-one isometry について, W.Ballmann-M.Brin によって以下の定理が示されている.

Theorem (W.Ballmann-M.Brin [1, Theorem A]). 群 G が *CAT(0)* 空間 X 上に幾何学的に作用しているとする. このとき G に X の *rank-one isometry* $g_0 \in G$ が (ひとつでも) 存在すれば, X の理想境界 ∂X の 2 つの任意の空でない開集合 U, V について, $g \in G$ で

$$g(\partial X - U) \subset V \quad g(\partial X - V) \subset U$$

となるものが存在する. ここで特に g は *rank-one* でとれる.

ここで, $g \in G$ は X の isometry であり, その自然な拡張として境界上の同相写像 $g: \partial X \to \partial X$ を導く.

この定理の中で, $\partial X - V$ を任意の閉集合 F ととらえると, 「X の理想境界 ∂X の任意の空でない開集合 U と任意の X でない閉集合 F について, $g \in G$ で $g(F) \subset U$ となるものが存在する」ととらえなおすことができる.

これは, 理想境界 ∂X の複雑さ, 位相的なフラクタルのような状態を表している.

X が双曲空間 $\mathbb{H}^n$ のとき, その境界 $\partial X = \partial\mathbb{H}^n$ は $(n-1)$-球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ となる. これは, 位相的フラクタルな状態をもつ最も簡単な例である. しかし, このように境界が球面となる場合以外は, 一般に, 境界は非常に複雑となる. 実際, 境界 ∂X が homotopy が消えていない真部分閉集合 A を含めば, 境界 ∂X 上の任意の空でない開集合に A と同相なものが含まれ, A と同相なものが境界上に稠密に存在する. また, ∂X 上の十分に小さい近傍 V に対して, その補集合 $\partial X - V$ は, ∂X 上の任意の空でない (いくらでも小さい) 開集合に同相なものが含まれる構造をもつ.

一般に, 群が幾何学的に作用している CAT(0) 空間の境界や, Coxeter 群の境界が, このような位相的なフラクタルの構造をもつ可能性があることは, その境界の cohomology や cohomology 次元の情報からみてとることができた ([3], [4], [11], [14], [19]). また, そのような境界の典型例が, H. Fischer ([15]) の結果にみられる.

これまでに, このような境界の複雑さをとらえるため, 力学系の概念である「極小性」と「撹拌集合」の考え方を導入してきた.

境界 ∂X (への群 G の作用) が極小であるとは, 任意の軌道 $G\alpha$ が ∂X で稠密であることをいう.

また, 境界 ∂X (への群 G の作用) が撹拌的であるとは, 任意の 2 点 $\alpha, \beta \in \partial X$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して,

$$\limsup\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} > 0 \text{ and}$$
$$\liminf\{d_{\partial X}(g\alpha, g\beta) \mid g \in G\} = 0$$

をみたすことをいう.

Coxeter 群の境界の極小性と撹拌集合に関するいくつかの結果が [20], [21] にみられる.

いまここで, 特に right-angled Coxeter 群の場合を考える.

既約な right-angled Coxeter 系 (W, S) について, 既約性から, 生成元の有限列 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset S$ で, $o(a_i a_{i+1}) = \infty$ $(i = 1, \ldots, n$ ただし $a_{n+1} = a_1)$, かつ, $\{a_1, \ldots, a_n\} = S$ をみたすものがとれる (ここで $s_i = s_j$ $(i \neq j)$ となってもよい).

このとき, Coxeter 群 W の元 $w_0 = a_1a_2 \dots a_n$ を考えると, これは right-angled Coxeter 系 (W, S) の Davis 複体 Σ の rank-one isometry となる.

W.Ballmann-M.Brin の定理と Splitting Theorem ([22], [27]) および [20], [21] の結果から, 以下の定理を得る.

Theorem. *Right-angled Coxeter* 系 (W, S) とその *Davis* 複体 Σ および, *Coxeter* 群 W が幾何学的に作用する任意の *CAT(0)* 空間 X に対して, 以下はすべて同値となる. ただし, $|\partial\Sigma| > 2$ とする.

(1) $(W_{\tilde{S}}, \tilde{S})$ は既約で *non-affine.*
(2) W は Σ の *rank-one isometry* を含む.
(3) W は X の *rank-one isometry* を含む.
(4) $\partial\Sigma$ は位相的なフラクタル構造をもつ.
(5) $\partial\Sigma$ は極小.
(6) $\partial\Sigma$ は撹拌的.
(7) ∂X は位相的なフラクタル構造をもつ.
(8) ∂X は極小.
(9) ∂X は撹拌的.
(10) Σ は積 $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ に分解する *quasi-dense* 部分集合を含まない. ただし Σ_i は非有界とする.
(11) X は積 $X_1 \times X_2$ に分解する *quasi-dense* 部分集合を含まない. ただし X_i は非有界とする.
(12) W は積 $W_1 \times W_2$ に分解する有限指数の部分群を含まない. ただし W_i は無限群とする.

ここで $W_{\tilde{S}}$ は, 有限指数の parabolic 部分群で最小のものであり, W を既約分解したときの無限のパートでもある (cf. [13], [20], [21]).

この主定理は right-angled Coxeter 群について述べたものであるが, 一般の Coxeter 群の rank-one isometry に関する最近の P.Caprace-K.Fujiwara の結果 [8, Proposition 4.5] を用いると, 本定理は一般の Coxeter 群の場合に拡張できる ([23]).

Rank-one isometry を含む CAT(0) 群が幾何学的に作用する CAT(0) 空間 X の境界 ∂X は位相的なフラクタル構造をもつが, これはさらに, locally connected (cf. [25], [26]) や locally cut-point (cf. [29], [30]) などの境界の局所的な性質と関連をもつ.

References

[1] W. Ballmann and M. Brin, *Orbihedra of nonpositive curvature*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 82 (1995), 169–209.

[2] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Progr. Math. vol. 61, Birkhäuser, Boston MA, 1985.

[3] M. Bestvina, *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Geometric Group Theory Vol. 1, LMS Lecture Notes, vol. 181, 1993, pp. 19–23.

[4] M. Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. 43 (1996), 123–139.

[5] N. Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[6] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[7] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.

[8] P. Caprace and K. Fujiwara, Rank-one isometries of buildings and quasi-morphisms of Kac-Moody groups, arXiv:0809.0470v3, preprint.

[9] C. B. Croke and B. Kleiner, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, Topology 39 (2000), 549–556.

[10] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. 117 (1983), 293–324.

[11] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. 91 (no.2) (1998), 297–314.

[12] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[13] V. Deodhar, *On the root system of a Coxeter group*, Commun. Algebra 10 (1982), 611–630.

[14] A. N. Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (no.7) (1997), 1885–1891.

[15] H. Fischer, *Boundaries of right-angled Coxeter groups with manifold nerves* Topology 42 (2003), 423–446.

[16] E. Ghys and P. de la Harpe (ed), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progr. Math. vol. 83, Birkhäuser, Boston MA, 1990.

[17] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.

[18] U. Hamenstädt, *Rank-one isometries of proper CAT(0)-spaces*, arXiv:0810.3794v1, preprint.

[19] T. Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), 291–301.

[20] T. Hosaka, *Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system*, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 899–910.

[21] T. Hosaka, *CAT(0) groups and Coxeter groups whose boundaries are scrambled sets*, J. Pure Appl. Algebra, to appear.

[22] T. Hosaka, *On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551, preprint.

[23] T. Hosaka, *On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures*, preprint.

[24] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[25] M. Mihalik and K. Ruane, *CAT(0) groups with non-locally connected boundary*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), 757–770.

[26] M. Mihalik, K. Ruane and S. Tschantz, *Local connectivity of right-angled Coxeter group boundaries*, J. Group Theory 10 (2007), 531–560.

[27] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 781–814.

[28] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.

[29] P. Papasoglu and E. L. Swenson, *Boundaries and JSJ decompositions of CAT(0)-groups*, Geom. Funct. Analy. 19 (2009), 558–590.

[30] E. L. Swenson, *A cut point theorem for CAT(0) groups*, J. Differential Geom. 53 (1999), 327-358.

[31] J. Tits, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica, vol. 1, pp. 175–185, Academic Press, London, 1969.