数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 85-88

Topological ℓ_2-stability of diffeomorphism groups

矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科

(Kyoto Institute of Technology)

本論説では, 非コンパクト多様体の微分同相群の位相的な ℓ_2-安定性とその応用に関して考察する. 第 1 節では, 背景となる 無限次元位相多様体の組 の安定性条件に基づく位相的特徴付け に関して議論する. 第 2 節では, 非コンパクト n 次元多様体 M の微分同相群 $\mathcal{D}(M)$ の コンパクト-開 C^∞-位相 の下での ℓ_2-安定性に関して考察し, その応用として, $n=2$ の場合に, 群 $\mathcal{D}(M)$ とコンパクト台を持つ微分同相写像からなる正規部分群 $\mathcal{D}_c(M)$ の 単位連結成分の組 $(\mathcal{D}(M)_0, \mathcal{D}_c(M)_0)$ の位相型の分類を得る.

1. 無限次元位相多様体の位相的特徴付けと安定性条件

無限次元位相多様体の特徴的な性質として, 位相的安定性と呼ばれる性質がある. 代表的な無限次元位相線形空間である可分ヒルベルト空間 ℓ_2 は, 実数直線 $\mathbb{R}$ の加算積 $\mathbb{R}^\infty$ と同相であることが知られており, $\ell_2 \times \ell_2 \cong \ell_2$ となる. さらに, 局所的な性質を大域化することで任意の ℓ_2-多様体 M が ℓ_2-安定性 $M \times \ell_2 \cong M$ を持つ事がわかる. 任意の 無限次元可分フレシェ空間 F も ℓ_2 と同相であることが知られているので, F-多様体も同様の ℓ_2-安定性を持つ事になる.

代表的な無限次元の空間として, 様々な写像空間を挙げる事ができる. これらは, 位相的に ℓ_2 やその線形部分空間をモデルとする多様体になる事が期待される. 特に, コンパクト多様体 M の微分同相群 $\mathcal{D}(M)$ は, コンパクト-開 C^∞-位相の下で可分フレシェ多様体になり, 従って位相的には ℓ_2-多様体となる.

無限次元位相多様体論における最も重要な結果は, 特徴付けと分類に関する定理である. 特徴付け定理は, 位相空間が無限次元位相多様体になるための必要十分条件を与えるもので, 最も基本的な ℓ_2-多様体の 特徴付け 及び 分類 は, 次の様に述べられる ([5, 10] etc).

定理 1. (1) (i) 位相空間 X が ℓ_2-多様体

$\Longleftrightarrow$ X は 可分完備距離化可能 ANR で 離散近似性 を持つ.

(ii) 位相群 G が ℓ_2-多様体

$\Longleftrightarrow$ G は 可分完備距離化可能 ANR で 局所コンパクトでない.

(2) ℓ_2-多様体 X, Y が 同相 $\Longleftrightarrow$ X, Y は 同じホモトピー型 を持つ.

無限次元空間に関して ANR 性 を示す事は一般に難しく, これが, この定理の応用を妨げている最大要因である. 一方, (1)(i) の 離散近似性 は, この場合, 任意の可分完備距離

空間から X への写像が閉埋め込みで近似出来るという条件と同値であり, さらに, ℓ_2-安定性で置き換える事が出来る. この ℓ_2-安定性も, 直接示す事は一般に難しいが, 同相群やその種々の部分群に関しては, 対応する安定性が arc の Morse length を用いて示されている (cf. [6, 9, 13]).

上記の結果を発展させて, ℓ_2 の中の様々な稠密部分空間をモデルに持つ無限次元位相多様体 の 特徴付け及び分類 に関する結果も得られている (cf. [3]).

この考察をさらに進めると, 無限次元位相多様体とその稠密部分多様体の組としての特徴付け及び分類 の研究に至る. 諸々の写像空間は, 多くの場合, 写像の種類を規定する事で, 自然な稠密部分写像空間の階層を含んでいる. また, 非完備な写像空間は, 完備化することにより, 完備な空間の中の稠密部分空間として考察する事ができる. この完備化は, 適当な条件の下で, ℓ_2-多様体になる事が期待出来る.

この様な研究は, 普遍空間の組 や Absorbing sets という形で定式化され, その特徴付け及び分類 が与えられて来た (cf. [2, 4] etc). この研究の中で, 我々は, 特に, 安定性条件の下での ℓ_2-多様体とその稠密な無限次元部分多様体の組 の 特徴付け及び分類 を得た ([11], cf. [12]). 以下では, この分野での伝統的な記法に従って, 次の記号を用いる:

$s = \mathbb{R}^\infty$ (実数列全体), $\Sigma =$ "$\mathbb{R}^\infty$ の中の有界列全体", $\sigma =$ "$\mathbb{R}^\infty$ の中の有限列全体".
$s^\infty = s$ の加算積 (s における点列全体), $s^\infty_f =$ "s^∞ の中の有限列全体".

定理 2. (1) 位相空間の 3 組 (X, X_1, X_2) が (s, Σ, σ)-多様体 $\iff$

(i) X は 可分完備距離化可能 ANR,
X_1 は σ-コンパクト, X_2 は σ-"有限次元 コンパクト",

(ii) X_2 は X においてホモトピー稠密,

(iii) (X, X_1, X_2) は (s, Σ, σ)-安定.

(2) (s, Σ, σ)-多様体 (X, X_1, X_2), (Y, Y_1, Y_2) が 組として同相
$\iff$ X, Y が同じホモトピー型 を持つ.

定理 3. (1) 位相空間の 組 (X, X_1) が (s^∞, s^∞_f)-多様体 $\iff$

(i) X は 可分完備距離化可能 ANR, X_1 は X において F_σ,

(ii) X_1 は X においてホモトピー稠密,

(iii) (X, X_1) は (s^∞, s^∞_f)-安定.

(2) (s^∞, s^∞_f)-多様体 (X, X_1), (Y, Y_1) が 組として同相
$\iff$ X, Y が同じホモトピー型 を持つ.

ただし, 空間の組 $(X, X_1, \cdots, X_n)$ について, 次の用語が用いられる:

(i) $(X, X_1, \cdots, X_n)$ が $(E, E_1, \cdots, E_n)$-多様体 $\iff$ X の任意の点 p に対して X における p の開近傍 U と E の開集合 V が存在して 組として

$$(U, U \cap X_1, \cdots, U \cap X_n) \cong (V, V \cap E_1, \cdots, V \cap E_n).$$

(ii) X_n が X においてホモトピー稠密 $\Longleftrightarrow$ ホモトピー写像 $\varphi_t : X \to X$ $(t \in [0,1])$ で $\varphi_0 = \mathrm{id}_X$ かつ $\varphi_t(X) \subset X_n$ $(t \in (0,1])$ を満たすものが存在する.

(iii) $(X, X_1, \cdots, X_n)$ が $(E, E_1, \cdots, E_n)$-安定

$$\Longleftrightarrow \text{ 組として } \quad (X \times E, X_1 \times E_1, \cdots, X_n \times E_n) \cong (X, X_1, \cdots, X_n).$$

写像空間とその部分空間に対して, 組としての安定性を示す事が出来れば, 無限次元多様体の組としての位相型を決定出来る可能性が生じることになる. 実際, 我々は [11] において, 定理 2 の応用として, コンパクト連結 2 次元 ユークリッド PL 多様体 M に対して, 組 $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}^{\mathrm{Lip}}(M), \mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M))$ が (s, Σ, σ)-多様体になる事を示した. これにより, 単位連結成分の組 $(\mathcal{H}(M)_0, \mathcal{H}^{\mathrm{Lip}}(M)_0, \mathcal{H}^{\mathrm{PL}}(M)_0)$ の位相型が, 群 $\mathcal{H}(M)_0$ のホモトピー型に基づいて決定される. 次節では, (s^∞, s^∞_f)-安定性の考察の下で, 定理 3 を適用する.

2. 微分同相群の ℓ_2-安定性

向き付けられた コンパクト連結 n 次元 C^∞-多様体 M 上の体積形式に関する Moser の定理 ([8]) は, 「M の微分同相群 $\mathcal{D}(M)$ が 体積形式 ω を保存する微分同相写像の群 $\mathcal{D}(M;\omega)$ と 全体積 1 の体積形式の空間 $\mathcal{V}_1(M)$ の積に分解出来る」 事を主張している. 空間 $\mathcal{V}_1(M)$ は, 無限次元フレシェ空間の凸集合として ℓ_2 と同相になり, 従って, 微分同相群は ℓ_2-安定となる. この議論は, 体積形式の代わりに体積密度を用いれば, M が向き付け可能でない場合にも拡張される.

次に, 非コンパクト多様体の微分同相群の ℓ_2-安定性に関して考察を進める. 非コンパクト 連結 n 次元 C^∞-多様体 M の微分同相群 $\mathcal{D}(M)$ は, 正規部分群としてコンパクト台を持つ微分同相写像からなる部分群 $\mathcal{D}_c(M)$ を含んでいる. 組 $(\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M))$ の位相的性質を明らかにする事は, 群 $\mathcal{D}(M)$ の位相と同時に, その内部構造をも理解する上で重要となる. 群 $\mathcal{D}(M)$ の位相的性質は, 付与する位相に大きく依存する. Whitney 位相の下では $\mathcal{D}_c(M)$ は フレシェ空間の順極限 $\ell_2 \times \operatorname{dir}\lim_n \mathbb{R}^n$ をモデルとする無限次元多様体 になり, 距離化可能でない ([1]). ここでは, もう一つの代表的位相である コンパクト-開 C^∞-位相の下で考察する. この位相の下では, $\mathcal{D}(M)$ は完備距離化可能となり, さらに, M が適当な条件を満たせば, $\mathcal{D}(M)$ は ℓ_2-多様体になる事が期待出来る.

M が非コンパクトの場合, M の中に n 次元球体の離散列 D_i $(i \in \mathbb{N})$ を取る事が出来る. すると, 各 D_i 上で Moser の定理 を適用することにより, 組 $(\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M))$ の (s^∞, s^∞_f)-安定性 を直接示す事が出来そうに思えてくる. 実際, この議論を精密化して次の定理を証明することが出来る.

定理 4. M が 非コンパクト n 次元 C^∞-多様体 のとき, コンパクト-開 C^∞-位相 の下で 組 $(\mathcal{D}(M), \mathcal{D}_c(M))$ は (s^∞, s^∞_f)-安定 である.

定理 3 を適用するには, $\mathcal{D}(M)$ の ANR 性 と $\mathcal{D}_c(M)$ のホモトピー稠密性 を示す必要がある. 筆者は [14] で, $n = 2$ の時に, これらの性質を示している. 従って, 次の結論を得る.

定理 5. M が 境界を持たない 非コンパクト 連結 2 次元 C^∞-多様体 のとき, コンパクト-開 C^∞-位相 の下で 単位連結成分の組 $(\mathcal{D}(M)_0, \mathcal{D}_c(M)_0)$ は (s^∞, s_f^∞)-多様体 になる.

さらに [14] では, $n = 2$ の時に $\mathcal{D}(M)_0$ のホモトピー型を分類しているので, (s^∞, s_f^∞)-多様体 の位相型の分類 (定理 3 (2)) を用いて, 次の系が得られる.

系 1. 定理 5 に於いて

$$(\mathcal{D}(M)_0, \mathcal{D}_c(M)_0) \cong \begin{cases} (s^\infty, s_f^\infty) \times \mathbb{S}^1 & (M：\text{平面, 開アニュラス or 開メービウス帯}), \\ (s^\infty, s_f^\infty) & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

References

[1] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology*, to appear in Top. Proc. (arXiv math:0802.0337).

[2] J. Baars, H. Gladdines and J. van Mill, *Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds*, Top. and its Appli., **50** (1993) 147–182.

[3] M. Bestvina and J. Migilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional retracts*, Michigan Math. J., **33** (1986) 291–313.

[4] R. Cauty, *Sur deux espaces de fonctions non dérivables*, Fund. Math., **141** (1992) 195–214.

[5] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, *Separable complete ANR's admitting a group structure are Hilbert manifolds*, Topology Appl. **12** (1981), 229–235.

[6] J. Keesling, *Using flows to construct Hilbert space factors of function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **161** (1971) 1–24.

[7] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction,* North-Holland, Math. Library **43** Elsevier Sci. Publ. B.V., Amsterdam, 1989.

[8] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965) 286–294.

[9] K. Sakai and R. Y. Wong, *On the space of Lipschitz homeomorphisms of compact polyhedron*, Pacific J. Math., **139** (1989) 195–207.

[10] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math., **111** (1981) 247–262.

[11] T. Yagasaki, *Infinite-dimensional manifold tuples of homeomorphism groups*, Topology Appl., **76** (1997) 261–281.

[12] T. Yagasaki, *Characterizations of infinite dimensional manifold triples and their applications to homeomorphism groups*, Proc. of conf. on Surgery and Geometric Top., 1996., Science Bull. of Josai Univ. (1997) No 2, 145–159.

[13] T. Yagasaki, *The groups of PL and Lipschitz homeomorphisms of noncompact 2-manifolds,* Bull. of Polish Academy of Sciences, Math., **51(4)** (2003) 445–466.

[14] T. Yagasaki, *Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, preprint (arXiv math.GT/0109183v3).

Tatsuhiko Yagasaki

Division of Mathematics,
Graduate School of Science and Technology,
Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyoku, Kyoto, 606-8585, Japan

yagasaki@kit.ac.jp